А. А. СОКОЛОВ

ВВЕДЕНИЕ В КВАНТОВУЮ ЭЛЕКТРОДИНАМИКУ

А. А. СОКОЛОВ

ВВЕДЕНИЕ В КВАНТОВУЮ ЭЛЕКТРОДИНАМИКУ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1958

АННОТАЦИЯ

Монография посвящена квантовой электродинамике, т. е. релятивистской теории движения и взаимодействия электронов, позитронов и фотонов, а также отчасти μ-мезонам. Значительное внимание уделено не только систематическому изложению общих вопросов теории, но и подробным расчетам отдельных конкретных эффектов (взаимодействию фотонов с электронами, рождению и аннигиляции электронов и позитронов, поляризации электрон-позитронного вакуума, сдвигу уровней атомных электронов, позитронию, мезоатомам и др.).

Всюду, где это возможно, используется единый математический метод (преобразование Фурье, деление на оператор, разложение операторов в ряд и т. д.), которым нетрудно овладеть, имея в своем распоряжении минимум дополнительной литературы по квантовой механике и уравнениям математической физики.

Математический аппарат, развитый в монографии, позволяет сравнительно просто изложить ряд смежных с квантовой электродинамикой разделов, например теорию нейтрино с ориентированным спином (эта теория имеет большое значение в связи с открытием несохранения четности), теорию затухания и др.

Монография рассчитана на научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов — физиков и математиков, интересующихся современной квантовой теорией поля.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА I

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ СВОБОДНОГО ПОЛЯ

ГЛАВА II

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕКТРОНОВ С ВТОРИЧНО КВАНТОВАННЫМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

ГЛАВА III

ТЕОРИЯ ПОЗИТРОНА

ГЛАВА IV

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОН-ПОЗИТРОННОГО ВАКУУМА

ПРЕДИСЛОВИЕ

Как известно, в классической физике корпускулярные свойства относились к одним объектам (например, к электронам), а волновые свойства к другим (например, к свету).

Из теории квантов Планка и квантовой механики Шредингера — Гейзенберга следовало, что корпускулярные свойства присущи в некоторых условиях также и свету (теория фотонов Эйнштейна), а волновые свойства — также пучкам электронов (волны де Бройля).

Наконец, с помощью вторичного квантования была построена последовательная теория (квантовая теория поля), которая с единой точки зрения позволила описать как корпускулярные, так и волновые свойства любых элементарных частиц.

Подобный синтез корпускулярных и волновых свойств может быть понят только на основе диалектического материализма, который учит, что в каждом явлении природы наряду с проявлением противоположностей должно существовать также и их диалектическое единство.

Согласно квантовой теории поля не должно существовать имеющего место в классической теории принципиального различия между светом и электронами. И свет и пучок электронов состоят из элементарных частиц, которые отличаются друг от друга спином (спин фотона равен единице, а электрона — половине) и массой покоя (масса покоя фотона равна нулю, а электрона — некоторой конечной величине).

В квантовой теории поля по-новому поставлен вопрос и о поле как о возбужденном вакууме частиц. Наряду с электромагнитным полем должны также существовать электрон-позитронное, мезонное, электрон-нейтринное поля и т. д. Вакуум, с одной стороны, при соответствующем возбуждении обусловливает взаимодействие между частицами, а с другой — является системой с неограниченным числом виртуальных частиц, представляющих собой своеобразный резервуар, откуда «извлекаются» реальные частицы при их порождении и куда они «переходят» в результате аннигиляции.

В настоящее время известны следующие виды взаимодействия:

1) Электромагнитное взаимодействие, которое, в частности, связывает между собой электроны, позитроны и фотоны, а также другие заряженные частицы, например μ-мезоны. Часть квантовой теории поля, в которой рассматриваются процессы, связанные лишь с электромагнитным взаимодействием, называется обычно квантовой электродинамикой. Она описывает прежде всего процессы взаимодействия фотонов с зарядами (например, процессы испускания и поглощения фотонов, рассеяния фотонов электронами, тормозного излучения и т. д.). С ее помощью можно исследовать взаимное превращение электронов и позитронов в фотоны, предсказанное Дираком на основе релятивистского волнового уравнения для электрона. Сравнительно недавно начала успешно развиваться новая глава квантовой электродинамики — теория электрон-позитронного вакуума.

Одним из основных методов рассмотрения конкретных задач квантовой электродинамики является приближенный метод возмущений. Во многих квантовоэлектродинамических задачах параметром разложения служит величина, пропорциональная постоянной тонкой структуры $\alpha = e^2/c\hbar \approx 1/137$, являющаяся малой величиной. Использование первых членов разложения теории возмущений (несмотря на то, что сходимость ряда в целом обычно не исследуется) приводит, как правило, к результатам, хорошо согласующимся с экспериментом не только в теории взаимодействия фотонов с зарядами, но и в теории электрон-позитронного вакуума. Недавнее открытие ряда античастиц (антипротонов, антинейтронов), а также мезоатомов говорит о том, что многие положения современной квантовой электродинамики, из которых следует, например, существование античастиц, найдут свое отражение и в будущих теориях элементарных частиц.

2) Сильное взаимодействие обусловливает, в частности, ядерные силы, взаимодействие нуклонов с π-мезонами, а также рождение странных частиц (K-частиц и гиперонов) и т. д. Теорию явлений, связанных с сильным взаимодействием, многие авторы пытались построить, используя метод возмущений и выбирая в качестве параметра разложения соответствующее значение мезонной постоянной структуры $\alpha_{\text{сильн}} = g^2/\hbar c$. Однако дальнейшие исследования показали, что эта величина больше единицы, т. е. вести разложение по ней не представляется возможным.

Это обстоятельство, а также недостаточность экспериментальных данных о характере первичного взаимодействия нуклонов с π-мезонным полем являются причиной того, что теория сильного взаимодействия еще далека от того состояния, в котором в настоящее время находится квантовая электродинамика.

Дальнейшее развитие теории сильного взаимодействия, возможно будет связано с усовершенствованием приближенных методов в обла-

сти $\alpha > 1$ (например, теория затухания или метод Тамма — Данкова, в основе которого лежит разложение не по константе связи, а по числу частиц, и т. д.).

Следует также заметить, что большую роль в развитии теории рассеяния π-мезонов играют так называемые дисперсионные соотношения, вытекающие из применения к квантовой теории некоторых общих требований, например причинности и др. Эти соотношения выявляют физическую сущность процессов и позволяют устранить неоднозначность в выборе фаз рассеяния π-мезонов.

В теории сильного взаимодействия, так же как и в случае электромагнитных взаимодействий, уравнения инвариантны относительно преобразований Лоренца, инверсии пространства — времени и преобразований зарядового сопряжения, превращающих частицы в античастицы. Наряду со знаком заряда, в теории нуклона и π-мезонов большую роль играет изотопический спин, проекция которого T_3 связана с зарядом Q (в единицах элементарного заряда e) соотношением

$$Q = T_3 + \frac{n}{2},$$

где n—своеобразный барионный (т. е. нуклонно-гиперонный) заряд, причем для нуклонов и гиперонов $n = 1$, для антинуклонов и антигиперонов (еще не открытых) $n = -1$, а для π-мезонов и K-частиц $n = 0$. Для протона и нейтрона изотопический спин $T = {}^1/_2$, а его проекция $T_3 = {}^1/_2$ (для протона) и $T_3 = -{}^1/_2$ (для нейтрона). π-мезоны рассматриваются как три состояния изотопического спина $T = 1$. Проекции этого вектора могут иметь три значения: $T_3 = \pm 1$ (для $\pi^{\pm}$-мезонов), $T_3 = 0$ (для π^0-мезона), т. е. заряд π-мезонов связан с T_3 соотношением $Q = T_3$. Электромагнитное взаимодействие нарушает сохранение изотопического спина T (что приводит к различию масс протона и нейтрона, а также $\pi^{\pm}$- и π^0-мезонов), но сохраняет T_3.

Для гиперонов и K-частиц величина

$$S = 2\left(Q - T_3 - \frac{n}{2}\right)$$

не обращается в нуль (как для нуклонов и π-мезонов) и получила название странности. Последнее соотношение показывает, что из четырех величин S, T_3, Q и n независимыми можно рассматривать только три. Введение странности S позволяет объяснить существование двух нейтральных K^0-частиц, для одной из которых $S = 1$, а для другой $S = -1$.

Процессы, обусловленные сильным взаимодействием, должны происходить с сохранением изотопического спина и странности; благодаря этому удалось объяснить парное рождение странных частиц, например, в реакции $\pi^- + p^+ \rightarrow \Lambda + K^0$, поскольку странности Λ- и K^0-частиц соответственно равны $+1$ и -1.

3) Слабое взаимодействие характеризует распад нуклонов, гиперонов, K-частиц, π- и μ-мезонов. Со слабым взаимодействием связан, например, $\beta^{\pm}$-распад ядер. Соответствующее значение для $\alpha_{\text{слаб}} = g'^2/\hbar c$ имеет порядок 10^{-13}. Долгое время теория слабого взаимодействия была далека от количественного совпадения с экспериментом. Только в самое последнее время Ли и Янгом было сделано фундаментальное открытие несохранения четности при слабых взаимодействиях, что по-новому поставило вопрос об инвариантности уравнений относительно инверсии пространства и преобразований зарядового сопряжения. В процессах, происходящих при наличии слабого взаимодействия, изотопический спин T, его проекция T_3 и странность S могут изменяться при определенных правилах отбора. Например, в процессе спонтанного распада K-частицы странность изменяется на единицу. Ряд предсказаний Ли и Янга, связанных с поляризационными свойствами распадающихся мезонов и β-частиц, уже подтвержден экспериментально.

Таким образом, если в теории сильного взаимодействия законы сохранения, известные из квантовой электродинамики, несколько усиливаются, то в теории слабого взаимодействия они, напротив, несколько ослабевают.

4) Гравитационное взаимодействие пока еще стоит в стороне от теории элементарных частиц, поскольку ньютоновские силы, действующие между тяжелыми частицами, во много раз меньше даже слабого взаимодействия.

Соответствующее значение постоянной тонкой структуры равно $\alpha_{\text{грав}} = \varkappa M^2/c\hbar \sim 10^{-39}$, где $\varkappa$—гравитационная постоянная Ньютона, а M — масса нуклона.

Принципиального различия между гипотетическими гравитонами и другими элементарными частицами, по-видимому, не должно существовать. Если произвести вторичное квантование гравитационных уравнений Эйнштейна в линейном приближении, то можно показать, что масса гравитона равна нулю, а спин — двум. Наподобие фотонов, представляющих собою поперечную часть электромагнитного поля, должны существовать гравитоны (поперечно-поперечная часть гравитационного поля). Продольно-продольная, а также продольно-поперечная части гравитационного поля (псевдогравитоны) могут существовать при наличии гравитационных масс, обусловливая только взаимодействие между ними.

Гипотетические гравитоны в принципе могут излучаться гравитационными массами и даже превращаться в другие элементарные частицы (например, в электроны и позитроны). Однако ввиду крайней малости $\alpha_{\text{грав}}$ все эти превращения весьма маловероятны и пока еще далеки от экспериментальной проверки. Более подробное освещение этих весьма интересных вопросов не входит в нашу задачу.

В настоящей монографии рассматривается главным образом квантовая электродинамика (свободное поле, взаимодействие фотонов с электронами и позитронами, теория электрон-позитронного вакуума и т. д.), представляющая собою наиболее разработанный отдел современной квантовой теории поля.

При изложении материала мы стремились не только дать физические основы квантовой электродинамики, но и ознакомить читателя с вычислительным аппаратом теории. При этом мы старались выдержать единообразие изложения математического аппарата, используя в основном так называемое гейзенберговское представление и применяя прямые методы вычислений. Следует заметить также, что теория регуляризации (т. е. исключения бесконечностей, связанных с собственной массой частицы), на которую одно время возлагались очень большие надежды, далеко не преодолела трудностей современной теории поля. Поэтому теорию регуляризации, причем в наиболее простом ее варианте, мы будем использовать только в тех случаях, где фактически без нее нельзя обойтись (теория электрон-позитронного вакуума), тем более, что этот вопрос еще далек от своего математического завершения.

При изложении теории электрона нельзя не остановиться на теории нейтрино и μ-мезонов. Эти частицы подчиняются уравнению Дирака, и, возможно, в будущих теориях элементарных частиц они образуют своеобразное изотопическое семейство. В частности, несохранение четности приводит к спиновой связи между ними, проявляющейся в их продольной поляризации. При изложении этого вопроса мы воспользовались развиваемой в монографии теорией дираковских частиц с ориентированным спином.

На примерах теории атома водорода, эффекта Зеемана и т. д. мы старались осветить также последовательные этапы развития теории, начиная с классической и кончая пока что квантовоэлектродинамической. Подобный анализ постепенного познания все более тонких свойств электрона наиболее убедительно подтверждает универсальность учения Ленина о неисчерпаемости электрона, из которого, в частности, следует, что любая теория, отражающая объективные законы природы, существующие вне нашего сознания, не является окончательной и требует дальнейшего развития, ибо процесс познания даже такой частицы, как электрон, бесконечен.

Настоящая монография представляет собою, по существу, третье издание. Первым изданием следует считать первую часть монографии «Квантовая теория поля» (вторая часть — «Введение в теорию элементарных частиц» — была написана Д. Д. Иваненко), которая в некотором смысле являлась продолжением нашей первой монографии «Классическая теория поля». Второе издание было напечатано в 1957 г. в виде отдельной монографии «Квантовая электродинамика» Академическим издательством (Akademie Verlag) Германской Демократической Республики. Для этого издания, кроме исправления

замеченных опечаток и неточностей, были написаны дополнительные параграфы, которые в настоящей книге значительно расширены (поляризация электронных волн, излучение релятивистских электронов в магнитном поле, теория затухания, теория функции Грина с учетом электрон-позитронного вакуума, релятивистская теория движения двух частиц, мезоатомы и т. д.).

В заключение автор хотел бы выразить благодарность Б. К. Керимову, А. Н. Матвееву, И. М. Тернову и др., просмотревшим рукопись при подготовке настоящего издания и сделавшим ряд ценных замечаний, а также В. И. Рыднику за внимательное редактирование.

А. А. Соколов

Московский государственный университет

Июнь 1957 г.

ГЛАВА I

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ СВОБОДНОГО ПОЛЯ

§ 1. Инвариантность волновых уравнений и законы преобразования волновых функций[1])

Согласно специальной теории относительности волновые уравнения, описывающие движение любых элементарных частиц, не должны зависеть от выбора системы координат, т. е. должны сохранять свою форму при переходе от одной инерциальной системы координат к другой.

Это требование, являющееся обобщением экспериментальных фактов, на современном этапе развития физики, как правило, кладется в основу построения теории элементарных частиц[2]).

Отсюда мы можем получить законы преобразования волновых функций, т. е. определить тензорную размерность волновой функции ψ.

При составлении плотностей заряда и тока, тензора энергии и т. д., которые для линейных уравнений образуются из квадратичных комбинаций волновой функции ψ, следует учитывать, что они должны представлять собою четырехмерные вещественные тензоры.

При переходе от одной системы координат ($x^{\alpha} = x, y, z, ct$) к другой ($x'^{\alpha} = x', y', z', ct'$) составляющие тензоров должны преобразовываться по определенным правилам[3]).

Так, например, скалярные величины (тензоры нулевого ранга) при таком переходе остаются неизменными:

$$\varphi' = \varphi. \tag{1,1}$$

---

[1]) Более подробно вопросы, связанные с инвариантностью волновых уравнений, изложены в монографии Д. Д. Иваненко и А. А. Соколова «Классическая теория поля». М. — Л., изд. 2, 1951 (далее будет цитироваться как «Классическая теория поля»), стр. 119.

[2]) В связи с открытием несохранения четности вопрос об инвариантности волновых уравнений относительно инверсии пространства—времени подлежит пересмотру. Это замечание пока что касается лишь слабого взаимодействия (более подробно об этом см. § 23, п. д).

[3]) Здесь и в дальнейшем латинские буквы пробегают значения 1, 2, 3 а греческие — 1, 2, 3, 4. Кроме того, если не оговорено особо, наличие двух величин с одинаковым индексом означает суммирование по этому индексу

Векторные величины (тензоры первого ранга) преобразуются по закону

$$A'^{\alpha}=\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}A^{\mu} \text{ (контравариантный вектор)} \tag{1,2}$$

или

$$A'_{\alpha}=\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}}A_{\mu} \text{ (ковариантный вектор).} \tag{1,3}$$

Величины, образующие тензоры второго ранга, подчиняются следующим законам преобразования:

$$A'^{\alpha\beta}=\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}}A^{\mu\nu} \text{ (контравариантный тензор),} \tag{1,4}$$

$$A'_{\alpha\beta}=\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}}A_{\mu\nu} \text{ (ковариантный тензор),} \tag{1,5}$$

$$A'^{\beta}_{\alpha}=\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}}A^{\nu}_{\mu} \text{ (смешанный тензор).} \tag{1,6}$$

Эти законы преобразования легко обобщить на случай тензоров более высокого ранга. Заметим, что пространственно-временные координаты точки преобразуются по закону (1,2) и поэтому в своей совокупности образуют контравариантный вектор.

Если отвлечься от тяготения, влияние которого на элементарные частицы сравнительно мало, то при исследовании полей можно ограничиться инерциальными системами.

Переход от одной инерциальной системы координат к другой складывается в общем случае из параллельного переноса и четырехмерных поворотов одной системы отсчета относительно другой.

При параллельном переносе, изменяющем лишь начало отсчета, координаты связаны между собою соотношениями

$$x'^{\mu}=x^{\mu}+a^{\mu}. \tag{1,7}$$

При пространственных поворотах, например вокруг оси z на угол φ, мы имеем:

$$\left.\begin{aligned} x'&=x\cos\varphi+y\sin\varphi,\\ y'&=-x\sin\varphi+y\cos\varphi,\\ z'&=z, \qquad t'=t. \end{aligned}\right\} \tag{1,8}$$

Наконец, преобразования Лоренца имеют вид

$$x'=\frac{x-vt}{k}, \quad y'=y, \quad z'=z,$$

$$t'=\frac{t-\frac{vx}{c^2}}{k},$$

где $k=\sqrt{1-\beta^2}$, а $v=c\beta$ — скорость движения одной системы координат относительно другой.

Вводя гиперболические функции

$$\operatorname{ch}\gamma=\frac{1}{k}, \quad \operatorname{sh}\gamma=\frac{\beta}{k}, \tag{1,9}$$

мы можем последние преобразования представить в виде

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\operatorname{ch}\gamma - ct\operatorname{sh}\gamma, \\ ct' &= ct\operatorname{ch}\gamma - x\operatorname{sh}\gamma. \end{aligned}\right\} \tag{1,10}$$

Сравнивая последние формулы с формулами (1,8), мы видим, что преобразования Лоренца эквивалентны «повороту» в пространственно-временной плоскости на некоторый мнимый угол.

Заметим, что при параллельном переносе, а также при пространственных поворотах законы преобразования для контравариантных и ковариантных тензоров будут одинаковы, поскольку $\frac{\partial x'}{\partial y}=\frac{\partial y}{\partial x'}$ и т. д., а при пространственно-временных вращениях — различны, что видно из соотношения $\frac{\partial x'}{\partial ct}=-\frac{\partial ct}{\partial x'}$ и т. д.

Если формально ввести вместо времени мнимую составляющую ($x_\mu=x, y, z, i'ct$)[1], то тогда преобразования (1,10) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x_1\cos\alpha + x_4\sin\alpha, \\ x_4' &= x_4\cos\alpha - x_1\sin\alpha, \end{aligned}\right\} \tag{1,11}$$

где

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+(i'\beta)^2}}, \quad \sin\alpha=\frac{i'\beta}{\sqrt{1+(i'\beta)^2}}.$$

В этом случае легко показать, что

$$\frac{\partial x_1'}{\partial x_4}=\frac{\partial x_4}{\partial x_1'},$$

т. е. законы преобразования для контравариантных и для ковариантных тензоров будут одинаковыми, и мы можем не делать различия между ними.

---

[1]) Мы вводим две мнимые величины i и i'. Квадраты обеих величин должны быть равны друг другу:

$$i'^2=i^2=-1. \tag{1,12}$$

Однако эти величины должны различаться при переходе к комплексно-сопряженным значениям:

$$i^+=-i, \quad i'^+=i'. \tag{1,13}$$

Величина i' введена нами для того, чтобы отождествить контравариантные составляющие с ковариантными: $A^\alpha=A_\alpha=\mathbf{A},\ -i'A_4$.

Перечислим волновые функции, из квадратичных форм которых мы можем сконструировать вещественные тензоры.

1) Скалярная или псевдоскалярная функции, которые в общем случае могут быть комплексными. Как будет показано ниже, скалярные уравнения применимы для описания движения частиц со спином, равным нулю.

2) Четырехмерный вещественный или комплексный вектор $A_\mu (\mathbf{A}, A_4)$, из производных компонент которого можно составить антисимметричный тензор второго ранга

$$H_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}.$$

Вместо векторных величин мы можем взять также псевдовекторные величины. В частности, вещественное векторное волновое уравнение с массой покоя, равной нулю, описывает поле фотонов (уравнения Максвелла). Спин частиц, подчиняющихся векторному и псевдовекторному уравнению, равен (в единицах $\hbar$) единице.

3) Уравнение, волновые функции которого образуют симметричный тензор второго ранга

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$$

(десять составляющих), описывает поведение частиц со спином, равным двум. В частности, гравитационные поля в линейном приближении подчиняются вещественному волновому уравнению, причем масса покоя частиц гравитонов, сопоставленных полю, равна нулю.

4) В качестве волновых функций могут фигурировать также спиноры, т. е. тензоры полуцелого ранга.

Общий закон преобразования для спиноров мы исследуем в § 18. Заметим, что он отличен от закона преобразования для обычных тензорных величин. Однако из квадратичной формы спинорных величин мы можем составить вещественные тензоры. Спинорное уравнение с комплексными функциями описывает движение частиц, обладающих спином, равным половине.

В настоящей главе мы рассмотрим квантование свободного поля. Мы не предполагаем здесь строить общую теорию частиц с произвольным спином, а ограничиваем нашу задачу исследованием скалярного поля (§ 2—11), векторного уравнения электромагнитного поля (§ 12—16) и спинорного уравнения (§ 17—23), описывающего движение электронов и позитронов.

Строго говоря, рассматривая в этой монографии лишь вопросы, связанные с квантовой электродинамикой, мы могли бы ограничиться квантованием уравнений электромагнитного поля и поля электронов и позитронов. Однако на примере скалярного уравнения мы можем в наиболее простой математической форме сформулировать основные законы вторичного квантования. Поэтому изложение теории

вторичного квантования мы начнем именно с рассмотрения скалярного уравнения, обобщая затем найденные формулы на другие уравнения квантовой электродинамики.

§ 2. Скалярное уравнение

Построим теорию скалярного поля, описываемого с помощью одной скалярной волновой функции φ.

Наиболее простой способ получения волнового уравнения для свободного поля сводится к следующему.

В соотношение между энергией E, импульсом p и массой покоя m_0 частицы

$$E^2 - c^2p^2 - m_0^2c^4 = 0 \tag{2,1}$$

следует подставить операторы для энергии и импульса

$$\mathrm{E} = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathrm{p} = \frac{\hbar}{i}\nabla \;^{1)}, \tag{2,2}$$

действующие на волновую функцию φ. Заменяя, кроме того, массу m_0 величиной $\hbar k_0/c$, мы получим после сокращения на величину $\hbar^2c^2$ уравнение для волн де Бройля скалярного поля:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - k_0^2\right)\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu} - k_0^2\right)\varphi = 0. \tag{2,3}$$

Этому уравнению удовлетворяют как вещественная, так и комплексная волновые функции φ.

При наличии электромагнитного поля (потенциалы A и Φ) вместо оператора (2,2) мы должны ввести новые операторы

$$\mathrm{E} = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t} - e^-\Phi; \quad \mathrm{P} = \frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{e^-}{c}\mathbf{A}, \tag{2,4}$$

где $e^- = -e$ $(e > 0)$ — заряд электрона, а P — оператор обобщенного импульса. В этом случае автоматически будет учтено взаимодействие частицы с электромагнитным полем.

При введении таких операторов волновому уравнению может удовлетворить лишь комплексная волновая функция.

Вначале ошибочно предполагалось, что это уравнение применимо для описания релятивистского движения электрона. Однако скалярное уравнение описывает движение частицы со спином, равным нулю, в то время как спин электронов оказался равным $1/2$ (в единицах $\hbar$). Дальнейшие исследования показали, что движение электронов подчиняется спинорному уравнению. Однако в тех случаях, когда мы

---

1) Под оператором «набла» мы будем понимать векторную величину

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z},$$

где $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ — орты декартовых осей координат. Операторные величины, содержащие производные, будут обозначаться прямым шрифтом.

можем пренебречь спиновыми эффектами, скалярное волновое уравнение с комплексными волновыми функциями (см. § 11, теория Паули — Вайскопфа) оказывается пригодным для описания движения электронов и позитронов. Скалярное уравнение с вещественными волновыми функциями может описывать при $m_0=0$ свойства продольного электромагнитного поля (см. § 16). Наконец, скалярное уравнение сыграло большую роль в развитии мезодинамики ($m_0 \neq 0$), тем более, что кванты ядерного поля — π-мезоны — подчиняются псевдоскалярному уравнению, которое совпадает со скалярным для свободных частиц или для частиц, обладающих лишь электрическим зарядом. Различие между этими уравнениями появляется при учете ядерного взаимодействия.

§ 3. Вариационные методы исследования скалярного поля

Как известно, в классической теории функция действия системы материальных точек равна

$$S=\int L\,dt, \tag{3,1}$$

где L — функция Лагранжа, зависящая от обобщенных координат q_i и скоростей $\dot{q}_i$. В общем случае L может зависеть еще от времени t.

Уравнение движения является следствием принципа наименьшего действия и получается в результате варьирования функции действия S.

Элементарные вычисления приводят тогда к следующим уравнениям движения:

$$\frac{\delta L}{\delta q_i}=\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=0. \tag{3,2}$$

Если функция Лагранжа не зависит явно от времени t, то уравнения (3,2) приводят к простому виду для закона сохранения энергии. Чтобы показать это, воспользуемся следующим тождеством:

$$\frac{dL}{dt}=\sum_i\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i\right)=$$
$$=\sum_i\left[\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)\right]. \tag{3,3}$$

Принимая во внимание соотношение (3,2), находим:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i-L\right)=0,$$

откуда следует, что энергия E (или, точнее, функция Гамильтона) является постоянной величиной:

$$E=\sum_i p_i\dot{q}_i-L=\text{const}, \tag{3,4}$$

где обобщенный импульс

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}.$$

При описании поля волновая функция φ, играющая роль обобщенной координаты, зависит не только от времени $t = \frac{x_4}{ic}$, но также и от пространственных координат $r(x, y, z)$. Поэтому функция действия принимает вид

$$S = \int L\, d^4x, \tag{3,5}$$

где L — плотность функции Лагранжа (лагранжиан) — является инвариантом, а $d^4x = d^3x dt = dx\, dy\, dz\, dt$ представляет собою элемент четырехмерного объема.

Уравнения поля мы получим, варьируя L по φ:

$$\frac{\delta L}{\delta \varphi} = \frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{\partial L}{\partial \varphi_\alpha} = 0, \quad \text{где} \quad \varphi_\alpha = \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}. \tag{3,6}$$

В частности, для получения уравнения скалярного поля мы должны положить

$$L = -\frac{1}{8\pi}(\varphi_\alpha\varphi_\alpha + k_0^2\varphi^2) = -\frac{1}{8\pi}\left[(\nabla\varphi)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 + k_0^2\varphi^2\right]. \tag{3,7}$$

Тогда с помощью (3,6) находим уравнение для скалярного поля

$$\frac{1}{4\pi}(\varphi_{\alpha\alpha} - k_0^2\varphi) = \frac{1}{4\pi}\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - k_0^2\right)\varphi = 0, \tag{3,8}$$

совпадающее с уравнением (2,3).

Найдем теперь обобщение закона сохранения (3,4) на случай полей. Вместо одного уравнения (3,3) мы будем при этом иметь четыре:

$$\frac{\partial L}{\partial x_\nu} = \frac{\partial L}{\partial \varphi}\varphi_\nu + \frac{\partial L}{\partial \varphi_\mu}\varphi_{\mu\nu} = \varphi_\nu\left(\frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial L}{\partial \varphi_\mu}\right) + \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\varphi_\nu\frac{\partial L}{\partial \varphi_\mu}\right). \tag{3,9}$$

Принимая во внимание уравнение (3,6), находим, что тензор

$$T_{\mu\nu} = \varphi_\mu\frac{\partial L}{\partial \varphi_\nu} - L\delta_{\mu\nu} \tag{3,10}$$

удовлетворяет закону сохранения

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0. \tag{3,11}$$

Тензор $T_{\mu\nu}$ получил название канонического тензора энергии (точнее, плотности энергии-импульса-натяжений).

Заметим, что компоненты тензора энергии из уравнения (3,11) определяются неоднозначно.

Закону сохранения будет удовлетворять также всякий другой тензор

$$T'_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{\partial}{\partial x_\lambda} f_{\mu[\nu\lambda]}, \tag{3,12}$$

в котором некоторая произвольная функция $f_{\mu[\nu\lambda]}$ удовлетворяет условию $\frac{\partial^2 f_{\mu[\nu\lambda]}}{\partial x_\nu \partial x_\lambda} = 0$, т. е. является тензором третьего ранга, антисимметричным относительно значков ν и λ:

$$f_{\mu[\nu\lambda]} = -f_{\mu[\lambda\nu]}.$$

Тензор (3,10) может быть в общем случае несимметричным. Однако для свободного поля оказывается возможным подобрать функцию $f_{\mu[\nu\lambda]}$ таким образом, чтобы тензор (3,12) был симметричным ($T'_{\mu\nu} = T'_{\nu\mu}$).

Компоненты тензора $T_{\mu\nu}$ называются компонентами канонического тензора энергии, а компоненты $T'_{\mu\nu}$ образуют так называемый метрический, или симметризованный, тензор энергии[1]).

В частности, для скалярного поля мы находим:

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} \varphi_\mu \varphi_\nu - L\delta_{\mu\nu}. \tag{3,13}$$

В силу равенства $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$ компоненты канонического и метрического тензоров энергии совпадают друг с другом. Отсюда следует, что функция $f_{\mu[\nu\lambda]}$ для скалярного поля является произвольной постоянной, которую можно приравнять нулю.

Покажем, что условие обращения в нуль расходимости от тензора энергии

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0 \tag{3,14}$$

ведет к законам сохранения энергии и импульса поля. В самом деле, равенство (3,14) может быть представлено в виде

$$\frac{\partial T_{\mu n}}{\partial x_n} + \frac{1}{ic} \frac{\partial T_{\mu 4}}{\partial t} = 0. \tag{3,15}$$

Умножая все равенство на элемент трехмерного объема и учитывая, что при интегрировании по пространству

$$\int \frac{\partial T_{\mu n}}{\partial x_n} d^3x = 0, \tag{3,16}$$

находим четыре закона сохранения для поля:

$$\frac{d}{dt} \int T_{\mu 4} d^3x = 0. \tag{3,17}$$

---

[1]) Метрический тензор энергии может быть получен непосредственно в результате варьирования лагранжиана по компонентам метрического тензора $g^{\mu\nu}$ (см., например, «Классическая теория поля», стр. 188).

Величина

$$G_\mu = \frac{i'}{c}\int T_{\mu 4} d^3x$$

представляет собою четырехмерный импульс поля.

В частности, при $\mu = 1, 2, 3$ получаем законы сохранения для пространственных составляющих импульса поля:

$$G_n = \frac{i'}{c}\int T_{n4} d^3x = \text{const}, \tag{3,18}$$

а при $\mu = 4$ получаем закон сохранения энергии, или гамильтониана поля:

$$H = U = \frac{c}{i'} G_4 = \int T_{44} d^3x = \text{const}. \tag{3,19}$$

Отсюда видно, что плотность энергии u (временна́я компонента тензора) и импульса g_n (пространственно-временна́я компонента) связаны с тензором энергии соотношениями

$$\left.\begin{aligned} u &= T_{44} = \frac{1}{8\pi}\left[(\nabla\varphi)^2 + \left(\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 + k_0^2\varphi^2\right], \\ g_n &= \frac{i'}{c} T_{n4} = -\frac{1}{4\pi c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\frac{\partial\varphi}{\partial t}. \end{aligned}\right\} \tag{3,20}$$

Остальные компоненты тензора поля T_{nk} (пространственные компоненты) характеризуют натяжения.

§ 4. Момент количества движения скалярного поля

Как известно, момент количества движения системы материальных точек определяется формулой

$$\boldsymbol{M} = \sum [\boldsymbol{rp}], \tag{4,1}$$

где $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор, $\boldsymbol{p}$ — импульс частицы, а суммирование производится по всем частицам, входящим в состав системы.

Формула (4,1) может быть представлена в виде

$$M_x = M_{23} = \sum (x_2 p_3 - x_3 p_2), \tag{4,2}$$

допускающем простое обобщение на четырехмерный случай:

$$M_{\mu\nu} = \sum (x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu). \tag{4,3}$$

Четырехмерный момент обладает, во-первых, тремя пространственными составляющими ($M_x = M_{23}$, $M_y = M_{31}$, $M_z = M_{12}$), представляющими собою компоненты момента количества движения $\boldsymbol{M}$

в трехмерном пространстве, и тремя пространственно-временными составляющими

$$M_{4n} = \sum (x_4 p_n - x_n p_4) = i'c \sum \left(t p_n - x_n \frac{E}{c^2} \right).$$

Здесь мы учли, что $x_4 = i'ct$, а $\frac{cp_4}{i'} = E$ есть энергия.

В трехмерных обозначениях последнее соотношение может быть представлено в векторном виде:

$$\boldsymbol{M}' = i'c \sum \left(t\boldsymbol{p} - \boldsymbol{r} \frac{E}{c^2} \right),$$

где

$$M'_n = M_{4n}.$$

Легко показать, что у замкнутой системы четырехмерный тензор момента количества движения $M_{\mu\nu}$ должен сохраняться, т. е.

$$\frac{dM_{\mu\nu}}{dt} = 0, \text{ или } M_{\mu\nu} = \text{const}. \quad (4,4)$$

В самом деле, для пространственных составляющих формула (4,4) выражает известный закон сохранения момента количества движения

$$\frac{d\boldsymbol{M}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum [\boldsymbol{r}\boldsymbol{p}] = 0,$$

а для пространственно-временных составляющих имеет место соотношение

$$i'c \left(\sum \boldsymbol{p} - \frac{d}{dt} \sum \frac{E\boldsymbol{r}}{c^2} + t \frac{d}{dt} \sum \boldsymbol{p} \right) = 0. \quad (4,5)$$

Учитывая для замкнутой системы закон сохранения энергии $\sum E = \text{const}$ и закон сохранения импульса $\sum \boldsymbol{p} = \text{const}$, найдем, что соотношение (4,5) представляет собой закон движения центра инерции

$$\boldsymbol{r}_c = \frac{\sum \boldsymbol{r} E}{\sum E}, \quad (4,6)$$

а именно: при отсутствии внешних сил центр инерции должен перемещаться с постоянной скоростью

$$\boldsymbol{v}_c = \frac{d\boldsymbol{r}_c}{dt} = \frac{c^2 \sum \boldsymbol{p}}{\sum E} = \text{const}. \quad (4,7)$$

Найдем теперь обобщение понятия момента количества движения на волновое поле.

С помощью формул (3,18) и (3,20) получаем для пространственных составляющих:

$$M_x = M_{23} = \int (x_2 g_3 - x_3 g_2)\, d^3x = \frac{i'}{c} \int (x_2 T_{34} - x_3 T_{24})\, d^3x \quad (4,8)$$

и т. д.

Введем понятие четырехмерной плотности момента количества движения поля, представляющей собой тензор третьего ранга, антисимметричный относительно двух значков:

$$M_{[\mu\nu]\lambda} = -M_{[\nu\mu]\lambda} = \frac{i'}{c}(x_\mu T_{\nu\lambda} - x_\nu T_{\mu\lambda}). \qquad (4,9)$$

Тогда для пространственных компонент имеем следующее выражение:

$$M_x = M_{23} = \int M_{[23]4}\, d^3x. \qquad (4,10)$$

Найдем условие, при котором выполняется закон сохранения для момента количества движения поля.

Для этого вычислим расходимость от тензора момента:

$$\frac{\partial M_{[\mu\nu]\lambda}}{\partial x_\lambda} = \frac{i'}{c}(T_{\nu\mu} - T_{\mu\nu}). \qquad (4,11)$$

Последнее равенство легко может быть проверено, если принять во внимание законы сохранения для тензора энергии

$$\frac{\partial T_{\nu\lambda}}{\partial x_\lambda} = 0,$$

а также соотношение

$$\frac{\partial x_\mu}{\partial x_\lambda} = \delta_{\mu\lambda}. \qquad (4,12)$$

Расходимость (4,11) будет исчезать, когда канонический тензор энергии является симметричным, или, иными словами, когда метрический и канонический тензоры совпадают друг с другом. Это имеет место, например, для скалярного поля.

При отсутствии симметрии канонического тензора $T_{\mu\nu}$ мы можем образовать с помощью антисимметрического тензора $f_{\mu[\nu\lambda]}$ [см. соотношение (3,12)] метрический тензор энергии $T'_{\mu\nu}$, который должен быть уже симметричным.

В этом случае соотношение (4,11) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\left[M_{[\mu\nu]\lambda} + \frac{i'}{c}(f_{\mu[\nu\lambda]} - f_{\nu[\mu\lambda]})\right] = 0. \qquad (4,13)$$

Тензор

$$S_{[\mu\nu]\lambda} = \frac{i'}{c}(f_{\mu[\nu\lambda]} - f_{\nu[\mu\lambda]}), \qquad (4,14)$$

который добавляется к плотности «орбитального» момента количества движения поля $M_{[\mu\nu]\lambda}$, носит название тензора плотности собственного, или «спинового», момента количества движения поля и характеризует поляризационные свойства поля, или спин сопоставленных полю частиц.

Терминология — «орбитальный» и «спиновый» момент количества движения поля — заимствована из теории движения электронов в атомах.

Пространственные компоненты для проекции спина равны

$$S_x = \int s_{[23]4}\, d^3x \text{ и т. д.} \tag{4,15}$$

Таким образом, отсутствие симметрии канонического тензора ($T_{\mu\nu} \neq T_{\nu\mu}$) ведет к выполнению закона сохранения лишь для суммарного (орбитальный плюс собственный) момента количества движения.

Для скалярного поля тензор $f_{\mu[\nu\lambda]}$ равен нулю, и поэтому мы можем утверждать, что спин скалярных частиц также равен нулю.

§ 5. Решение скалярного волнового уравнения

Скалярное волновое уравнение имеет вид

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - k_0^2\varphi = 0. \tag{5,1}$$

Существуют два способа решения уравнения (5,1).

При первом способе исследования мы не будем ограничивать положения частицы в пространстве. В этом случае решение уравнения (5,1) следует искать в виде интеграла Фурье:

$$\varphi = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int A(\boldsymbol{k}, t)\, e^{i\boldsymbol{kr}}\, d^3k, \tag{5,2}$$

где

$$\boldsymbol{kr} = k_x x + k_y y + k_z z, \quad d^3k = dk_x\, dk_y\, dk_z.$$

Подставляя (5,2) в выражение (5,1), получаем следующее дифференциальное уравнение для определения коэффициентов $A(\boldsymbol{k}, t)$:

$$\ddot{A}(\boldsymbol{k}, t) + c^2K^2A(\boldsymbol{k}, t) = 0,$$

где

$$K = \sqrt{k^2 + k_0^2}.$$

Отсюда находим:

$$A(\boldsymbol{k}, t) = A(\boldsymbol{k})\, e^{-icKt} + B(\boldsymbol{k})\, e^{icKt}.$$

Учитывая, что функция φ является вещественной, мы должны положить

$$B(\boldsymbol{k}) = A^+(-\boldsymbol{k}).$$

Поэтому общее решение для скалярного уравнения имеет вид

$$\varphi = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int [A(\boldsymbol{k})\, e^{-icKt+i\boldsymbol{kr}} + A^+(\boldsymbol{k})\, e^{icKt-i\boldsymbol{kr}}]\, d^3\boldsymbol{k}, \tag{5,3}$$

причем в последнем члене квадратных скобок мы заменили вектор $\boldsymbol{k}$ на $-\boldsymbol{k}$.

При втором способе исследования мы условно считаем частицу помещенной в пространство ограниченного объема L^3. В этом случае следует искать решение в виде ряда Фурье:

$$\varphi = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_k A_k(t)\, e^{ikr}.$$

Накладывая на волновую функцию φ условие периодичности $\varphi(x, y, z) = \varphi(x+L, y, z)$ и т. д., имеем дискретную последовательность для волнового вектора $\boldsymbol{k}$, так что

$$\boldsymbol{kr} = \frac{2\pi}{L}(n_x x + n_y y + n_z z), \tag{5,4}$$

где n_x, n_y, n_z являются целыми числами, принимающими любые положительные и отрицательные значения, включая нуль.

В этом случае разложение ведется по системе волновых функций $f(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{L^{3/2}} e^{ikr}$, обладающих периодом L и подчиняющихся условию ортонормированности:

$$\int f^*(\boldsymbol{k}')\, f(\boldsymbol{k})\, d^3x = \frac{1}{L^3}\int e^{ikr - ik'r}\, d^3x = \delta_{kk'} = \delta'_{n_1 n_1}\delta'_{n_2 n_2}\delta'_{n_3 n_3}. \tag{5,5}$$

Повторяя предыдущие рассуждения, мы можем решение уравнения (5,1) представить в виде

$$\varphi = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_k \left(A_k e^{-icKt + ikr} + A_k^{+} e^{icKt - ikr}\right). \tag{5,6}$$

Поскольку размеры объема L^3 мы можем выбрать сколь угодно большими, выражение (5,6) является общим решением волнового уравнения (5,1). Из условия, что решения (5,3) и (5,6) в предельном случае $L \to \infty$ должны совпадать друг с другом, найдем соотношение между коэффициентами A_k и $A(\boldsymbol{k})$.

Как видно из (5,4),

$$\Delta^3 k = \Delta k_x\, \Delta k_y\, \Delta k_z = \frac{8\pi^3}{L^3}. \tag{5,7}$$

Сравнивая равенство (5,3) с равенством (5,6), находим соотношение между амплитудами ряда (A_k) и интеграла Фурье [$A(\boldsymbol{k})$]:

$$\frac{\Delta^3 k}{(2\pi)^{3/2}} A(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{L^{3/2}} A_k = \sqrt{\frac{\Delta^3 k}{(2\pi)^3}}\, A_k,$$

откуда

$$|A_k|^2 = \Delta^3 k\, |A(\boldsymbol{k})|^2 = \frac{8\pi^3}{L^3} |A(\boldsymbol{k})|^2.$$

Заметим, что мы можем обратно амплитуды Фурье A_k выразить через волновые функции.

Умножая равенство (5,6) на $\frac{1}{L^{3/2}} e^{-ik'r} d^3x$ и интегрируя по всему пространству с учетом соотношения (5,5), имеем:

$$A_{k'} e^{-icK't} + A^{+}_{-k'} e^{icK't} = \frac{1}{L^{3/2}} \int \varphi e^{-ik'r} d^3x.$$

Дифференцируя равенство по t, мы получаем другое уравнение, связывающее амплитуды $A_{k'}$ и $A^{+}_{-k'}$:

$$A_{k'} e^{-icK't} - A^{+}_{-k'} e^{icK't} = \frac{i}{cK'} \frac{1}{L^{3/2}} \int \frac{\partial \varphi}{\partial t} e^{-ik'r} d^3x,$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} A_k e^{-icKt} &= \frac{1}{2L^{3/2}} \int \left(\varphi + \frac{i}{cK} \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) e^{-ikr} d^3x, \\ A_k^{+} e^{icKt} &= \frac{1}{2L^{3/2}} \int \left(\varphi - \frac{i}{cK} \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) e^{ikr} d^3x. \end{aligned}\right\} \qquad (5,8)$$

Для того чтобы определить физический смысл амплитуд A_k, мы вычислим полную энергию, или функцию Гамильтона, скалярного поля.

Как видно из равенств (3,19) и (3,20), функция Гамильтона скалярного поля определяется равенством

$$H = \frac{1}{8\pi} \int \left[(\nabla \varphi)^2 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2 + k_0^2 \varphi^2\right] d^3x. \qquad (5,9)$$

Подставляя сюда вместо φ разложение в ряд Фурье (5,6) и учитывая соотношение

$$\frac{1}{L^3} \sum_k \sum_{k'} \int M_k N_{k'} e^{ik'r} e^{ikr} d^3x = \sum_k M_k N_{-k}, \qquad (5,10)$$

найдем:

$$H = \sum_k \frac{K^2}{4\pi} \left(A_k^{+} A_k + A_k A_k^{+}\right). \qquad (5,11)$$

Как и следовало ожидать, временные члены в выражении для энергии, или функции Гамильтона, поля исчезают, так как согласно законам сохранения (3,17) выражение (5,11) должно оставаться постоянной величиной.

В классическом случае, когда амплитуды A_k и A_k^{+} являются числами и их можно переставлять между собою, выражение (5,11) принимает вид

$$H = \sum_k \frac{K^2}{2\pi} A_k^{+} A_k. \qquad (5,12)$$

Если мы в (5,9) подставили бы разложение φ в виде интеграла Фурье (5,3), то аналогичные преобразования привели бы нас к следующему выражению для H:

$$H = \int \frac{K^2}{2\pi} A^+ (\boldsymbol{k}) A (\boldsymbol{k}) \, d^3k. \tag{5,13}$$

Отсюда видно, что квадраты модуля амплитуд Фурье пропорциональны спектральной плотности излучения.

§ 6. Классические скобки Пуассона

Как известно, при исследовании движения системы материальных точек функция действия S связана с функцией Лагранжа L, зависящей от обобщенных координат q_i и скоростей $\dot{q}_i$, соотношением

$$S = \int L \, dt. \tag{6,1}$$

Вводя понятие импульса

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \tag{6,2}$$

мы можем написать скобки Пуассона для двух произвольных величин P и Q, зависящих от обобщенных координат q_i и импульсов p_i:

$$[P, Q] = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial P}{\partial p_i} \frac{\partial Q}{\partial q_i} - \frac{\partial P}{\partial q_i} \frac{\partial Q}{\partial p_i} \right), \tag{6,3}$$

где сумму следует брать по всем степеням свободы системы материальных точек.

В частности, полагая величины P и Q равными обобщенным координатам или импульсам, находим:

$$\left. \begin{aligned} &[q_n, q_{n'}] = [p_n, p_{n'}] = 0, \\ &[p_n, q_{n'}] = \delta_{nn'}. \end{aligned} \right\} \tag{6,4}$$

Отсюда ясно, что скобка Пуассона будет равна единице только для канонически сопряженных величин.

В частности, если одну величину положить равной координате $Q = q_n$, то в качестве канонически сопряженной величины следует выбрать соответствующий ей импульс $P = p_n$.

Заметим, что классические уравнения движения (канонические уравнения Гамильтона), которые являются следствием вариационного принципа, могут быть также представлены с помощью скобок Пуассона (6,3), а именно:

$$\dot{P} = [H, P] = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial P}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial P}{\partial p_i} \right), \tag{6,5}$$

где P зависит от p_i и q_i, а H является функцией Гамильтона.

Подставляя сюда вместо P вначале координату q_i, а затем импульс p_i, получаем канонические уравнения Гамильтона:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{6,6}$$

Классические скобки Пуассона могут быть применены также для исследования волновых полей. С этой целью удобно в качестве обобщенных координат q_k выбрать амплитуды разложения волновой функции φ в ряд Фурье

$$q_k = A_k(t) = A_k e^{icKt}. \tag{6,7}$$

Тогда, учитывая равенство (5,12):

$$H = \sum_k \frac{K^2}{2\pi} A_k^+(t) A_k(t), \tag{6,8}$$

находим значение для обобщенного импульса

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} = -\frac{K^2}{2\pi} A_k^+ e^{icKt}, \tag{6,9}$$

или

$$p_k = \frac{iK}{2\pi c} A_k^+ e^{icKt}. \tag{6,10}$$

Уравнение движения (6,5) может быть представлено в виде

$$\dot{P} = [H, P] = \sum_k \frac{2\pi c}{iK}\left(\frac{\partial H}{\partial A_k^+(t)}\frac{\partial P}{\partial A_k(t)} - \frac{\partial H}{\partial A_k(t)}\frac{\partial P}{\partial A_k^+(t)}\right). \tag{6,11}$$

Подставляя сюда вместо величины P амплитуды поля $A_k(t)$ и $A_k^+(t)$, получаем следующие соотношения[1]:

$$\left.\begin{aligned} \dot{A}_k(t) &= -icKA_k(t), \\ \dot{A}_k^+(t) &= icKA_k^+(t), \end{aligned}\right\} \tag{6,12}$$

которые являются прямым следствием равенства (6,7).

---

[1]) Вводя новые канонические переменные

$$P_k = \frac{Ki}{\sqrt{4\pi}}\left[A_k^+(t) - A_k(t)\right], \quad Q_k = \frac{1}{c\sqrt{4\pi}}\left[A_k^+(t) + A_k(t)\right],$$

мы приведем гамильтониан (6,8) к виду

$$H = \frac{1}{2}\sum_k \left(P_k^2 + c^2K^2Q_k^2\right). \tag{6,8a}$$

Таким образом, выбирая за независимые координаты амплитуды ряда Фурье (дискретный спектр[1])), мы сохраняем в теории поля основные соотношения системы материальных точек.

§ 7. Квантовые скобки Пуассона

Как известно, переход от классической теории к квантовой может быть совершен путем замены классических скобок Пуассона $[P, Q]$ квантовыми $\{P, Q\}$, определяемыми равенством

$$\{P, Q\} = \frac{i}{\hbar}(PQ - QP) = \frac{i}{\hbar}[P, Q]_-, \tag{7,1}$$

т. е. в квантовой теории величины P, Q рассматриваются как операторы, в общем случае не коммутирующие друг с другом.

Например, переходя от классической механики к квантовой, мы должны в простейшем случае одного измерения ($q = x$) вместо скобок (6,4) написать:

$$\left.\begin{aligned} \{x, x\} &= \{\mathrm{p}_x, \mathrm{p}_x\} = 0, \\ \{\mathrm{p}_x, x\} &= \frac{i}{\hbar}(\mathrm{p}_x x - x\mathrm{p}_x) = 1. \end{aligned}\right\} \tag{7,2}$$

Для того чтобы удовлетворить последнему соотношению, необходимо импульс представить в виде оператора

$$\mathrm{p}_x = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}, \tag{7,3}$$

причем справа мы должны поставить функцию ψ, на которую действует наш оператор. Тогда операторное соотношение (7,2) будет эквивалентно следующему:

$$\frac{i}{\hbar}(\mathrm{p}_x(x\psi) - x(\mathrm{p}_x\psi)) = \psi. \tag{7,4}$$

откуда с помощью канонических уравнений Гамильтона

$$\dot{P}_k = -\frac{\partial H}{\partial Q_k}, \quad \dot{Q}_k = \frac{\partial H}{\partial P_k}$$

найдем дифференциальное уравнение для определения обобщенных координат Q_k:

$$\ddot{Q}_k + c^2K^2Q_k = 0. \tag{6, 12a}$$

Из уравнений (6,8a) и (6,12a) видно, что свободное волновое поле до некоторой степени эквивалентно упругой среде, заполняющей полость, и, подобно ей, имеет дискретный спектр частот ($\omega = cK$), пока объем полости (L^3) остается конечным. Каждую из этих частот можно рассматривать как собственную частоту гармонического осциллятора. Таким образом, волновое поле приводится к бесконечному числу гармонических осцилляторов.

[1]) Обобщение классических скобок Пуассона на непрерывный спектр дано, например, в монографии «Классическая теория поля», стр. 350.

Замена классического импульса его квантовым значением [см. выражение (7,3)] приводит к волновому уравнению Шредингера, описывающему движение одной частицы.

Точно так же, для того чтобы сделать переход от классической теории поля к квантовой, мы должны заменить классические скобки Пуассона (6,3) квантовыми.

В частности, вместо классического уравнения движения (6,5) мы получаем уравнение[1])

$$\dot{P} = \{H, P\} = \frac{i}{\hbar}(HP - PH), \tag{7,5}$$

являющееся основой вторичного квантования.

Квантовая теория поля (или, как ее иначе называют, теория вторичного квантования) позволяет, с одной стороны, описывать волновые свойства частиц с учетом возможности их взаимного превращения, а с другой стороны, описывать взаимодействия между частицами как результат обмена квантами промежуточного поля. Более подробно на этом вопросе мы остановимся в гл. II[2]).

§ 8. Квантование скалярного уравнения

Как было показано в § 5, функция Гамильтона H связана с независимыми амплитудами Фурье соотношением

$$H = \sum_k \frac{K^2}{4\pi}\left[A_k^+(t)\,A_k(t) + A_k(t)\,A_k^+(t)\right], \tag{8,1}$$

откуда, переставляя местами амплитуды A и A^+, находим:

$$H = \sum_{k'} \frac{K'^2}{2\pi} A_{k'}^+(t)\,A_{k'}(t). \tag{8,2}$$

Подставляя последнее выражение в (7,5), получаем после сокращения временны́х множителей следующие уравнения[3]):

$$\left.\begin{aligned} -icKA_k &= \frac{i}{\hbar}(HA_k - A_kH), \\ icKA_k^+ &= \frac{i}{\hbar}\left(HA_k^+ - A_k^+H\right). \end{aligned}\right\} \tag{8,3}$$

---

[1]) W. Heisenberg und W. Pauli, Zs. f. Phys. **56**, 1 (1929); **59**, 168 (1930).

[2]) Заметим, что теорию вторичного квантования можно сформулировать с помощью так называемой теории «дырок» (более подробно см. § 23). Однако теория «дырок» годится лишь для описания фермиевских частиц и не может быть использована для квантования бозевского поля.

[3]) Квантование поля с помощью перестановочных соотношений (8,3) получило название вторичного квантования.

Происхождение этой терминологии связано со следующим обстоятельством. Заменяя в гамильтониане материальной точки классические скобки Пуассона квантовыми, мы должны вместо импульса p подставить опера-

Мы удовлетворим уравнению (8,3), если положим

$$A_{k'}^{+}A_{k'}A_k - A_kA_{k'}^{+}A_{k'} = -\frac{2\pi c\hbar}{K'}A_{k'}\delta_{kk'}. \tag{8,4}$$

Левую часть последнего соотношения можно преобразовать двояким образом:

1) $A_{k'}^{+}A_{k'}A_k - A_kA_{k'}^{+}A_{k'} = A_{k'}^{+}[A_{k'}, A_k]_{-} - [A_k, A_{k'}^{+}]_{-}A_{k'}$

или

2) $A_{k'}^{+}A_{k'}A_k - A_kA_{k'}^{+}A_{k'} = A_{k'}^{+}[A_{k'}, A_k]_{+} - [A_k, A_{k'}^{+}]_{+}A_{k'}$,

где $[a, b]_{-} = ab - ba$; $[a, b]_{+} = ab + ba$.

Отсюда видно, что уравнение (8,4) имеет следующие два решения:

$$1)\ [A_{k'}, A_k]_{-} = [A_k^{+}, A_{k'}^{+}]_{-} = 0; \quad [A_k, A_{k'}^{+}]_{-} = \frac{2\pi c\hbar}{K}\delta_{kk'}, \tag{8,5}$$

$$2)\ [A_{k'}, A_k]_{+} = [A_{k'}^{+}, A_k^{+}]_{+} = 0; \quad [A_k, A_{k'}^{+}]_{+} = \frac{2\pi c\hbar}{K}\delta_{kk'}. \tag{8,6}$$

Таким образом, классические амплитуды A_k (т. е. c-числа) в результате вторичного квантования становятся операторами (т. е. q-числами), не коммутирующими друг с другом.

Как будет показано ниже, первое решение соответствует статистике Бозе и пригодно для частиц с целочисленным спином (например, для скалярных частиц). Второе решение соответствует статистике Ферми и пригодно для частиц, обладающих полуцелым спином (например, для электронов).

Легко показать, что в нашем случае второе решение должно быть отброшено. В самом деле, амплитуды A_k^{+} и A_k не коммутируют

тор $\frac{\hbar}{i}\nabla$ [см. соотношение (7,3)]. В результате получаем волновое уравнение, которое является следствием первого квантования.

Подчиняя далее амплитуды волновой функции перестановочным соотношениям (8,3), т. е. заменяя волновую функцию оператором (см. ниже), мы фактически производим вторичное квантование уравнения движения.

Как известно, волновые уравнения Максвелла являются классическими, и поэтому термин «вторичное квантование уравнений Максвелла» носит до некоторой степени условный характер и сводится к квантованию классического волнового уравнения.

Если обычное волновое уравнение Шредингера описывает движения неизменного числа частиц (например, одной), то вторично квантованное релятивистское уравнение является уравнением переменного числа частиц и может описывать как появление, так и поглощение любых частиц. Мы можем пренебречь явлениями, связанными с появлением и поглощением частиц, когда сумма кинетической и потенциальной энергии меньше собственной энергии m_0c^2 частицы (например, нерелятивистский случай). Поскольку для фотонов масса покоя равна нулю ($m_0 = 0$), нерелятивистской квантовой теории электромагнитного поля (подобно нерелятивистскому волновому уравнению Шредингера) не существует. При больших $h\nu$ мы должны пользоваться законами квантовой электродинамики, которые с уменьшением $h\nu$ переходят непосредственно в законы классической теории излучения.

между собою, и поэтому перестановочные соотношения должны быть согласованы с первоначальной формой гамильтониана (8,1).

Воспользовавшись перестановочными соотношениями (8,5) и (8,6), мы можем гамильтониан (8,1) привести к виду:

1) для бозевских частиц

$$H = \sum_k \left(\frac{K^2}{2\pi} A_k^+ A_k + \frac{c\hbar K}{2} \right), \tag{8,7}$$

2) для фермиевских частиц

$$H = \sum_k \frac{c\hbar K}{2}. \tag{8,8}$$

Выражение для гамильтониана (8,7) находится в полном согласии с перестановочными соотношениями (8,5). В формулу же (8,8) вообще не входят амплитуды, и поэтому никаких перестановочных соотношений с помощью ее получить нельзя. Таким образом, фермиевское решение (8,6) должно быть в данном случае отброшено[1]).

Для того чтобы удовлетворить равенству (8,5), следует предположить, что амплитуды A_k носят операторный характер.

Введем новые амплитуды[2]) a и a' с помощью формул

$$A_k = \sqrt{\frac{2\pi c\hbar}{K}}\, a, \quad A_{k'}^+ = \sqrt{\frac{2\pi c\hbar}{K'}}\, a'^+.$$

Эти амплитуды должны подчиняться перестановочным соотношениям

$$[a, a']_- = [a^+, a'^+]_- = 0, \quad [a, a'^+]_- = \delta_{kk'}. \tag{8,10}$$

Для того чтобы удовлетворить этим перестановочным соотношениям, мы должны потребовать, чтобы операторы a и a^+ действовали на функцию числа частиц N_k с импульсом $\hbar\boldsymbol{k}$ следующим образом[3]):

$$a^+ f(N) = \sqrt{N} f(N-1), \tag{8,11}$$

$$a f(N) = \sqrt{N+1} f(N+1). \tag{8,12}$$

---

[1]) Мы должны были бы, наоборот, сохранить фермиевское решение, если гамильтониан имел бы вид:

$$H = \sum_k \frac{K^2}{4\pi} \left(A_k^+ A_k - A_k A_k^+ \right). \tag{8,9}$$

Более подробно на этом вопросе мы остановимся в § 23.

[2]) Для сокращения векторы $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{k}'$ у амплитуд писать не будем, а последние будем записывать в следующем виде:

$$a = a_{\boldsymbol{k}}, \quad a' = a_{k'}.$$

[3]) P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. (A) 114, 243 (1927); P. Jordan und O. Klein, Zs. f. Phys. 45, 751 (1927).

Отсюда находим конкретный вид искомых операторов:

$$\left.\begin{aligned} a^+ &= \sqrt{N} e^{-\frac{\partial}{\partial N}} = e^{-\frac{\partial}{\partial N}} \sqrt{N+1}, \\ a &= \sqrt{N+1} e^{\frac{\partial}{\partial N}} = e^{\frac{\partial}{\partial N}} \sqrt{N}. \end{aligned}\right\} \tag{8,13}$$

Последние равенства легко проверить, если раскрыть действие оператора, стоящего в показателе:

$$e^{\pm \frac{\partial}{\partial x}} f(x) = \left(1 \pm \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial x^2} \pm \frac{1}{3!}\frac{\partial^3}{\partial x^3} + \ldots\right) f(x) = f(x \pm 1). \tag{8,14}$$

Из равенства (8,13) легко получить операторные соотношения, находящиеся в полном согласии с равенством (8,10):

$$a^+ a = \sqrt{N} e^{-\frac{\partial}{\partial N}} e^{\frac{\partial}{\partial N}} \sqrt{N} = N;$$

$$aa^+ = 1 + N; \quad aa^+ - a^+ a = 1.$$

Функция числа частиц $f(N)$ может быть представлена в виде сложной матрицы, зависящей от начального числа частиц N^0 и от числа частиц N в конечном состоянии:

$$f(N) = \prod_{k'} \delta_{N_{k'}, N^0_{k'}}. \tag{8,15}$$

Произведение (8,15) является тройным произведением и берется по всем возможным значениям составляющих волнового вектора $\boldsymbol{k}'$ $(-\infty < k'_x, k'_y, k'_z < \infty)$.

Как видно из (8,15), матрица f обладает единственным матричным элементом, отличным от нуля, для которого все $N_{k'}$ равны начальному числу частиц $N^0_{k'}$. Соответствующий матричный элемент обращается в единицу:

$$f(N) = \prod_{k'} \delta_{N_{k'}, N^0_{k'}} = 1. \tag{8,16}$$

Если в начальный момент частицы отсутствуют $(N^0_{k'} = 0)$, то функция (8,15) будет иметь вид

$$f(N) = \prod_{k'} \delta_{N_{k'}, 0}. \tag{8,17}$$

Подействуем на функцию (8,15) оператором a^+. Тогда согласно (8,11) найдем:

$$a^+ f(N) = \sqrt{N_k} \delta_{N_k - 1, N^0_k} \prod_{k'}{}' \delta_{N_{k'}, N^0_{k'}}, \tag{8,18}$$

причем штрих у знака произведения $\prod$ указывает на то, что в произведении отсутствует один множитель $(\boldsymbol{k}' = \boldsymbol{k})$.

Как видно из (8,18), единственным матричным элементом, отличным от нуля, будет матричный элемент, для которого

$$\left.\begin{aligned} N_{k'} &= N_{k'}^0 \qquad (k \neq k'), \\ N_k &= N_k^0 + 1. \end{aligned}\right\} \tag{8,19}$$

Абсолютное значение этого матричного элемента равно

$$a_k^+ f(N) = \sqrt{N_k^0 + 1}. \tag{8,20}$$

Таким образом, оператор a_k^+ является оператором появления частиц.

Если в начальный момент частицы отсутствуют ($N_{k'}^0 = 0$), и мы подействуем на функцию f несколько раз (n раз) оператором a^+, то в конечном состоянии ($N_{k'} = 0$ ($k' \neq k$), $N_k = n$) мы будем иметь отличный от нуля матричный элемент, пропорциональный

$$(a_k^+)^n \to \sqrt{n!}.$$

Отсюда следует, что в каждом квантовом состоянии может находиться любое число частиц. Иными словами, перестановочные соотношения (8,5) характерны для бозевской статистики.

Подействуем теперь на функцию (8,15) оператором a_k. Согласно равенству (8,12) будем иметь в этом случае для матричных элементов [1]):

$$a_k f(N) = \sqrt{N_k + 1}\, \delta_{N_k+1,\, N_k^0} \prod_{k'}{}' \delta_{N_{k'},\, N_{k'}^0}. \tag{8,21}$$

---

[1]) Из формулы (8,15) видно, что функция числа частиц $f(N)$ разбивается на произведение функций δ_{NN^0}, каждая из которых характеризует число частиц, обладающих импульсом $\hbar k$. Придавая числам N и N^0 различные значения, мы можем функцию δ_{NN}, представить в виде бесконечной единичной матрицы:

$$(\delta_{NN^0}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & & & & \end{pmatrix}.$$

Тогда, учитывая формулы (8,18) и (8,21), мы имеем для операторов:

$$a^+ = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{4} & 0 & \dots \\ \dots & & & & & \end{Vmatrix}, \quad a = \begin{Vmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{4} & \dots \\ \dots & & & & & \end{Vmatrix},$$

Отличным от нуля будет матричный элемент, для которого

$$N_{k'} = N_{k'}^0 \quad (k' \neq k), \qquad N_k = N_k^0 - 1.$$

Абсолютное его значение будет равно

$$a_k f(N) = \sqrt{N_k^0}, \tag{8,22}$$

т. е. оператор a_k является оператором поглощения частиц.

Если в начальный момент частицы отсутствуют ($N_k^0 = 0$), то единственный отличный от нуля матричный элемент (8,22) также обращается в нуль, т. е., как и следовало ожидать, отрицательного числа частиц существовать не может. Поэтому при отсутствии частиц в начальный момент мы можем упростить перестановочные соотношения (8,6), положив

$$a_k^+ a_{k'} = 0.$$

Тогда отличными от нуля могут быть лишь члены, содержащие произведение

$$a_k a_{k'}^+ = \delta_{kk'}. \tag{8,23}$$

Найдем теперь собственные значения операторов $a_k^+ a_k$ и $a_k a_k^+$.

Для этого на функцию (8,21) подействуем оператором a_k^+, а на функцию (8,18) — оператором a_k.

Тогда, принимая во внимание равенства (8,11) и (8,12), получаем:

$$\left.\begin{aligned} a_k^+ a_k \prod_{k'} \delta_{N_{k'}, N_{k'}^0} &= N_k^0 \prod_{k'} \delta_{N_{k'}, N_{k'}^0}, \\ a_k a_k^+ \prod_{k'} \delta_{N_{k'}, N_{k'}^0} &= (1 + N_k^0) \prod_{k'} \delta_{N_{k'}, N_{k'}^0}, \end{aligned}\right\} \tag{8,24}$$

откуда следует:

$$aa^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 3 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 4 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \qquad a^+a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$

т. е., в согласии с основным правилом квантования (8,10):

$$aa^+ - a^+a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

т. е. собственные значения искомых операторов равны

$$\left.\begin{aligned} a_k^+ a_k &= N_k^0, \\ a_k a_k^+ &= 1 + N_k^0. \end{aligned}\right\} \qquad (8,25)$$

Подставляя эти значения в равенство (8,1) и принимая во внимание соотношения (8,5), найдем следующее выражение для собственного значения оператора энергии:

$$H = \sum_k \hbar c K \left(N_k^0 + \frac{1}{2}\right). \qquad (8,26)$$

Предполагая, что частицы отсутствуют ($N_k^0 = 0$), получим значение для нулевой энергии:

$$H_0 = \frac{1}{2} \sum_k \hbar c K. \qquad (8,27)$$

Нулевая энергия H_0 бесконечна, так как сумма (8,27) расходится.

Нулевая энергия может быть также найдена с помощью следующих простых соображений. Согласно соотношениям (6,7) и (6,9) вторичное квантование волнового уравнения мы можем свести к сумме бесконечно большого числа гармонических осцилляторов.

Из квантовой механики известно, что энергия гармонического осциллятора частоты ν определяется выражением

$$E_n = h\nu\left(n + \frac{1}{2}\right),$$

где $n = 0, 1, 2, \ldots$

Нулевая, т. е. наименьшая энергия гармонического осциллятора, равна

$$E_{0k} = h\nu \frac{1}{2} = \frac{1}{2} c\hbar K,$$

откуда, суммируя по всевозможным состояниям поля, находим общую нулевую энергию бесконечного числа осцилляторов

$$H_0 = \sum_k E_{0k} = \sum_k \frac{1}{2} c\hbar K,$$

совпадающую с выражением (8,27).

Наличие бесконечной нулевой энергии, бесспорно, является большим дефектом квантовой электродинамики и, к сожалению, появляется не только при вычислении энергии поля. В данном конкретном примере эта бесконечность не представляет особых трудностей. В самом деле, задавая энергию системы, мы всегда можем выбрать произвольно аддитивную постоянную. Сделав определенную перенормировку шкалы энергии таким образом, чтобы

энергия одного осциллятора отсчитывалась не от обычного нуля, а от энергии E_{0k}, мы сможем отбросить бесконечную нулевую энергию. Поэтому в дальнейшем при квантовании других полей мы также будем отбрасывать бесконечную нулевую энергию. Что касается других бесконечных членов, которые появляются, например, при исследовании собственной массы частицы, то на их анализе мы остановимся в § 44.

Аналогичным путем вычислим импульс поля, для которого согласно (3,18) и (3,20) имеем:

$$\boldsymbol{G} = -\frac{1}{4\pi c^2}\int \frac{\partial\varphi}{\partial t}\,\mathrm{grad}\,\varphi\, d^3x. \tag{8,28}$$

Принимая во внимание, что волновая функция φ связана с операторами числа частиц a^+ и a соотношением

$$\varphi = \frac{1}{L^{3/2}}\sum_{\boldsymbol{k}}\sqrt{\frac{2\pi c\hbar}{K}}\left(a_{\boldsymbol{k}}e^{-icKt+i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}} + a_{\boldsymbol{k}}^{+}e^{icKt-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}\right), \tag{8,29}$$

найдем с помощью (5,10):

$$\boldsymbol{G} = \sum_{\boldsymbol{k}}\frac{\hbar\boldsymbol{k}}{2}\left(a_{\boldsymbol{k}}a_{\boldsymbol{k}}^{+} + a_{\boldsymbol{k}}^{+}a_{\boldsymbol{k}}\right),$$

откуда, учитывая собственные значения операторов aa^+ и a^+a, получим:

$$\boldsymbol{G} = \sum_{\boldsymbol{k}}\hbar\boldsymbol{k}\left(N_{\boldsymbol{k}}^{0} + \frac{1}{2}\right). \tag{8,30}$$

Нетрудно видеть, что суммарный импульс нулевых состояний исчезает:

$$\boldsymbol{G}_0 = \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k}}\hbar\boldsymbol{k} = 0.$$

Поэтому окончательно можем написать:

$$\boldsymbol{G} = \sum_{\boldsymbol{k}}\hbar\boldsymbol{k}N_{\boldsymbol{k}}^{0}. \tag{8,31}$$

С точки зрения корпускулярного истолкования последняя формула соответствует наличию $N_{\boldsymbol{k}}^{0}$ частиц с импульсом $\hbar\boldsymbol{k}$, что вполне согласуется с выражением (8,26), определяющим связь полной энергии с числом частиц.

§ 9. Перестановочные соотношения для волновых функций

Зная перестановочные соотношения для амплитуд Фурье, мы легко можем найти также перестановочные соотношения для волновых функций.

Для этой цели напишем следующие равенства:

$$\left.\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{r}, t) &= \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\boldsymbol{k}} \sqrt{\frac{2\pi c\hbar}{K}} \left(a_{\boldsymbol{k}} e^{-icKt + i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}} + a_{\boldsymbol{k}}^{+} e^{icKt - i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}\right),\\ \varphi(\boldsymbol{r}', t') &= \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\boldsymbol{k}'} \sqrt{\frac{2\pi c\hbar}{K'}} \left(a_{\boldsymbol{k}'} e^{-icK't' + i\boldsymbol{k}'\boldsymbol{r}'} + a_{\boldsymbol{k}'}^{+} e^{icK't' - i\boldsymbol{k}'\boldsymbol{r}'}\right).\end{aligned}\right\} \quad (9,1)$$

Отсюда имеем:

$$\begin{aligned}[\varphi(\boldsymbol{r}, t),\ \varphi(\boldsymbol{r}', t')]_{-} &= \varphi(\boldsymbol{r}, t)\varphi(\boldsymbol{r}', t') - \varphi(\boldsymbol{r}', t')\varphi(\boldsymbol{r}, t) = \\ &= \frac{1}{L^3} \sum_{\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}'} \frac{2\pi c\hbar}{\sqrt{KK'}} \left([a_{\boldsymbol{k}}, a_{\boldsymbol{k}'}^{+}]_{-}\, e^{-ic(Kt - K't') + i(\boldsymbol{k}\boldsymbol{r} - \boldsymbol{k}'\boldsymbol{r}')} + \right.\\ &\qquad\qquad \left. + [a_{\boldsymbol{k}}^{+}, a_{\boldsymbol{k}'}]_{-}\, e^{ic(Kt - K't') - i(\boldsymbol{k}\boldsymbol{r} - \boldsymbol{k}'\boldsymbol{r}')}\right).\end{aligned}$$

Здесь мы положили перестановочные соотношения между амплитудами $a_{\boldsymbol{k}}$ и $a_{\boldsymbol{k}'}$ (а также $a_{\boldsymbol{k}}^{+}$ и $a_{\boldsymbol{k}'}^{+}$) равными нулю.

Учитывая соотношения (8,10), найдем после суммирования по $\boldsymbol{k}'$

$$[\varphi(\boldsymbol{r}, t),\ \varphi(\boldsymbol{r}', t')]_{-} = \frac{1}{L^3} \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{4\pi c\hbar}{i} e^{i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')} \frac{\sin cK(t - t')}{K}. \quad (9,2)$$

Сделаем переход к интегралу Фурье с помощью формулы (5,7)

$$\frac{1}{L^3} = \frac{\Delta^3 k}{8\pi^3}. \quad (9,3)$$

Подставляя (9,3) в (9,2) и совершая затем переход к пределу $L \to \infty$ $(\Delta^3 k \to d^3 k)$, получаем:

$$[\varphi(\boldsymbol{r}, t),\ \varphi(\boldsymbol{r}', t')]_{-} = \frac{4\pi c\hbar}{i} D(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}', t - t'), \quad (9,4)$$

где так называемая перестановочная D-функция определяется формулой [1])

$$D(\boldsymbol{R}, T) = \frac{1}{8\pi^3} \int e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{R}} \frac{\sin cKT}{K} d^3 k. \quad (9,5)$$

Как известно, D-функция является первым релятивистски инвариантным решением скалярного уравнения (2,3), в чем нетрудно убедиться, подставляя непосредственно в скалярное уравнение решение (9,5).

Второе релятивистски инвариантное решение имеет вид

$$D_1(\boldsymbol{R}, T) = \frac{1}{8\pi^3} \int e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{R}} \frac{\cos cKT}{K} d^3 k. \quad (9,6)$$

---

[1]) Более подробно о перестановочной функции см. «Классическая теория поля», стр. 101.

Из четырехмерных перестановочных соотношений легко получить также трехмерные перестановочные соотношения, устанавливающие связь между волновыми функциями $\varphi(r, t)$ и плотностью импульсов [см. соотношение (6,2)]:

$$p(r', t) = \frac{1}{4\pi c^2} \frac{\partial\varphi(r', t)}{\partial t},$$

которые могут относиться к различным точкам пространства, но содержат одно и то же значение времени t. С помощью равенств (9,4) и (9,5) находим:

$$\left.\begin{aligned}
&[\varphi(r, t), \varphi(r', t)]_- = \frac{4\pi c\hbar}{i} D(r - r', 0) = 0,\\
&[p(r, t), p(r', t)]_- = \frac{\hbar}{4\pi i c^3}\left\{\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial t'} D(r - r', t - t')\right\}_{t'\to t} = 0,\\
&[p(r, t), \varphi(r', t)]_- = \frac{\hbar}{ic}\left\{\frac{\partial}{\partial t} D(r - r', t - t')\right\}_{t'\to t} = \frac{\hbar}{i}\delta(r - r'),
\end{aligned}\right\} \quad (9,7)$$

причем трехмерная δ-функция задается формулой

$$\delta(R) = \frac{1}{8\pi^3}\int e^{ikR}\, d^3k. \quad (9,8)$$

Как видно из формул (9,1), в квантовой теории поля волновая функция φ, так же как и амплитуды Фурье поля, должна быть оператором.

В заключение покажем, что уравнение движения для волновой функции φ, т. е. скалярное уравнение (2,3), может быть получено из квантового уравнения движения (7,5), если вместо переменной P подставить плотность импульса поля $p(r, t)$.

Тогда, учитывая выражение для функции Гамильтона (5,9), получим:

$$\frac{\partial p(r, t)}{\partial t} = \frac{i}{8\pi\hbar}\int \left\{[(\nabla'\varphi(r', t))^2, p(r, t)]_- + k_0^2[(\varphi(r', t))^2, p(r, t)]_-\right\} d^3x', \quad (9,9)$$

где

$$\nabla'_x = \frac{\partial}{\partial x'}.$$

Воспользуемся, далее, следующими двумя тождественными соотношениями:

$$\left.\begin{aligned}
&[\varphi^2(r', t), p(r, t)]_- = -\varphi[p, \varphi]_- - [p, \varphi]_-\varphi =\\
&\qquad = -2\varphi(r', t)\frac{\hbar}{i}\delta(r' - r),\\
&[(\nabla'\varphi(r', t))^2, p(r, t)]_- = -\nabla'_n\varphi\nabla'_n[p, \varphi]_- - (\nabla'_n[p, \varphi]_-)\nabla'_n\varphi =\\
&\qquad = -2\nabla'_n\varphi(r', t)\frac{\hbar}{i}\nabla'_n\delta(r - r').
\end{aligned}\right\} \quad (9,10)$$

Подставляя (9,10) в (9,9) и учитывая правила интегрирования при наличии под знаком интеграла трехмерной δ-функции[1]), получим искомое скалярное волновое уравнение

$$\frac{1}{4\pi c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\frac{1}{4\pi}\nabla^2\varphi-\frac{k_0^2}{4\pi}\varphi. \tag{9,11}$$

С помощью аналогичных рассуждений легко показать, что, подставляя в квантовое уравнение движения вместо переменной P волновую функцию $\varphi(r,\ t)$, мы получим второе тождественное соотношение, связывающее между собою плотность импульса p с волновой функцией φ:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=4\pi c^2 p.$$

Таким образом, замена классических скобок Пуассона квантовыми ведет к обобщению ряда соотношений классической теории поля на квантовый случай.

§ 10. Комплексное скалярное уравнение

Теория комплексного скалярного поля строится с помощью двух независимых функций: основной φ и комплексно-сопряженной ей φ^+, удовлетворяющих в случае свободного поля одному и тому же уравнению

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-k_0^2\right)\varphi=0. \tag{10,1}$$

Варьируя лагранжиан скалярного поля с комплексными волновыми функциями

$$L=-\frac{1}{4\pi}(\varphi_\alpha^+\varphi_\alpha+k_0^2\varphi^+\varphi) \tag{10,2}$$

по координате φ^+:

$$\frac{\delta L}{\delta\varphi^+}=\frac{\partial L}{\partial\varphi^+}-\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{\partial L}{\partial\varphi_\alpha^+}=0, \tag{10,3}$$

получаем уравнение (10,1) для волновой функции φ.

Точно так же варьирование по φ дает нам аналогичное волновое уравнение для φ^+.

Для канонического тензора энергии мы будем иметь выражение

$$T_{\mu\nu}=-\frac{1}{4\pi}(\varphi_\mu^+\varphi_\nu+\varphi_\nu^+\varphi_\mu)-L\delta_{\mu\nu}. \tag{10,4}$$

Поскольку канонический тензор является симметричным, то, очевидно, он будет равен метрическому тензору энергии, т. е. спин сопоставленных полю частиц должен быть равен нулю.

---

[1]) Более подробно о δ-функции см. «Классическая теория поля», стр. 30.

Для плотности энергии и плотности импульса находим выражения:

$$\left.\begin{aligned} u = T_{44} &= \frac{1}{4\pi}\left[(\nabla\varphi^+\nabla\varphi) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi^+}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + k_0^2\varphi^+\varphi\right], \\ g_n = \frac{i'}{c}T_{n4} &= -\frac{1}{4\pi c^2}\left(\frac{\partial\varphi^+}{\partial x_n}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi^+}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right). \end{aligned}\right\} \quad (10,5)$$

В отличие от вещественного скалярного поля комплексное поле может описывать поведение заряженных частиц (например, заряженных мезонов).

Как обычно, взаимодействие заряженных частиц (например, электронов) с электромагнитным полем описывается путем замены компоненты импульса p_μ на обобщенный импульс [1])

$$P_\mu = p_\mu - \frac{e^-}{c}A_\mu = p_\mu + \frac{e}{c}A_\mu, \quad (10,6)$$

т. е. путем замены $\dfrac{\partial}{\partial x_\mu}$ на

$$\hat{\nabla}_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \frac{i}{\hbar}\frac{e}{c}A_\mu, \quad (10,7)$$

где A_μ — четырехмерный потенциал электромагнитного поля.

Поэтому в общем случае лагранжиан имеет вид

$$L = -\frac{1}{4\pi}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - \frac{ie}{\hbar c}A_\mu\right)\varphi^+\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + \frac{ie}{\hbar c}A_\mu\right)\varphi + k_0^2\varphi^+\varphi\right\}. \quad (10,8)$$

Отсюда с помощью уравнения (10,3) получаем уравнение для волновых функций в электромагнитном поле, а также тензор энергии и все другие основные величины, характеризующие теорию.

В частности, волновая функция φ будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\delta L}{\delta\varphi^+} = -\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial L}{\partial\varphi^+_\mu} + \frac{\partial L}{\partial\varphi^+} = \frac{1}{4\pi}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + \frac{ie}{\hbar c}A_\mu\right)^2 - k_0^2\right]\varphi = 0. \quad (10,9)$$

Заметим, что, несмотря на явное включение электромагнитных потенциалов, уравнения поля являются инвариантными относительно преобразования калибровки.

В самом деле, при калибровочных преобразованиях потенциалы изменяются по закону:

$$A_\mu = A'_\mu - \frac{\partial f}{\partial x_\mu},$$

где f — калибровочная функция.

---

[1]) Под величиной e мы будем понимать положительную величину; тогда заряд электрона e^- будет равен $-e$.

Полагая $\varphi = \varphi' e^{\frac{ie}{\hbar c} f}$, находим:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + \frac{ie}{\hbar c} A_\mu\right)\varphi = e^{\frac{ie}{\hbar c} f}\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + \frac{ie}{\hbar c} A'_\mu\right)\varphi'.$$

Отсюда легко показать, что функция φ' будет удовлетворять волновому уравнению (10,9), в котором следует заменить потенциалы A_μ на потенциалы A'_μ.

Комплексно-сопряженная волновая функция будет удовлетворять комплексно-сопряженному уравнению

$$\frac{\delta L}{\delta \varphi} = \frac{1}{4\pi}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - \frac{ie}{\hbar c} A_\mu\right)^2 - k_0^2\right]\varphi^+ = 0. \qquad (10,10)$$

Как известно, заряженные частицы являются источником электромагнитного поля, и поэтому соответствующие значения для плотности заряда и плотности тока необходимо включить в правые части уравнений Максвелла — Лоренца.

Так как уравнения Максвелла — Лоренца получаются путем вариации лагранжиана по электромагнитным потенциалам, то вариация лагранжиана (10,8) по потенциалам должна дать четырехмерный вектор плотности тока:

$$j_\mu = \frac{\delta L}{\delta A_\mu} = -\frac{ie}{4\pi\hbar c}\left(\frac{\partial \varphi^+}{\partial x_\mu}\varphi - \varphi^+ \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}\right) - \frac{e^2}{2\pi\hbar^2 c^2}\varphi^+\varphi A_\mu,$$

или, при отсутствии электромагнитного поля,

$$j_\mu = -\frac{ie}{4\pi\hbar c}\left(\frac{\partial \varphi^+}{\partial x_\mu}\varphi - \varphi^+ \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}\right). \qquad (10,11)$$

Отсюда видно, что для вещественного поля ($\varphi^+ = \varphi$) плотности заряда и тока обращаются в нуль, и поэтому, как было указано выше, подобное поле описывает поведение лишь нейтральных частиц [1]).

Согласно (10,11) находим для плотности заряда $\rho = \frac{j_4}{i}$ выражение

$$\rho = -\frac{ie}{4\pi\hbar c^2}\left(\varphi^+ \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial \varphi^+}{\partial t}\varphi\right). \qquad (10,12)$$

Заметим, что выражение для плотности ρ является индефинитным (т. е. может принимать как положительные, так и отрицательные

---

[1]) Если уравнения с вещественными функциями должны всегда описывать движение нейтральных частиц, то уравнения с комплексными функциями могут описывать движение как заряженных, так и нейтральных частиц ($e = 0$).

значения), в противоположность нерелятивистскому выражению для плотности заряда [1])

$$\rho = -e\psi^+\psi, \tag{10,13}$$

могущему иметь лишь отрицательные значения (электроны).

Если в нерелятивистской волновой механике плотность $\psi^+\psi$ можно трактовать как плотность вероятности, то в релятивистском случае скалярного уравнения величина ρ не может быть истолкована как плотность вероятности, поскольку в ряде случаев она принимает отрицательные значения. Физический смысл индефинитности выражения для плотности заряда может быть понят только при использовании метода вторичного квантования, согласно которому наряду с частицами одного заряда должны существовать также частицы с противоположными зарядами.

Закон сохранения четырехмерного тока в трехмерных обозначениях ($\rho = j_4/i'$; $\boldsymbol{j} = j_{1,2,3}$) принимает вид хорошо известного из классической электродинамики уравнения непрерывности

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\boldsymbol{j} = 0. \tag{10,14}$$

Умножая последнее уравнение на элемент объема d^3x и интегрируя по всему пространству, найдем:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \rho\, d^3x = -\oint j_n\, dS.$$

В частности, когда токи в бесконечно удаленных точках пространства отсутствуют, уравнение непрерывности приводит к закону сохранения заряда:

$$\int \rho\, d^3x = \text{const}. \tag{10,15}$$

§ 11. Квантование комплексного скалярного уравнения [2])

В этом параграфе мы ограничимся исследованием свободного поля, когда электромагнитные потенциалы мы можем положить равными нулю ($A_\mu = 0$).

Тогда решение уравнений

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - k_0^2\right)\varphi = 0, \quad \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - k_0^2\right)\varphi^+ = 0 \tag{11,1}$$

---

[1]) Соотношение (10,13) является нерелятивистским приближением формулы (10,12), если в последней сделать замену

$$\varphi \cong \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{m_0}}\, e^{-\frac{i}{\hbar}m_0c^2t}\,\psi, \quad \varphi^+ \cong \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{m_0}}\, e^{\frac{i}{\hbar}m_0c^2t}\,\psi^+.$$

[2]) W. Pauli und V. Weisskopf, Helv. phys. acta, 7, 709 (1934).

может быть представлено в виде

$$\left.\begin{aligned}\varphi &= \frac{1}{L^{3/2}}\sum_k \left(A_k e^{-icKt+ikr} + B^k e^{icKt+ikr}\right),\\ \varphi^+ &= \frac{1}{L^{3/2}}\sum_k \left(A_k^+ e^{icKt-ikr} + B_k^+ e^{-icKt-ikr}\right).\end{aligned}\right\} \tag{11,2}$$

Для дальнейшего анализа введем следующие обозначения:

$$A_k = \sqrt{\frac{2\pi c\hbar}{K}}\, a; \qquad B_{-k} = \sqrt{\frac{2\pi c\hbar}{K}}\, b^+ \text{ и т. д.},$$

причем, так же как и в случае вещественного поля, значков k у амплитуд a и b^+ мы писать не будем. Мы приписываем значок сопряженной величины амплитудам, стоящим у множителя e^{icKt}.

Решение (11,2) принимает тогда вид

$$\left.\begin{aligned}\varphi &= \frac{1}{L^{3/2}}\sum_k \sqrt{\frac{2\pi c\hbar}{K}} \left(a e^{-icKt+ikr} + b^+ e^{icKt-ikr}\right),\\ \varphi^+ &= \frac{1}{L^{3/2}}\sum_k \sqrt{\frac{2\pi c\hbar}{K}} \left(a^+ e^{icKt-ikr} + b e^{-icKt+ikr}\right).\end{aligned}\right\} \tag{11,3}$$

При этом мы будем иметь следующие выражения для полной энергии, или функции Гамильтона:

$$H = \int u\, d^3x = \frac{1}{4\pi}\int \left[(\nabla\varphi^+\nabla\varphi) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi^+}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + k_0^2\varphi^+\varphi\right] d^3x,$$

для полного импульса:

$$G = \int g\, d^3x = -\frac{1}{4\pi c^2}\int \left(\nabla\varphi^+\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi^+}{\partial t}\nabla\varphi\right) d^3x,$$

и для полного заряда:

$$e_{\text{полн}} = \int \rho\, d^3x = -\frac{ie}{4\pi c^2\hbar}\int \left(\varphi^+\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\partial\varphi^+}{\partial t}\varphi\right) d^3x.$$

В последних равенствах, учитывая возможную некоммутативность функций φ^+ и φ, мы всюду функцию φ^+ пишем слева.

Подставляя сюда решения (11,3) и принимая во внимание равенства (5,10), получаем:

$$\left.\begin{aligned}H &= \sum_k \hbar c K (a^+a + bb^+),\\ G &= \sum_k \hbar \boldsymbol{k} (a^+a + bb^+),\\ e_{\text{полн}} &= -e\sum_k (a^+a - bb^+).\end{aligned}\right\} \tag{11,4}$$

Как и следовало ожидать, все эти величины в согласии с законами сохранения являются постоянными и поэтому не зависят от времени (точнее, коэффициенты при временных членах $e^{\pm 2icKt}$ обращаются в нуль).

С помощью квантового уравнения движения (8,3) получаем:

$$\left.\begin{aligned} -icKa &= \frac{i}{\hbar}(Ha - aH), \\ -icKb &= \frac{i}{\hbar}(Hb - bH) \end{aligned}\right\} \tag{11,5}$$

и т. д.

Отсюда находим:

$$\left.\begin{aligned} [a_k, a_{k'}^+]_- &= \delta_{kk'}, \\ [b_k, b_{k'}^+]_- &= \delta_{kk'}. \end{aligned}\right\} \tag{11,6}$$

Перестановочные соотношения для других комбинаций амплитуд обращаются в нуль.

Перестановочные соотношения (11,6) соответствуют статистике Бозе.

Уравнения (11,5) имеют также второе решение, связанное со статистикой Ферми:

$$[a_k, a_{k'}^+]_+ = a_k a_{k'}^+ + a_{k'}^+ a_k = \delta_{kk'}, \tag{11,7}$$

$$[b_k, b_{k'}^+]_+ = b_k b_{k'}^+ + b_{k'}^+ b_k = -\delta_{kk'}. \tag{11,8}$$

Как будет показано ниже, при квантовании уравнения Дирака перестановочные соотношения (11,7) отражают тот факт, что в каждом квантовом состоянии может находиться не более одной частицы (статистика Ферми). Соотношение же (11,8), имеющее в правой части знак минус, соответствует не реальному случаю, а случаю, когда каждое квантовое состояние может иметь или нуль или минус одну частицу. Ввиду абсурдности последнего результата приходим к выводу, что заряженные частицы, описываемые скалярным уравнением, должны подчиняться статистике Бозе.

В полной аналогии с квантованием вещественного поля мы должны потребовать, чтобы операторы a, a^+, b и b^+ действовали на соответствующие функции числа частиц.

Действие операторов a_k^+ или b_k^+ должно приводить к появлению частиц сорта N_k или $\tilde{N}_k$, а действие операторов a_k и b_k — соответственно к их поглощению.

Подобно равенству (8,25), находим следующие собственные значения для квадратов операторов:

$$\left.\begin{aligned} a_k^+ a_k &= N_k^0; & b_k^+ b_k &= \tilde{N}_k^0; \\ a_k a_k^+ &= 1 + N_k^0; & b_k b_k^+ &= 1 + \tilde{N}_k^0, \end{aligned}\right\} \tag{11,9}$$

где N_k^0 и $\tilde{N}_k^0$ — числа частиц в начальном состоянии.

Подставляя (11,9) в (11,4), получаем следующие собственные значения для оператора энергии, импульса и полного заряда:

$$H = \sum_k c\hbar K (N_k^0 + \tilde{N}_k^0 + 1), \tag{11,10}$$

$$\boldsymbol{G} = \sum_k \hbar \boldsymbol{k} (N_k^0 + \tilde{N}_k^0 + 1), \tag{11,11}$$

$$e_{\text{полн}} = -e \sum_k (N_k^0 - \tilde{N}_k^0 - 1). \tag{11,12}$$

Отсюда видно, что частицы сорта a и b обладают положительной энергией ($\hbar cK$), импульсом $\hbar\boldsymbol{k}$ и равными, но противоположными по знаку зарядами e, т. е. если частицы сорта a обладают отрицательным зарядом (например, отрицательные мезоны), то частицы сорта b будут обладать положительным зарядом (например, положительные мезоны). Отсюда ясно, что в релятивистском случае скалярное уравнение может описывать сразу и положительные и отрицательные заряды, и поэтому плотность заряда ρ не является дефинитной величиной.

Из последних формул находим полные значения для нулевой энергии, импульса и заряда:

$$H_0 = \sum_k c\hbar K,$$

$$\boldsymbol{G}_0 = \sum_k \hbar\boldsymbol{k} = 0,$$

$$e_0 = \sum_k e\ ^{1)},$$

которые, так же как и в случае скалярного поля с вещественными волновыми функциями [см. (8,27)], будем пока что отбрасывать.

§ 12. Волновое уравнение электромагнитного поля

а) Общая теория уравнений Максвелла. Как известно, электромагнитное поле характеризуется четырьмя волновыми функциями, образующими четырехмерный потенциал $A_\mu (\boldsymbol{A}, i'\Phi)$, составленный из векторного $\boldsymbol{A}$ и скалярного Φ потенциалов. С компонентами A_μ

---

1) Заметим, что в симметричной теории, в которой для полного заряда следует использовать выражение

$$e_{\text{полн}} = -\frac{ie}{4\pi c^2 \hbar} \int \frac{1}{2} \left(\varphi^+ \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\partial\varphi^+}{\partial t} \varphi - \varphi \frac{\partial\varphi^+}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial t} \varphi^+ \right) d^3x,$$

нулевой заряд обращается в нуль ($e_0 = 0$). Однако с помощью подобной симметризации нельзя избавиться от нулевой энергии.

четырехмерного потенциала связаны компоненты антисимметричного тензора $H_{\mu\nu}$ электромагнитного поля:

$$H_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}, \tag{12,1}$$

где

$$A_{\mu,\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}.$$

Составляющие векторов магнитного $\boldsymbol{H}$ и электрического $\boldsymbol{E}$ полей даются выражениями

$$H_x = H_{23} = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} = \operatorname{rot}_x \boldsymbol{A}, \tag{12,2}$$

$$E_x = i' H_{14} = i'\left(\frac{\partial A_4}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_4}\right) = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} \tag{12,3}$$

и т. д.

С помощью составляющих электромагнитного поля можно образовать следующие инварианты:

$$I_1 = -\frac{1}{2} H_{\mu\nu} H_{\mu\nu} = (E^2 - H^2), \tag{12,4}$$

$$I_2 = (\boldsymbol{EH})^2, \tag{12,5}$$

$$I_3 = -A_\mu A_\mu = \Phi^2 - A^2. \tag{12,6}$$

К уравнениям Максвелла приводит лишь инвариант I_1 (первый инвариант поля). Второй инвариант поля I_2 приводит к нелинейным уравнениям. Третий инвариант поля I_3 дает явную зависимость уравнений поля от потенциалов, т. е. приводит к уравнениям, не удовлетворяющим требованиям калибровочной инвариантности[1]). Ограничиваясь здесь исследованием свободного электромагнитного поля, мы должны лагранжиан положить равным

$$L = \frac{1}{8\pi} I_1 = -\frac{1}{16\pi} H_{\mu\nu} H_{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi}(E^2 - H^2). \tag{12,7}$$

Тогда, варьируя функцию действия

$$S = \int L\, d^4x \tag{12,8}$$

по потенциалам, находим:

$$\frac{\delta L}{\delta A_\mu} = \frac{\partial L}{\partial A_\mu} - \frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial L}{\partial A_{\mu,\nu}} = 0. \tag{12,9}$$

Поскольку

$$\frac{\partial L}{\partial A_\mu} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial A_{\mu,\nu}} = \frac{1}{4\pi} H_{\mu\nu}, \tag{12,10}$$

---

[1]) Инвариант I_3 используется при построении мезодинамики. Более подробно см. «Классическая теория поля», стр. 375.

уравнение (12,9) можно представить в виде

$$\frac{\partial H_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}=0. \tag{12,11}$$

Последнее уравнение представляет собою уравнение электромагнитного поля (первая группа уравнений Максвелла) в вакууме.

Вторая же группа уравнений Максвелла

$$\frac{\partial H_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}+\frac{\partial H_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu}+\frac{\partial H_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu}=0 \tag{12,12}$$

является прямым следствием равенства (12,1).

При переходе к трехмерным обозначениям первая и вторая группы уравнений Максвелла принимают соответственно вид:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{rot}\boldsymbol{H}-\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}=0,\\ \operatorname{div}\boldsymbol{E}=0,\end{aligned}\right\} \tag{12,13}$$

и

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{rot}\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}=0,\\ \operatorname{div}\boldsymbol{H}=0.\end{aligned}\right\} \tag{12,14}$$

б) Калибровочная инвариантность. Лагранжиан L, а также уравнения поля обладают калибровочной инвариантностью. В самом деле, вводя новые потенциалы:

$$A_\mu=A'_\mu-\frac{\partial f}{\partial x_\mu}, \tag{12,15}$$

где f — скалярная функция калибровки, нетрудно убедиться, что электромагнитные поля $H_{\mu\nu}$ будут связаны одинаковым соотношением как со старыми (A_μ), так и новыми (A'_μ) потенциалами:

$$H_{\mu\nu}=A'_{\nu,\,\mu}-A'_{\mu,\,\nu}=A_{\nu,\,\mu}-A_{\mu,\,\nu}. \tag{12,16}$$

Лагранжиан не содержит в явном виде потенциалов и поэтому не зависит от выбора калибровочной функции f.

Неопределенность выбора значений для потенциалов приводит к тому, что мы не можем однозначно задать потенциалы A_μ, не наложив дополнительного условия на калибровочную функцию f.

Допустим, что мы выбрали потенциалы A'_μ, для которых расходимость не равна нулю:

$$A'_{\mu,\,\mu}\neq 0.$$

Тогда с помощью калибровочных преобразований (12,15) мы получаем:

$$A'_{\mu,\,\mu}=A_{\mu,\,\mu}+\Box f. \tag{12,17}$$

Подберем калибровочную функцию таким образом, чтобы[1])

$$f = \frac{A'_{\mu,\mu}}{\Box}. \tag{12,18}$$

Тогда потенциалы A_μ будут связаны между собою условием Лоренца

$$A_{\mu,\mu} = 0, \tag{12,19}$$

которое в трехмерных обозначениях принимает вид

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0. \tag{12,20}$$

Подставляя (12,16) в равенство (12,11) и принимая во внимание условие калибровки (12,19), находим, что потенциалы электромагнитного поля в вакууме подчиняются уравнениям Даламбера без правой части:

$$\frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\nu \partial x_\nu} = \Box A_\mu = 0. \tag{12,21}$$

Заметим, что выбор калибровочной функции из (12,17) не является однозначным. К решению (12,17) мы всегда можем добавить произвольную функцию f_0, удовлетворяющую уравнению Даламбера

$$\Box f_0 = 0. \tag{12,22}$$

Если к потенциалу A_μ, подчиняющемуся условию Лоренца, добавить калибровочный потенциал $\partial f_0 / \partial x_\mu$, то в силу равенства (12,22) новый потенциал также будет подчиняться условию Лоренца.

В частности, когда заряды отсутствуют, т. е. когда потенциалы, так же как и функция f_0, подчиняются уравнению Даламбера, мы можем выбрать калибровочную функцию f_0 таким образом, чтобы скалярный потенциал обратился в нуль ($\Phi = 0$). Тогда в пространстве, свободном от зарядов, будут существовать лишь одни поперечные волны, для которых

$$\Phi = 0, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0. \tag{12,23}$$

в) Тензор энергии и тензор момента количества движения. Компоненты тензора энергии и тензора момента количества движения электромагнитного поля могут быть найдены теми же способами, какие использовались при анализе скалярного поля.

В частности, вычисляя четырехмерный градиент L по x_μ, мы найдем закон сохранения для тензора энергии:

$$\frac{\partial L}{\partial x_\mu} = \frac{\partial L}{\partial A_{\lambda,\nu}} \frac{\partial A_{\lambda,\nu}}{\partial x_\mu} = \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{1}{4\pi} H_{\lambda\nu} A_{\lambda,\mu}\right) - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial H_{\lambda\nu}}{\partial x_\nu} A_{\lambda,\mu},$$

[1]) Операция деления на оператор объясняется в монографии «Классическая теория поля», стр. 36 и 85.

откуда, принимая во внимание уравнение поля (12,11), получаем:

$$\frac{\partial T_{\mu,\nu}}{\partial x_\nu}=0, \qquad (12,24)$$

причем компоненты тензора энергии равны

$$T_{\mu\nu}=\frac{1}{4\pi}A_{\lambda,\mu}H_{\lambda\nu}-L\delta_{\mu\nu}. \qquad (12,25)$$

Как видно из формулы (12,25), канонический тензор не является симметричным. Для того чтобы его симметризовать, т. е. получить компоненты метрического тензора энергии, мы должны подобрать тензор третьего ранга $f_{\mu[\nu\lambda]}$, антисимметричный относительно индексов ν и λ, таким образом, чтобы тензор

$$T'_{\mu\nu}=T_{\mu\nu}-\frac{\partial}{\partial x_\lambda}f_{\mu[\nu\lambda]} \qquad (12,26)$$

был симметричным [см. также соотношение (3,12)]. Нетрудно показать, что такими компонентами тензора $f_{\mu[\nu\lambda]}$ будут

$$f_{\mu[\nu\lambda]}=-\frac{1}{4\pi}A_\mu H_{\nu\lambda}. \qquad (12,27)$$

Тогда найдем компоненты симметричного метрического тензора энергии:

$$T'_{\mu\nu}=\frac{1}{4\pi}H_{\mu\lambda}H_{\lambda\nu}-L\delta_{\mu\nu}. \qquad (12,28)$$

Отсутствие симметрии канонического тензора указывает на поляризационные свойства светового поля или наличие спина у сопоставленных световому полю частиц (фотонов).

Согласно формуле (4,14) компоненты «собственного» момента количества движения поля (спин фотона) равны[1])

$$s_{[\mu\nu]\lambda}=\frac{i'}{c}(f_{\mu[\nu\lambda]}-f_{\nu[\mu\lambda]})=-\frac{i'}{4\pi c}(A_\mu H_{\nu\lambda}-A_\nu H_{\mu\lambda}). \qquad (12,29)$$

Найдем теперь выражения для энергии, количества движения и момента количества движения светового поля в вакууме, когда можно положить

$$\Phi=0, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{A}=0. \qquad (12,30)$$

В этом случае

$$E_x=i'H_{14}=-i'H_{41}=-i'A_{1,4}, \qquad H_x=A_{3,2}-A_{2,3} \text{ и т. д.},$$

или, в трехмерных обозначениях,

$$\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}, \qquad \boldsymbol{H}=\operatorname{rot}\boldsymbol{A}. \qquad (12,31)$$

---

[1]) См. например, «Классическая теория поля», стр. 191.

Подставляя эти выражения в лагранжиан, получим:

$$L = -\frac{1}{16\pi} H_{\mu\nu} H_{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi}(E^2 - H^2), \tag{12,32}$$

откуда находим выражения для плотности энергии

$$u = T_{44} = \frac{1}{4\pi} A_{n,\,4} H_{n4} - L = \frac{1}{8\pi}(E^2 + H^2) \tag{12,33}$$

(аналогичное выражение мы также получим, если определим энергию u как временную составляющую метрического тензора энергии т. е. положим $u = T'_{44}$) и для плотности импульса

$$g_x = \frac{i'}{c} T_{14} = \frac{1}{4\pi c}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} E_x + \frac{\partial A_y}{\partial x} E_y + \frac{\partial A_z}{\partial x} E_z\right). \tag{12,34}$$

Если мы определим плотность импульса поля через компоненты метрического тензора энергии, то найдем:

$$g'_x = \frac{1}{4\pi c}(E_y H_z - E_z H_y). \tag{12,35}$$

Выражения (12,34) и (12,35) отличаются друг от друга на величину трехмерной дивергенции:

$$g'_x = g_x - \frac{1}{4\pi c} \operatorname{div} A_x \boldsymbol{E},$$

и поэтому при вычислении полных значений приводят к тождественным результатам.

Наконец, для плотности собственного момента количества движения поля находим:

$$s_x = s_{[23]\,4} = \frac{1}{4\pi c}(E_y A_z - E_z A_y). \tag{12,36}$$

Отсюда мы будем иметь следующие выражения для полной энергии, или гамильтониана поля:

$$H = U = \frac{1}{8\pi}\int (E^2 + H^2)\, d^3x, \tag{12,37}$$

для импульса поля:

$$\boldsymbol{G} = \frac{1}{4\pi c}\int E_n \nabla A_n d^3x = \frac{1}{4\pi c}\int [\boldsymbol{EH}]\, d^3x, \tag{12,38}$$

для спина фотона:

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{4\pi c}\int [\boldsymbol{EA}]\, d^3x. \tag{12,39}$$

В заключение заметим, что, поскольку световое поле является вещественным, заряд и плотность тока фотонов равны нулю.

§ 13. Решение уравнений Максвелла

Согласно (12,23) свободное электромагнитное поле является поперечным:

$$A_4 = i'\Phi = 0, \qquad \operatorname{div} A = 0. \tag{13,1}$$

Для вектор-потенциала имеем следующее дифференциальное уравнение:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) A = 0. \tag{13,2}$$

Электромагнитные поля E и H связаны с вектор-потенциалом A соотношениями

$$E = -\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t}, \qquad H = \operatorname{rot} A. \tag{13,3}$$

Уравнение (13,2) является частным случаем уравнения (2,3) ($k_0 = 0$), и поэтому, накладывая на функцию A условие периодичности:

$$A(x, y, z) = A(x + L, y, z) \quad \text{и т. д.,}$$

можем представить его решение в виде

$$A = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\varkappa} \sqrt{\frac{2\pi c\hbar}{\varkappa}} \left(a e^{-ic\varkappa t + i\varkappa r} + a^{+} e^{ic\varkappa t - i\varkappa r}\right), \tag{13,4}$$

где составляющие волнового вектора $\varkappa(\varkappa_x, \varkappa_y, \varkappa_z)$ принимают значения:

$$\varkappa_x = \frac{2\pi n_x}{L} \qquad (n_x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \text{ и т. д.}$$

Здесь по аналогии со скалярным полем введен нормировочный коэффициент $\sqrt{2\pi c\hbar/\varkappa}$.

Условие поперечности электромагнитного поля ($\operatorname{div} A = 0$) накладывает на амплитуды a и a^{+} условие

$$(\varkappa^0 a) = (\varkappa^0 a^{+}) = 0, \tag{13,5}$$

где $\varkappa^0 = \varkappa/\varkappa$.

Отсюда видно, что из трех составляющих вектор-потенциала независимыми остаются только две, характеризующие два возможных состояния поляризации.

Вычислим теперь значения полной энергии, полного импульса и полного момента количества движения электромагнитного поля, которые согласно законам сохранения остаются постоянными, т. е. не должны зависеть от временных членов, пропорциональных $e^{\pm 2ic\varkappa t}$.

Согласно равенствам (12,37) и (13,3) имеем для полной энергии электромагнитного поля:

$$H = \frac{1}{8\pi} \int \left[\left(\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t}\right)^2 + (\operatorname{rot} A)^2\right] d^3x. \tag{13,6}$$

Отбрасывая временны́е члены, коэффициенты при которых обращаются в нуль, получим:

$$H = \sum_{\varkappa} \frac{2\pi c\hbar}{8\pi\varkappa} \{\varkappa^2 (aa^+) + ([\boldsymbol{\varkappa} a][\boldsymbol{\varkappa} a^+]) + \varkappa^2 (a^+ a) + ([\boldsymbol{\varkappa} a^+][\boldsymbol{\varkappa} a])\}.$$

С помощью соотношения (13,5) легко показать, что

$$([\boldsymbol{\varkappa} a][\boldsymbol{\varkappa} a^+]) = \varkappa^2 (aa^+) - (\boldsymbol{\varkappa} a)(\boldsymbol{\varkappa} a^+) = \varkappa^2 (aa^+),$$

благодаря чему выражение для H принимает вид

$$H = \sum_{\varkappa} \frac{c\hbar\varkappa}{2} \{(aa^+) + (a^+ a)\}. \tag{13,7}$$

В частности, для неквантованных амплитуд, когда a и a^+ не являются операторами и, следовательно, переставимы между собою, имеем:

$$H = \sum_{\varkappa} c\hbar\varkappa (a^+ a). \tag{13,8}$$

Импульс электромагнитного поля согласно (12,38) и (13,3) равен

$$G = -\frac{1}{4\pi c} \int \left[\frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} \operatorname{rot} A\right] d^3x. \tag{13,9}$$

Подставляя сюда вместо вектор-потенциала выражение (13,4), найдем:

$$G = \sum_{\varkappa} \frac{2\pi c\hbar}{4\pi c\varkappa} \varkappa \{[a[\boldsymbol{\varkappa} a^+]] + [a^+ [\boldsymbol{\varkappa} a]]\},$$

откуда, принимая во внимание условие поперечности электромагнитного поля (13,5), получаем:

$$G = \sum_{\varkappa} \frac{\hbar\boldsymbol{\varkappa}}{2} \{(aa^+) + (a^+ a)\}. \tag{13,10}$$

В частности, для неквантованных амплитуд находим:

$$G = \sum_{\varkappa} \hbar\boldsymbol{\varkappa} (a^+ a).$$

Согласно (12,39) и (13,3) для момента количества движения поля (т. е. спина фотона) имеем:

$$S = \sum_{\varkappa} i \frac{\hbar}{2} \{[aa^+] - [a^+ a]\}. \tag{13,11}$$

Последнее соотношение в случае неквантованных амплитуд можно представить в виде

$$S = -\sum_{\varkappa} i\hbar [a^+ a]. \tag{13,12}$$

§ 14. Квантование поперечного электромагнитного поля

Как было показано в предыдущем параграфе, в вакууме может существовать поперечное электромагнитное (световое) поле, вектор-потенциал (т. е. волновая функция) которого может быть представлен в виде

$$A = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\varkappa} \sqrt{\frac{2\pi c\hbar}{\varkappa}} \left(a e^{-ic\varkappa t + i\varkappa r} + a^{+} e^{ic\varkappa t - i\varkappa r}\right), \tag{14,1}$$

причем на амплитуды должно быть наложено условие поперечности

$$(\varkappa^0 a) = (\varkappa^0 a^{+}) = 0. \tag{14,2}$$

Выпишем также выражения для полной энергии H и полного спина S фотонов, найденные нами в предыдущем параграфе:

$$H = \sum_{\varkappa} c\hbar\varkappa (a^{+} a), \tag{14,3}$$

$$S = -\sum_{\varkappa} i\hbar [a^{+} a]. \tag{14,4}$$

Последние выражения написаны при условии, что между амплитудами имеют место бозевские перестановочные соотношения, когда перемена местами амплитуд a и a^{+} дает лишь дополнительный постоянный член, приводящий к нулевой энергии (более подробно см. § 8). Фермиевское решение, так же как и в случае скалярного поля, приводит к противоречивым результатам.

Мы сможем как удовлетворить условию (14,2), так и произвести разделение амплитуд по спиновым состояниям, если положим

$$a = \sum_{l=-1}^{1} a_l g_l, \tag{14,5}$$

где

$$a_{-l}^{+} = a_l = \frac{1}{\sqrt{2}} (\beta + il [\varkappa^0 \beta]), \tag{14,6}$$

а β является единичным вектором, направленным перпендикулярно к движению фотона, т. е.

$$(\varkappa^0 \beta) = 0. \tag{14,7}$$

Амплитуды g_l характеризуют вероятность пребывания фотонов с импульсом $\varkappa$ в состоянии l.

С помощью формулы (14,6) легко доказать соотношения

$$(a_l^{+} a_{l'}) = \delta_{ll'}, \tag{14,8}$$

$$[a_l^{+} a_{l'}] = il\varkappa^0 \delta_{ll'}, \tag{14,9}$$

$$[\varkappa^0 a_l] = -il a_l, \quad (\varkappa^0 a_l) = 0, \tag{14,10}$$

которыми мы воспользуемся в дальнейшем.

Подставляя (14,5) в равенства (14,3), (14,4) и принимая во внимание последние соотношения, найдем:

$$H=\sum_{\varkappa} c\hbar\varkappa\left(g_1^+ g_1+g_{-1}^+ g_{-1}\right), \tag{14,11}$$

$$S=\sum_{\varkappa} \hbar\boldsymbol{\varkappa}^0\left(g_1^+ g_1-g_{-1}^+ g_{-1}\right), \tag{14,12}$$

откуда с помощью квантового уравнения движения (8,3) получаем бозевские перестановочные соотношения для амплитуд фотонного поля:

$$g_l g_{l'}'^{+}-g_{l'}'^{+} g_l=\delta_{ll'}\delta_{\varkappa\varkappa'}{}^{1)}. \tag{14,13}$$

Таким образом, амплитуды g будут связаны с числом частиц (фотонов) следующими равенствами:

$$g_l^+ g_l=N_l, \qquad g_l g_l^+=1+N_l. \tag{14,14}$$

Подставляя (14,14) в формулы (14,11) и (14,12), получаем:

$$H=\sum_{\varkappa} c\hbar\varkappa\left(N_1+N_{-1}\right), \tag{14,15}$$

$$S=\sum_{\varkappa} \hbar\boldsymbol{\varkappa}^0\left(N_1-N_{-1}\right). \tag{14,16}$$

Таким образом, оба сорта фотонов N_1 и N_{-1} обладают одинаковой энергией $c\hbar\varkappa$ и единичным (в единицах $\hbar$) значением спина, причем спин фотонов N_1 направлен по волновому вектору $\boldsymbol{\varkappa}$ (правая круговая поляризация), а фотонов N_{-1} — в противоположном направлении (левая круговая поляризация)[2].

С помощью формул (14,13) и (14,5) найдем теперь перестановочные соотношения для амплитуд. Обозначая через s и s' единичные векторы каких-либо двух осей декартовых координат, будем иметь:

$$a_s a_{s'}'^{+}-a_{s'}'^{+} a_s=\left(\delta_{ss'}-\frac{\varkappa_s\varkappa_{s'}}{\varkappa^2}\right)\delta_{\varkappa\varkappa'}. \tag{14,17}$$

При выводе последнего равенства принято во внимание известное условие ортонормированности между единичными векторами двух прямоугольных систем координат:

$$(s\beta)(s'\beta)+(s[\boldsymbol{\varkappa}^0\beta])(s'[\boldsymbol{\varkappa}^0\beta])+(s\boldsymbol{\varkappa}^0)(s'\boldsymbol{\varkappa}^0)=\delta_{ss'}.$$

---

[1]) Под $\delta_{\varkappa\varkappa'}$ понимается трехмерная δ-функция:

$$\delta_{\varkappa_1\varkappa_1'}\,\delta_{\varkappa_2\varkappa_2'}\,\delta_{\varkappa_3\varkappa_3'}.$$

[2]) Связь между амплитудами, характеризующими круговую и линейную поляризацию, **будет** рассмотрена нами в § 28, п. г).

Таким образом, перестановочные соотношения для амплитуд фотонного поля имеют вид

$$\left.\begin{aligned}[a_s, a'_{s'}]_- &= [a_s^+, a'^+_{s'}]_- = 0,\\ [a_s, a'^+_{s'}]_- &= Q_{ss'}\delta_{\varkappa\varkappa'},\end{aligned}\right\} \tag{14,18}$$

где

$$Q_{ss'} = \delta_{ss'} - \frac{\varkappa_s\varkappa_{s'}}{\varkappa^2}. \tag{14,19}$$

Появление множителя $Q_{ss'}$ в соотношении (14,18) связано с поперечностью электромагнитных волн, т. е. с условием Лоренца

$$a_s\varkappa_s = 0.$$

В самом деле, уравнение (14,18) находится в согласии с условием Лоренца, поскольку мы имеем тождественное соотношение

$$\varkappa_s Q_{ss'} = 0. \tag{14,20}$$

§ 15. Перестановочные соотношения для квантованных потенциалов поля

Найдем четырехмерные перестановочные соотношения для вектор-потенциала A.

Для этого с помощью (13,4) напишем значения компонент вектор-потенциала:

$$\left.\begin{aligned}A_s(\boldsymbol{r}, t) &= \frac{1}{L^{3/2}}\sum_{\varkappa}\sqrt{\frac{2\pi c\hbar}{\varkappa}}\left(a_s e^{-ic\varkappa t + i\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{r}} + a_s^+ e^{ic\varkappa t - i\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{r}}\right),\\ A_{s'}(\boldsymbol{r}', t') &= \frac{1}{L^{3/2}}\sum_{\varkappa}\sqrt{\frac{2\pi c\hbar}{\varkappa'}}\left(a'_{s'} e^{-ic\varkappa' t' + i\boldsymbol{\varkappa}'\boldsymbol{r}'} + a'^+_{s'} e^{ic\varkappa' t' - i\boldsymbol{\varkappa}'\boldsymbol{r}'}\right).\end{aligned}\right\} \tag{15,1}$$

Учитывая перестановочные соотношения (14,18), найдем [см. также (9,2)]:

$$[A_s(\boldsymbol{r}, t), A_{s'}(\boldsymbol{r}', t')]_- = A_s(\boldsymbol{r}, t)\, A_{s'}(\boldsymbol{r}', t') - A_{s'}(\boldsymbol{r}', t')\, A_s(\boldsymbol{r}, t) =$$

$$= \frac{1}{L^3}\sum_{\varkappa}\frac{4\pi c\hbar}{i}\left(\delta_{ss'} - \frac{\varkappa_s\varkappa_{s'}}{\varkappa^2}\right)e^{i\boldsymbol{\varkappa}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}\frac{\sin c\varkappa(t-t')}{\varkappa}. \tag{15,2}$$

Сделаем в последнем соотношении переход от суммы к интегралу, вводя новую перестановочную функцию $\Delta(\boldsymbol{R}, T)$:

$$\Delta(\boldsymbol{R}, T) = \frac{1}{8\pi^3}\int e^{i\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{R}}\frac{\sin c\varkappa T}{\varkappa}\, d^3\varkappa. \tag{15,3}$$

Здесь перестановочная Δ-функция является частным случаем перестановочной D-функции [см. соотношение (9,5)], если в последней

массу покоя частиц, сопоставленных полю, положить равной нулю, т. е.

$$\Delta(R, T) = \lim_{k_0 \to 0} D(R, T).$$

Для искомых перестановочных соотношений (15,2) теперь имеем:

$$[A_s(r, t), A_{s'}(r', t')]_- = \frac{4\pi c\hbar}{i}\left(\delta_{ss'} - \frac{\nabla_s \nabla_{s'}}{\nabla^2}\right)\Delta(r - r', t - t'), \quad (15,4)$$

где $\nabla_1 = \frac{\partial}{\partial x}$ и т. д., $\nabla^2 = \nabla_s \nabla_s$, а действие оператора $1/\nabla^2$ на функцию e^{ikr} определяется формулой

$$\frac{1}{\nabla^2} e^{ikr} = -\frac{e^{ikr}}{k^2}.$$

Заметим, что появление множителя $\delta_{ss'} - \nabla_s \nabla_{s'}/\nabla^2$ в равенстве (15,4) связано с поперечностью электромагнитного поля.

В самом деле, найдем расходимость от правой и левой частей равенства (15,4):

$$\left[\frac{\partial A_s(r, t)}{\partial x_s}, A_{s'}(r', t')\right]_- = \frac{4\pi c\hbar}{i} \nabla_s \left(\delta_{ss'} - \frac{\nabla_s \nabla_{s'}}{\nabla^2}\right)\Delta(r - r', t - t').$$

В силу соотношения

$$\left(\delta_{ss'} \nabla_s - \nabla_{s'} \frac{\nabla_s \nabla_s}{\nabla^2}\right) = 0$$

правая часть последнего равенства обращается в нуль, что находится в полном согласии с условием Лоренца

$$\frac{\partial A_s}{\partial x_s} = \operatorname{div} A = 0,$$

благодаря которому левая часть равенства также обращается в нуль.

§ 16. Квантование электромагнитного поля в общем случае

Как известно, при наличии зарядов наряду с поперечным электромагнитным полем должно существовать продольное поле, которое, в частности, обусловливает кулоновское взаимодействие.

Поэтому в общем случае мы не имеем права отбрасывать продольную составляющую поля ($\Phi \neq 0$) и должны сформулировать правила квантования электромагнитного поля с учетом также и продольных составляющих.

Как будет показано ниже, в общем случае все компоненты вектор-потенциала будут содержать продольные составляющие, и чтобы подчеркнуть это обстоятельство, мы введем для них иные обозначения (Φ_μ) чем в предыдущем параграфе.

Если выбрать лагранжиан в виде

$$L = -\frac{1}{16\pi} H_{\mu\nu} H_{\mu\nu}, \tag{16,1}$$

где

$$H_{\mu\nu} = \Phi_{\nu,\mu} - \Phi_{\mu,\nu}, \quad \Phi_{\nu,\mu} = \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x_\mu},$$

то для потенциалов получается уравнение

$$\Box \Phi_\mu - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \Phi_{\nu,\nu} = 0. \tag{16,2}$$

В предыдущем параграфе мы проквантовали это уравнение с помощью двух дополнительных условий (условия Лоренца $\Phi_{\mu,\mu} = 0$ и условия отсутствия продольной составляющей $\Phi = 0$). Оказывается, что квантование уравнения (16,2) при наличии лишь одного классического условия Лоренца является невозможным[1]. Поэтому Фок и Подольский[2]) предложили при квантовании электромагнитного поля в общем случае выбрать лагранжиан в таком виде:

$$L = -\frac{1}{16\pi} H_{\mu\nu} H_{\mu\nu} - \frac{1}{8\pi} \Phi_{\mu,\mu} \Phi_{\nu,\nu}, \tag{16,3}$$

чтобы уравнение движения

$$\frac{\delta L}{\delta \Phi_\mu} = \frac{\partial L}{\partial \Phi_\mu} - \frac{\partial^2 L}{\partial x_\nu \, \partial \Phi_{\mu,\nu}} = 0 \tag{16,4}$$

приводило непосредственно к уравнению Даламбера

$$\Box \Phi_\mu = 0 \tag{16,5}$$

для потенциалов, не связанных уже между собою условием Лоренца.

---

[1]) В самом деле, если проквантовать нейтральное векторное поле (поле Прока) с отличной от нуля массой покоя ($k_0 \neq 0$) сопоставленных полю частиц, у которых условие Лоренца выполняется автоматически, то мы получим следующие перестановочные соотношения для волновых функций ($A_4 = i'\Phi$):

$$[A_\mu(\mathbf{r}, t),\ A_\nu(\mathbf{r}', t')]_- = a_{\mu\nu} D(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t'),$$

где

$$a_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \, \partial x'_\nu}$$

см. «Классическая теория поля», стр. 380).

Отсюда видно, что при переходе к квантованному электромагнитному полю ($k_0 \to 0$) в случае, когда на потенциалы наложено условие Лоренца, но не исключена продольная составляющая, мы получаем для коэффициента $a_{\mu\nu}$ бесконечно большое значение.

[2]) В. Фок и Б. Подольский, Sow. Phys. 1, 801 (1932).

Последнее соотношение легко проверить, если принять во внимание, что

$$\frac{\partial L}{\partial \Phi_\mu} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial \Phi_{\mu,\nu}} = \frac{1}{4\pi} H_{\mu\nu} - \frac{1}{4\pi} \delta_{\mu\nu} \Phi_{\lambda,\lambda}. \tag{16,6}$$

В этом случае электромагнитные поля подчиняются более общим уравнениям, чем уравнения Максвелла, а именно:

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial H_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} - \frac{1}{4\pi} \Phi_{\lambda,\lambda\mu} = 0, \tag{16,7}$$

откуда, принимая во внимание соотношение $H_{\mu\nu} = \Phi_{\nu,\mu} - \Phi_{\mu,\nu}$, получаем дифференциальное уравнение (16,5).

Подставляя (16,6) в уравнение $T_{\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial \Phi_{\lambda,\nu}} \Phi_{\lambda,\mu} - L\delta_{\mu\nu}$, находим следующее выражение для компонент канонического тензора энергии;

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \Phi_{\lambda,\mu} H_{\lambda\nu} - \frac{1}{4\pi} \Phi_{\nu,\mu} \Phi_{\rho,\rho} - \delta_{\mu\nu} L. \tag{16,8}$$

В частности, для компоненты, отвечающей плотности энергии, получаем:

$$T_{44} = \frac{1}{8\pi} \left[(\operatorname{rot} \mathbf{\Phi})^2 + (\operatorname{div} \mathbf{\Phi})^2 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial t} \right)^2 - (\operatorname{grad} \Phi)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 \right]. \tag{16,9}$$

Из уравнения (16,5) находим следующее решение для потенциалов:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{\Phi} &= \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\varkappa} \sqrt{\frac{2\pi c \hbar}{\varkappa}} \left(\mathbf{q} e^{-ic\varkappa t + i\varkappa r} + \mathbf{q}^+ e^{ic\varkappa t - i\varkappa r} \right), \\ \Phi &= \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\varkappa} \sqrt{\frac{2\pi c \hbar}{\varkappa}} \left(q e^{-ic\varkappa t + i\varkappa r} + q^+ e^{ic\varkappa t - i\varkappa r} \right), \end{aligned}\right\} \tag{16,10}$$

откуда выражение для энергии поля принимает вид

$$H = \int T_{44} d^3x = \sum_{\varkappa} c\hbar\varkappa (\mathbf{q}^+ \mathbf{q} - q^+ q). \tag{16,11}$$

В выражении (16,11) мы переставили у некоторых членов амплитуды $\mathbf{q}$ и $\mathbf{q}^+$, а также q и q^+, что эквивалентно отбрасыванию нулевой энергии.

С помощью квантовых уравнений движения (8,3)

$$-ic\varkappa q = \frac{i}{\hbar} (Hq - qH)$$

находим следующие отличные от нуля перестановочные соотношения:

$$q_s q_s^+ - q_s^+ q_s = 1, \tag{16,12}$$

$s = 1, 2, 3$ (суммирования по s нет),

$$q^+ q - q q^+ = 1, \tag{16,13}$$

т. е. для амплитуд скалярного потенциала мы получаем перестановочные соотношения с обратным знаком.

Поэтому, чтобы удовлетворить перестановочным соотношениям (16,12), мы должны положить

$$\overset{+}{q_s} q_s = N_s; \quad q_s \overset{+}{q_s} = 1 + N_s.$$

где N_s — число частиц в заданном квантовом состоянии. Для q и q^+ из равенства (16,13) следует (более подробно см. § 42, п. ж)):

$$q^+q = -N; \quad qq^+ = -1 - N.$$

Подставляя последние соотношения в равенство (16,11), имеем:

$$H = \sum_{\varkappa} \hbar c\varkappa (N_1 + N_2 + N_3 - N).$$

Отсюда следует, что скалярное электромагнитное поле обладает метрикой, и поэтому частицы сорта N в виде квантов наподобие фотонов существовать не могут. Частицы, сопоставленные скалярному электромагнитному полю, получили поэтому название «псевдофотоны».

Компоненты электромагнитного поля могут быть разбиты на поперечные составляющие (число независимых компонент равно двум)

$$a_s = q_s - \varkappa_s \frac{(q\varkappa)}{\varkappa^2}, \tag{16,14}$$

связанные между собою одним соотношением

$$a_s \varkappa_s = 0,$$

и на скалярную и продольную составляющие[1])

$$q \text{ и } q_0 = \frac{(q\varkappa)}{\varkappa}. \tag{16,14а}$$

Как видно из (16,12) и (16,13), отличными от нуля будут следующие комбинации:

для поперечных составляющих

$$a_s \overset{+}{a}_{s'} - \overset{+}{a}_{s'} a_s = \delta_{ss'} - \frac{\varkappa_s \varkappa_{s'}}{\varkappa^2}, \tag{16,15}$$

для продольных (скалярная и собственно продольная составляющие)

$$q^+q - qq^+ = 1, \qquad q_0 \overset{+}{q_0} - \overset{+}{q_0} q_0 = 1. \tag{16,16}$$

Перестановочные соотношения (16,15), как и следовало ожидать, совпадают с перестановочными соотношениями (14,17), найденными нами для компонент поля фотонов.

---

[1]) В дальнейшем мы под продольными составляющими будем понимать не только собственно продольную (q_0), но и скалярную (q) составляющую.

В предыдущем параграфе было установлено, что в вакууме продольные составляющие поля могут быть исключены с помощью введения условия Лоренца и условий калибровки. Как будет показано в следующей главе (см. § 25), при наличии зарядов продольные составляющие также могут быть исключены, но это будет приводить к появлению дополнительной энергии электромагнитного поля, соответствующей кулоновскому взаимодействию между зарядами.

В заключение найдем перестановочные соотношения для квантованных потенциалов электромагнитного поля.

С этой целью введем четырехмерные составляющие потенциалов $\Phi_\mu(\boldsymbol{\Phi},\ i'\Phi)$ и его амплитуд $q_\mu(\boldsymbol{q},\ i'q)$, $q^+_\mu(\boldsymbol{q}^+,\ i'q^+)$[1]:

$$\Phi_\mu = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\varkappa} \sqrt{\frac{2\pi c\hbar}{\varkappa}} \left(q_\mu e^{-ic\varkappa t + i\varkappa r} + q^+_\mu e^{ic\varkappa t - i\varkappa r}\right). \qquad (16,17)$$

Перестановочные соотношения (16,12) и (16,13) для амплитуд q_μ могут быть записаны в виде

$$[q_\mu,\ q'^+_{\mu'}]_- = \delta_{\mu\mu'}\delta_{\varkappa\varkappa'}. \qquad (16,18)$$

Отсюда находим перестановочные (четырехмерные) соотношения для квантованных потенциалов:

$$[\Phi_\mu(\boldsymbol{r},\ t),\ \Phi_{\mu'}(\boldsymbol{r}',\ t')]_- = \frac{4\pi c\hbar}{i}\delta_{\mu\mu'}\Delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',\ t-t'), \qquad (16,19)$$

причем перестановочная Δ-функция задается формулой (15,3).

§ 17. Спинорное уравнение (уравнение Дирака)[2]

Как было указано в § 2, в основе построения квантовой механики лежит известное релятивистское соотношение между энергией E, импульсом $\boldsymbol{p}$ и массой частицы m_0:

$$E = c\sqrt{p^2 + m_0^2c^2}. \qquad (17,1)$$

Для того чтобы сделать переход к квантовым уравнениям движения свободных частиц, мы должны в указанное соотношение подставить соответствующие операторные величины

$$\mathrm{E} = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t},\quad \mathrm{p} = \frac{\hbar}{i}\nabla \qquad (17,2)$$

и подействовать ими на волновую функцию.

---

[1]) Различие между величинами i и i' оговорено равенствами (1,12) и (1,13). В данном случае это различие является весьма существенным, поскольку $q_4 = i'q$, $q_4^+ = i'q^+$, а не $-i'q^+$.

[2]) Это название для уравнения, как и в предыдущих параграфах, связано с соответствующим законом преобразования волновых функций ψ (см. § 18). Спинорные величины называют также тензорами полуцелого ранга.

В выражение же (17,1) мы не можем непосредственно подставить операторные величины хотя бы потому, что использование операторов, стоящих под квадратным корнем, представляет большие затруднения. Поэтому мы должны прежде всего избавиться от квадратного корня.

Для этой цели можно уравнение (17,1) возвести в квадрат. Тогда получаем следующее волновое (скалярное) уравнение:

$$\left(\mathrm{E}^2 - c^2\mathrm{p}^2 - m_0^2 c^4\right)\varphi = 0, \tag{17,3}$$

которое мы подробно рассмотрели в § 10.

Плотность заряда частиц определяется соотношением (10,12):

$$\rho = -\frac{ei}{4\pi\hbar c^2}\left(\varphi^+\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\partial\varphi^+}{\partial t}\varphi\right). \tag{17,4}$$

Как известно, уравнение (17,3) вначале предназначалось для описания движения электрона. Однако с его помощью нельзя было объяснить явления, связанные со спином электрона (тонкую структуру, аномальный эффект Зеемана, заполнение оболочек атома и т. д.).

Дирак вначале предположил, что эти трудности связаны с наличием второй производной по времени в основном уравнении (17,3) и вызванной этим индефинитностью (т. е. возможностью как положительных, так и отрицательных значений) плотности заряда (17,4), которая должна, как и в нерелятивистской волновой теории, все время сохранять один и тот же знак (напомним, что в теории Шредингера $\psi^+\psi > 0$).

Однако дефинитность плотности заряда с точки зрения квантовой теории поля не должна быть обязательной для всех случаев, и с формальной стороны скалярное уравнение является «безукоризненным» в рамках существующей волновой теории. В самом деле, в релятивистском случае, как было показано в § 10, уравнение (17,3) описывает частицы с обоими знаками заряда, и поэтому плотность заряда (17,4) может иметь как положительные, так и отрицательные значения.

Дело заключается в том, что уравнению (17,3) соответствует однокомпонентная волновая функция, которая позволяет описывать движение лишь бесспиновых частиц. Скалярное уравнение оказалось неприменимым к частицам с отличным от нуля спином (например, к электронам), и поэтому, естественно, описание тонкой структуры или других спиновых явлений с помощью уравнения (17,3) не привело к ожидаемым результатам. Очевидно, для электронов, обладающих спином, равным половине (в единицах $\hbar$), необходимо уравнение с несколькими волновыми функциями[1]), описывающими состояния с различными ориентациями спина.

---

[1]) Волновое векторное уравнеиие оказалось также непригодным для описаиия движения электрона, поскольку спин векторных частиц оказался равным единице.

а) Линеаризация оператора скалярного уравнения. Для линеаризации оператора (17,1), или символического извлечения из него квадратного корня, представим соотношение (17,1) в следующем операторном виде:

$$E = c\sum_{\mu=0}^{3}\alpha_\mu p_\mu, \tag{17,5}$$

где

$$p_0 = m_0 c,\ p_1 = p_x = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} \text{ и т. д., } E = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}. \tag{17,6}$$

Принимая во внимание, что

$$E^2 = c^2\sum_{\mu=0}^{3} p_\mu^2,$$

находим следующие соотношения, которым должны удовлетворять величины α_μ:

$$\alpha_\mu\alpha_{\mu'} + \alpha_{\mu'}\alpha_\mu = 2\delta_{\mu\mu'}. \tag{17,7}$$

Аналогичным условиям удовлетворяют, например, двухрядные матрицы:

$$\sigma_1' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad \sigma_2' = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\quad \sigma_3' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{17,8}$$

с помощью которых Паули в нерелятивистском приближении удалось написать волновое уравнение для частиц, обладающих спином.

Из формулы (17,8) легко найти правила умножения для матриц Паули:

$$\sigma_1'\sigma_2' = -\sigma_2'\sigma_1' = i\sigma_3' \text{ и т. д.} \tag{17,9}$$

или

$$\sigma_n'\sigma_{n'}' + \sigma_{n'}'\sigma_n' = 2\delta_{nn'}, \tag{17,10}$$

где $n,\ n' = 1,\ 2,\ 3$. Однако для извлечения квадратного корня из четырехчлена необходимо иметь четыре соотношения ($\mu = 0,\ 1,\ 2,\ 3$), а не три, которым удовлетворяют матрицы (17,8). Поэтому необходимо найти соответствующее обобщение для матриц Паули на случай (17,7).

В связи с этим Дирак предложил взять две системы четырехрядных матриц: матрицы σ и матрицы ρ.

Матрицы σ выберем в виде

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\quad \sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i&0&0\\i&0&0&0\\0&0&0&-i\\0&0&i&0\end{pmatrix},$$
$$\sigma_3=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}, \tag{17,11}$$

т. е.

$$\sigma_n=\begin{pmatrix}\sigma_n' & 0'\\ 0' & \sigma_n'\end{pmatrix},$$

где символом $0'$ обозначена двухрядная матрица $0'=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

Матрицы ρ зададим в виде

$$\rho_1=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\quad \rho_2=\begin{pmatrix}0&0&-i&0\\0&0&0&-i\\i&0&0&0\\0&i&0&0\end{pmatrix},$$
$$\rho_3=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}, \tag{17,11a}$$

т. е.

$$\rho_1=\begin{pmatrix}0' & I'\\ I' & 0'\end{pmatrix},\quad \rho_2=\begin{pmatrix}0' & -iI'\\ iI' & 0'\end{pmatrix},\quad \rho_3=\begin{pmatrix}I' & 0'\\ 0' & -I'\end{pmatrix},$$

где I' — двухрядная единичная матрица; $I'=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

Легко показать, что матрицы σ и ρ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_n^2=\rho_n^2=I,\qquad \sigma_1\sigma_2=-\sigma_2\sigma_1=i\sigma_3,\\ \rho_1\rho_2=-\rho_2\rho_1=i\rho_3 \text{ и т. д.},\qquad \sigma_n\rho_{n'}=\rho_{n'}\sigma_n,\end{aligned}\right\} \tag{17,12}$$

где I является единичной четырехрядной матрицей

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}. \tag{17,13}$$

Отсюда следует

$$\sigma_n\sigma_{n'} + \sigma_{n'}\sigma_n = \rho_n\rho_{n'} + \rho_{n'}\rho_n = 2\delta_{nn'},$$

т. е. различные матрицы σ антикоммутируют между собою. Аналогичное заключение относится также к системе матриц ρ. В то же время матрицы σ коммутируют с матрицами ρ. Вводя матрицы α_μ, связанные с σ и ρ равенствами

$$\alpha_n = \rho_1\sigma_n, \qquad \alpha_0 = \rho_3, \tag{17,14}$$

найдем, что матрицы α_μ будут удовлетворять искомым соотношениям (17,7), т. е. они представляют собой как раз те операторы, с помощью которых можно «извлечь квадратный корень» из четырехчлена.

На основе равенств (17,14) находим для матриц $\boldsymbol{\alpha}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{17,15}$$

Отсюда «линеаризованное» уравнение Дирака принимает вид[1]):

$$(E - c(\mathbf{p}\boldsymbol{\alpha}) - \rho_3 m_0 c^2)\psi = 0. \tag{17,16}$$

Поскольку матрицы $\boldsymbol{\alpha}$ и ρ_3 являются четырехрядными, то и волновая функция ψ также должна представлять собою четырехрядную матрицу. В нашем случае матрица ψ, оказывается, имеет отличным от нуля лишь один столбец, т. е.

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_2 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_3 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}. \tag{17,17}$$

Таким образом, уравнение (17,16) эквивалентно системе четырех линейных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} (E - m_0c^2)\psi_1 - c(p_x - ip_y)\psi_4 - cp_z\psi_3 &= 0, \\ (E - m_0c^2)\psi_2 - c(p_x + ip_y)\psi_3 + cp_z\psi_4 &= 0, \\ (E + m_0c^2)\psi_3 - c(p_x - ip_y)\psi_2 - cp_z\psi_1 &= 0, \\ (E + m_0c^2)\psi_4 - c(p_x + ip_y)\psi_1 + cp_z\psi_2 &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{17,18}$$

[1]) Часто вместо матрицы ρ_3 вводится β: $\beta = \rho_3$.

где операторные выражения энергии Е и импульса р определены равенством (17,6).

Комплексно-сопряженные уравнения могут быть представлены в виде одного матричного уравнения

$$\psi^+ (\mathrm{E} - c(\mathbf{p}\boldsymbol{\alpha}) - m_0 c^2 \rho_3) = 0, \tag{17,19}$$

где ψ^+ является четырехрядной матрицей с одной строкой:

$$\psi^+ = (\psi_1^+ \psi_2^+ \psi_3^+ \psi_4^+), \tag{17,20}$$

а действие операторов $-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}$ и $\frac{\hbar}{i}\nabla$ на волновую функцию, стоящую слева от них, следует понимать в таком же смысле, как и в уравнении (17,16), но только с обратным знаком, т. е.

$$\psi^+ \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t} \to -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi^+}{\partial t}, \qquad \psi^+ \frac{\hbar}{i}\nabla \to -\frac{\hbar}{i}\nabla\psi^+. \tag{17,21}$$

Последние выражения обращаются в равенства при вычислении интеграла:

$$\int (\nabla_\mu \psi^+) F\, d^3x\, dt = -\int \psi^+ (\nabla_\mu F)\, d^3x\, dt.$$

При движении электрона в электромагнитном поле, характеризуемом четырехмерным потенциалом $A_\mu = \boldsymbol{A},\ i'\Phi$, мы также можем пользоваться уравнением (17,16) или (17,19), только в качестве операторов энергии и импульса согласно общим законам квантовой механики должны быть выбраны следующие:

$$\hat{\mathrm{E}} = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t} + e\Phi, \quad \mathbf{P} = \frac{\hbar}{i}\nabla + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}, \tag{17,22}$$

где $e^- = -e$ является зарядом электрона.

б) Механический и магнитный моменты электрона. С помощью этих соотношений можно найти как механический, так и магнитный момент электрона.

Для определения механического момента электрона запишем спинорное уравнение Дирака, учитывая наличие лишь электрического поля с центральной симметрией:

$$(E - \mathrm{H})\psi(\boldsymbol{r}) = 0, \tag{17,23}$$

где E — энергия электрона, а оператор Гамильтона Н имеет вид

$$\mathrm{H} = V(r) + c(\mathbf{p}\boldsymbol{\alpha}) + m_0 c^2 \rho_3, \tag{17,24}$$

причем потенциальная энергия $V = -e\Phi(r)$ есть функция только расстояния от начала координат.

Нетрудно показать, что оператор момента количества движения

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}\mathbf{p}]$$

не коммутирует с оператором Гамильтона H и поэтому не является константой движения.

В самом деле,

$$\mathrm{H}M_z - M_z\mathrm{H} = c(\mathbf{p}\boldsymbol{\alpha})(x\mathrm{p}_y - y\mathrm{p}_x) - c(x\mathrm{p}_y - y\mathrm{p}_x)(\mathbf{p}\boldsymbol{\alpha}) =$$
$$= -c(\alpha_1\mathrm{p}_y - \alpha_2\mathrm{p}_x)\,i\hbar.$$

Точно так же легко показать, что

$$\mathrm{H}\sigma_3 - \sigma_3\mathrm{H} = c((\mathbf{p}\boldsymbol{\alpha})\sigma_3 - \sigma_3(\mathbf{p}\boldsymbol{\alpha})) = 2ic(\alpha_1\mathrm{p}_y - \alpha_2\mathrm{p}_x).$$

Отсюда следует, что оператор [1])

$$\mathbf{J} = \mathbf{M} + \frac{1}{2}\hbar\boldsymbol{\sigma} \tag{17,25}$$

коммутирует с оператором Гамильтона H и поэтому является константой движения.

Этот результат может быть истолкован следующим образом: электрон обладает «собственным» моментом количества движения (спином), равным $^1/_2\,\hbar\boldsymbol{\sigma}$, который сохраняется лишь в сумме с орбитальным моментом количества движения $\mathbf{M}$.

Если орбитальный момент обращается в нуль ($\mathbf{M} = 0$), то электрон будет обладать только спином, проекция которого на ось z дается выражением

$$S_z = \frac{1}{2}\hbar\sigma_3. \tag{17,26}$$

Отсюда, принимая во внимание, что собственные значения матрицы σ_3 равны ± 1, находим собственные значения для проекции спина на ось z:

$$\overline{S}_z = \pm\frac{1}{2}\hbar, \tag{17,27}$$

т. е. спинорные уравнения описывают частицы со спином, равным $^1/_2$ (в единицах $\hbar$).

Чтобы вычислить магнитный момент электрона, сведем спинорное уравнение к нерелятивистскому уравнению и найдем дополнительную энергию, связанную с наличием магнитного момента электрона.

Для этой цели умножим уравнение (17,16) слева на оператор

$$\hat{E} + c(\mathbf{P}\boldsymbol{\alpha}) + m_0c^2\rho_3. \tag{17,28}$$

---

[1]) Точнее, мы показали, что с оператором Гамильтоиа коммутирует проекция полного момента количества движения на ось z, и поэтому она должна иметь собственное значение. Однако мы не можем считать, что и другие проекции будут иметь собственное значение, поскольку они не коммутируют друг с другом [более подробно см. § 46, п. з)]. С проекцией J_z и гамильтонианом коммутирует квадрат полного момента количества движения J^2, благодаря чему мы можем считать, что константами движения являются операторы J_z и J^2.

В случае отсутствия поля ($A=\Phi=0$), когда операторы E и p коммутируют между собой, мы получим уравнение, в котором каждая из составляющих ψ-функций будет подчиняться релятивистскому скалярному уравнению. При наличии же электромагнитного поля операторы $\hat{\mathrm{E}}$ и $\mathbf{P}$, даваемые выражениями (17,22), не будут коммутировать между собою.

В этом случае, принимая во внимание соотношение, которое легко проверить с помощью равенств (17,14) и (17,12):

$$(\mathbf{a}\boldsymbol{\alpha})(\mathbf{b}\boldsymbol{\alpha})=(\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma})(\mathbf{b}\boldsymbol{\sigma})=(\mathbf{ab})+i(\boldsymbol{\sigma}[\mathbf{ab}]), \qquad (17,29)$$

приводим уравнение (17,16) к виду

$$\{\hat{\mathrm{E}}^2-c^2\mathrm{P}^2-m_0^2c^4-ic^2(\boldsymbol{\sigma}[\mathbf{PP}])-c(\boldsymbol{\alpha}(\hat{\mathrm{E}}\mathbf{P}-\mathbf{P}\hat{\mathrm{E}}))\}\psi=0. \qquad (17,30)$$

Из равенств (17,22) следуют операторные соотношения

$$\hat{\mathrm{E}}\mathbf{P}-\mathbf{P}\hat{\mathrm{E}}=-e\hbar i\boldsymbol{E}, \qquad [\mathbf{PP}]=-\frac{i\hbar e}{c}\boldsymbol{H},$$

где $\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}-\operatorname{grad}\Phi$ и $\boldsymbol{H}=\operatorname{rot}\boldsymbol{A}$ являются соответственно векторами напряженности электрического и магнитного полей.

Таким образом, получаем следующее волновое уравнение:

$$(\hat{\mathrm{E}}^2-c^2\mathrm{P}^2-m_0^2c^4-\hbar ec(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{H})+ce\hbar i(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{E}))\psi=0. \qquad (17,31)$$

в) Переход к уравнению Паули. Чтобы исследовать нерелятивистские приближения уравнения Дирака, сделаем прежде всего переход к новой волновой функции ψ', в которой выделен член, связанный с собственной энергией. С этой целью необходимо произвести следующее преобразование волновых функций:

$$\psi\to\psi' e^{-\frac{im_0c^2t}{\hbar}}.$$

Оператор энергии преобразуется по следующему закону:

$$\hat{\mathrm{E}}\psi=e^{-\frac{im_0c^2t}{\hbar}}\left(m_0c^2-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}+e\Phi\right)\psi',$$

т. е.

$$\hat{\mathrm{E}}=m_0c^2-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}+e\Phi.$$

Отсюда

$$\hat{\mathrm{E}}^2-m_0^2c^4\cong 2m_0c^2\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}+e\Phi\right).$$

В нерелятивистском приближении уравнение (17,30) принимает вид

$$\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}-\mathrm{H}\right)\psi'=0,$$

причем гамильтониан H будет складываться из двух частей:

$$\mathrm{H} = \mathrm{H}_0 + \mathrm{H}_1.$$

Часть

$$\mathrm{H}_0 = -e\Phi + \frac{1}{2m_0}\mathrm{P}^2$$

в точности совпадает с гамильтонианом уравнения Шредингера, а вторая часть

$$\mathrm{H}_1 = \frac{\hbar e}{2m_0 c}(\sigma \boldsymbol{H}) - i\rho_1 \frac{\hbar e}{2m_0 c}(\sigma \boldsymbol{E})$$

является специфической лишь для спинорного уравнения.

Мы можем интерпретировать появление дополнительной энергии H_1 наличием у дираковской частицы магнитного $\boldsymbol{\mu} = -\frac{e\hbar}{2m_0 c}\boldsymbol{\sigma}$ и электрического $\boldsymbol{\mu}' = i\rho_1 \frac{e\hbar}{2m_0 c}\boldsymbol{\sigma}$ моментов.

Наличие магнитного момента у электрона находится в полном согласии с опытными данными; существование электрического момента электрона было предсказано Френкелем из соображений релятивистской инвариантности; однако с учетом лишь членов порядка v/c он может быть отброшен, так как матрица ρ_1, как будет показано ниже, имеет порядок v/c.

Таким образом, с точностью до величин v/c функция Гамильтона в электромагнитном поле имеет вид[1])

$$\mathrm{H} = -e\Phi + \frac{\mathrm{p}^2}{2m_0} + \frac{\hbar e}{2m_0 c}(\sigma \boldsymbol{H}). \tag{17,32}$$

В этом случае мы можем ограничиться уравнениями Паули с двухрядными функциями $\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}$, поскольку уравнение Дирака расщепляется на два независимых уравнения.

г) Плотность заряда и плотность тока. Найдем теперь для спинорных уравнений выражения плотности заряда ρ и плотности тока $\boldsymbol{j}$, которые должны быть связаны между собою условием непрерывности

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0. \tag{17,33}$$

Запишем уравнения для ψ и ψ^+ при наличии электромагнитного поля. Согласно (17,16), (17,19), (17,22) и (17,21) имеем:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{ie\Phi}{\hbar c}\psi + (\boldsymbol{\alpha}\nabla)\psi + \frac{ie(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})}{c\hbar}\psi + \frac{im_0 c}{\hbar}\rho_3\psi = 0, \tag{17,34}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \psi^+}{\partial t} + \frac{ie\Phi}{c\hbar}\psi^+ + (\nabla\psi^+\boldsymbol{\alpha}) - \frac{ie\psi^+(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})}{c\hbar} - \frac{im_0 c}{\hbar}\psi^+\rho_3 = 0. \tag{17,35}$$

---

[1]) Более подробно этот вопрос будет рассмотрен в § 50, п. а).

Умножая уравнения (17,34) слева и (17,35) справа соответственно на функции ψ^+ и ψ и складывая их, получим:

$$\frac{\partial \psi^+\psi}{c\,\partial t} + \operatorname{div} \psi^+ \boldsymbol{\alpha} \psi = 0. \tag{17,36}$$

Сравнивая между собой (17,33) и (17,36), можем положить

$$\left.\begin{aligned} \rho = -e\psi^+\psi = -e(\psi_1^+\psi_1 + \psi_2^+\psi_2 + \psi_3^+\psi_3 + \psi_4^+\psi_4), \\ \boldsymbol{j} = -e\psi^+\boldsymbol{\alpha}\psi. \end{aligned}\right\} \tag{17,37}$$

§ 18. Тензорная размерность волновых функций

Как мы указывали в § 1, волновые уравнения должны быть инвариантными (т. е. должны сохранять свою форму) при переходе от одной инерциальной системы координат к другой. Из этого условия мы можем найти тензорную размерность волновой функции ψ. Переход от одной инерциальной системы координат к другой сводится к пространственно-временным вращениям (преобразование Лоренца) и пространственным вращениям.

а) Инвариантность уравнений относительно пространственно-временных вращений (преобразование Лоренца). Прежде всего найдем законы преобразования волновой функции при пространственно-временных вращениях, когда координаты связаны между собой соотношениями Лоренца:

$$ct = \frac{ct' + \beta x'}{k}, \quad x = \frac{x' + \beta ct'}{k}, \quad y = y', \quad z = z', \tag{18,1}$$

где $k = \sqrt{1 - \beta^2}$, $\beta = v/c$.

Легко получить законы преобразования для импульса и энергии частицы, образующие в совокупности компоненты четырехмерного вектора:

$$\mathrm{E}/c = \frac{\mathrm{E}'/c + \beta \mathrm{p}_x'}{k}, \quad \mathrm{p}_x = \frac{\mathrm{p}_x' + \beta \mathrm{E}'/c}{k}, \quad \mathrm{p}_y = \mathrm{p}_y', \quad \mathrm{p}_z = \mathrm{p}_z'. \tag{18,2}$$

Подставляя последние соотношения в спинорное уравнение (17,16), т. е. делая переход к штрихованным координатам, имеем:

$$\left[(\mathrm{E}' - c\alpha_1 \mathrm{p}_x')\frac{(1 - \beta\alpha_1)}{k} - c\alpha_2 \mathrm{p}_y' - c\alpha_3 \mathrm{p}_z' - m_0 c^2 \rho_3\right]\psi = 0. \tag{18,3}$$

Умножая слева последнее выражение на величину $a + \alpha_1 b$ и учитывая антикоммутативность матрицы α_1 с матрицами α_2, α_3 и ρ_3, найдем:

$$\Big[(\mathrm{E}' - c\alpha_1 \mathrm{p}_x')\left(\frac{a - \beta b}{k} - \alpha_1 \frac{a\beta - b}{k}\right) - \\ - (c\alpha_2 \mathrm{p}_y' + c\alpha_3 \mathrm{p}_z' + m_0 c^2 \rho_3)(a - \alpha_1 b)\Big]\psi = 0.$$

Принимая во внимание, что в штрихованной системе координат волновые уравнения должны сохранять свой вид

$$(E' - c(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}') - \rho_3 m_0 c^2)\psi' = 0,$$

находим соотношение для определения коэффициентов a и b:

$$\frac{a - \beta b}{k} = a, \qquad \frac{a\beta - b}{k} = b. \tag{18,4}$$

Это дает:

$$b = \frac{a\beta}{1+k},$$

или

$$\psi' = a\left(1 - \frac{\beta\alpha_1}{1+k}\right)\psi.$$

При обратном переходе мы должны скорость v заменить на $-v$, т. е.

$$\psi = a\left(1 + \frac{\beta\alpha_1}{1+k}\right)\psi'.$$

Отсюда получаем условие для определения величины a:

$$a^2\left(1 - \frac{\beta^2}{(1+k)^2}\right) = 1,$$

из которого следует

$$a = \sqrt{\frac{1+k}{2k}}, \quad b = \frac{\beta}{|\beta|}\sqrt{\frac{1-k}{2k}}.$$

Вводя обозначения (см. § 1)

$$\operatorname{ch}\gamma = \frac{1}{k}, \quad \operatorname{sh}\gamma = \frac{\beta}{k},$$

т. е. рассматривая γ как мнимый угол поворота в плоскости xt, имеем:

$$a = \operatorname{ch}\frac{\gamma}{2}, \quad b = \operatorname{sh}\frac{\gamma}{2}.$$

Закон преобразования волновых функций при вращении в плоскости xt (преобразовании Лоренца) принимает вид

$$\psi' = \left(\operatorname{ch}\frac{\gamma}{2} - \alpha_1 \operatorname{sh}\frac{\gamma}{2}\right)\psi, \quad \psi = \left(\operatorname{ch}\frac{\gamma}{2} + \alpha_1 \operatorname{sh}\frac{\gamma}{2}\right)\psi'. \tag{18,5}$$

Найдем теперь закон преобразования для четырехмерной плотности тока:

$$\rho = -e\psi^+\psi, \quad j_x = -e\psi^+\alpha_1\psi. \tag{18,6}$$

С помощью равенства (18,5) мы можем написать:

$$\psi = \Omega_{xt}\psi'; \quad \psi^+ = \psi'^+\Omega_{xt}^+. \tag{18,7}$$

Здесь операторы преобразования имеют вид

$$\Omega_{xt}=\Omega_{xt}^{+}=\operatorname{ch}\frac{\gamma}{2}+\alpha_1\operatorname{sh}\frac{\gamma}{2}=e^{\alpha_1\gamma/2}. \qquad (18,8)$$

Подставляя (18,7) в (18,6), получаем:

$$\rho=\rho'\operatorname{ch}\gamma+j'_x\operatorname{sh}\gamma, \qquad j_x=j'_x\operatorname{ch}\gamma+\rho'\operatorname{sh}\gamma;$$

как и следовало ожидать, четырехмерная плотность тока преобразуется по законам для четырехмерного вектора. На основе равенства

$$\psi^{+}\psi=\psi'^{+}\Omega_{xt}^{2}\psi'=\psi'^{+}Q_{xt}\psi',$$

где

$$Q_{xt}=\operatorname{ch}\gamma+\alpha_1\operatorname{sh}\gamma,$$

мы можем рассматривать оператор Q_{xt} как оператор преобразования для векторных величин. Оператор же Ω_{xt} равен корню квадратному из оператора Q_{xt}:

$$\Omega_{xt}=\sqrt{Q_{xt}}. \qquad (18,9)$$

Следовательно, волновая функция не является тензорной величиной в обычном понимании; однако «наблюдаемые» физические величины, представляющие собою квадратичные комбинации из волновых функций, являются вещественными тензорами.

Согласно равенству (18,9) мы можем назвать закон преобразования для волновых функций законом преобразования для спинорных величин, а уравнение, которому они подчиняются, — спинорным уравнением.

б) Инвариантность уравнений относительно пространственных вращений. Найдем теперь закон преобразования волновых функций при пространственном вращении системы координат вокруг оси z на угол φ.

В этом случае четырехмерный импульс преобразуется по закону:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{E}=\mathrm{E}', \quad & \mathrm{p}_x=\mathrm{p}'_x\cos\varphi-\mathrm{p}'_y\sin\varphi,\\ & \mathrm{p}_y=\mathrm{p}'_y\cos\varphi+\mathrm{p}'_x\sin\varphi,\\ & \mathrm{p}_z=\mathrm{p}'_z. \end{aligned}\right\} \qquad (18,10)$$

Подставляя эти выражения в спинорное уравнение, найдем закон преобразования для ψ-функции:

$$\psi=\Omega_{xy}\psi',$$

где оператор Ω_{xy} имеет вид

$$\Omega_{xy}=\cos\frac{\varphi}{2}-i\sigma_3\sin\frac{\varphi}{2}=e^{-\frac{i\sigma_3\varphi}{2}}. \qquad (18,11)$$

С помощью оператора (18,11) легко найти законы преобразования (18,10) для четырехмерного тока.

в) **Калибровочная инвариантность.** Заметим, что спинорные уравнения обладают также и калибровочной инвариантностью.

При наличии поля спинорные уравнения имеют вид

$$\left(-c\alpha_\mu\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_\mu}+\frac{e}{c}A_\mu\right)-\rho_3 m_0 c^2\right)\psi=0, \qquad (18,12)$$

где

$$A_4=i'\Phi,\ x_4=i'ct,\ \alpha_4=i'I.$$

При калибровочных преобразованиях потенциалы изменяются по закону:

$$A_\mu=A'_\mu-\frac{\partial f}{\partial x_\mu}, \qquad (18,13)$$

где f — произвольная калибровочная функция.

Спинорные уравнения остаются инвариантными, если мы сделаем переход к новой волновой функции:

$$\psi=\psi' e^{\frac{ie}{\hbar c}f}. \qquad (18,14)$$

В самом деле, в этом случае

$$\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_\mu}+\frac{e}{c}A_\mu\right)\psi=e^{\frac{ie}{\hbar c}f}\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_\mu}+\frac{e}{c}A'_\mu\right)\psi'. \qquad (18,15)$$

Поэтому функция ψ' будет также удовлетворять уравнению (18,12), но со штрихованными потенциалами.

§ 19. Тензорная размерность матриц Дирака

а) **Матрицы α.** Из матриц Дирака мы можем составить шестнадцать независимых матриц, образующих группу в том смысле, что, умножая друг на друга две любые матрицы, мы всегда получим одну из шестнадцати матриц.

Эти шестнадцать матриц представим в следующем виде:

$$\gamma=\begin{cases} i'I, & \rho_1\sigma_n, \\ i'\rho_1, & \sigma_n, \\ \rho_2, & \rho_3\sigma_n, \\ \rho_3, & \rho_2\sigma_n, \end{cases} \qquad (19,1)$$

где значок n принимает значения 1, 2, 3.

Найдем тензорную размерность этих независимых матриц, т. е. закон преобразования для матричного элемента вида

$$\langle\gamma\rangle=\psi^+\gamma\psi. \qquad (19,2)$$

Для исследования тензорной размерности матриц Дирака удобно ввести систему координат с мнимой четвертой составляющей. В этом случае, как было показано в предыдущем параграфе, матрицы $\alpha_\mu\,(i'I,\ \boldsymbol{\alpha})$ образуют четырехмерный вектор.

Запишем уравнение Дирака в виде

$$\alpha_\mu \psi_\mu = -ik_0\rho_3\psi, \tag{19,3}$$

где

$$k_0 = \frac{m_0 c}{\hbar}, \quad \psi_\mu = \frac{\partial\psi}{\partial x_\mu} = \nabla_\mu \psi.$$

Умножая равенство (19,3) слева на ψ^+, имеем:

$$\psi^+\rho_3\psi = \frac{i}{k_0}\psi^+\alpha_\mu\nabla_\mu\psi. \tag{19,4}$$

В правой части равенства (19,4) стоит скалярная величина. Поэтому матрица ρ_3 является также скаляром.

Умножая далее равенство (19,3) слева на величину $\psi^+\alpha_\nu\rho_3$, имеем:

$$k_0\psi^+\alpha_\nu\psi = i\psi^+\alpha_\nu\rho_3\alpha_\mu\nabla_\mu\psi$$

или, принимая во внимание, что при $\mu = \nu$

$$\alpha_\nu\rho_3\alpha_\nu\nabla_\nu = -\rho_3\nabla_\nu,$$

получаем:

$$\psi^+(k_0\alpha_\nu + i\rho_3\nabla_\nu)\psi = i\sum_{\mu\neq\nu}{}' \psi^+\alpha_\nu\rho_3\alpha_\mu\nabla_\mu\psi. \tag{19,5}$$

В левой части равенства (19,5) стоит векторная величина. Поэтому величина

$$-\alpha_{\mu\nu} = \alpha_{\nu\mu} = \begin{cases} i\alpha_\nu\rho_3\alpha_\mu & (\mu\neq\nu), \\ 0 & (\mu=\nu) \end{cases} \tag{19,6}$$

является антисимметричным тензором второго ранга.

Принимая во внимание, что $\alpha_\mu = \rho_1\sigma_\mu$, мы можем антисимметричный тензор (19,6) представить в виде

$$\alpha_{\mu\nu} = \begin{cases} -i\sigma_\mu\rho_3\sigma_\nu & (\mu\neq\nu), \\ 0 & (\mu=\nu). \end{cases} \tag{19,7}$$

Его составляющие будут следующими:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{23} & \alpha_{31} & \alpha_{12} \\ \alpha_{14} & \alpha_{24} & \alpha_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_3\sigma_1 & \rho_3\sigma_2 & \rho_3\sigma_3 \\ i'\rho_2\sigma_1 & i'\rho_2\sigma_2 & i'\rho_2\sigma_3 \end{pmatrix}. \tag{19,8}$$

Вместо компонент антисимметричного тензора $\alpha_{\mu\nu}$ можно ввести компоненты дуального тензора (псевдотензора второго ранга)

$$\tilde{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}_{\mu\nu s\rho}\alpha_{s\rho},$$

или

$$\tilde{\alpha}_{23} = \alpha_{14} = i'\rho_2\sigma_1, \qquad \tilde{\alpha}_{14} = \alpha_{23} = \rho_3\sigma_1, \tag{19,9}$$

где антисимметричный псевдотензор четвертого ранга (псевдоскаляр) имеет составляющие [1])

$$\tilde{\varepsilon}_{1234} = -\tilde{\varepsilon}_{2134} = 1, \quad \tilde{\varepsilon}_{1134} = 0.$$

Аналогичным способом можно доказать, что компоненты тензора, которые при разных значках μ, ν, ε равны

$$\alpha_{\mu\nu\varepsilon} = ii'\rho_1\sigma_\mu\rho_3\sigma_\nu\rho_3\sigma_\varepsilon, \tag{19,10}$$

а при равных хотя бы двух значках обращаются в нуль, образуют антисимметричный тензор третьего ранга.

Вместо антисимметричного тензора третьего ранга можно ввести еще псевдовектор

$$\alpha_{\mu\nu\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}_{\rho\mu\nu\varepsilon}\tilde{\alpha}_\rho. \tag{19,11}$$

Четыре составляющие псевдовектора $\tilde{\alpha}_\rho$ равны

$$\tilde{\alpha}_\rho = \sigma_\rho = \sigma_n, \quad i'\rho_1,$$

причем, как мы уже показали, пространственные составляющие этого псевдотензора характеризуют вектор спина $\boldsymbol{\sigma}$.

Наконец, чтобы найти тензорную размерность матрицы ρ_2, умножим уравнение (19,3) слева на величину $\psi^+\rho_1$:

$$\psi^+ k_0\rho_2\psi = -\psi^+\sigma_\mu\nabla_\mu\psi. \tag{19,12}$$

В правой части равенства (19,12) стоит скалярное произведение псевдовектора σ_μ на вектор ∇_μ, т. е. псевдоскаляр. Поэтому матрица ρ_2 является псевдоскаляром, связанным с отличными от нуля компонентами антисимметричного тензора четвертого ранга соотношением

$$\alpha_{\mu\nu\varepsilon\rho} = \tilde{\varepsilon}_{\mu\nu\varepsilon\rho}\rho_2 = i'\sigma_\mu\rho_3\sigma_\nu\rho_3\sigma_\varepsilon\rho_3\sigma_\rho. \tag{19,13}$$

Таким образом, 16 четырехрядных матриц обладают следующими тензорными размерностями: ρ_3 — скаляр, I, α_n — четырехмерный вектор, $\alpha_{23} = \rho_3\sigma_1$ и т. д., $\alpha_{14} = i'\rho_2\sigma_1$ и т. д. — тензор второго ранга, ρ_1, σ_n — четырехмерный псевдовектор, ρ_2 — псевдоскаляр.

б) Матрицы γ. Матрицы γ_μ, с помощью которых часто формулируется уравнение Дирака, связаны с матрицами α_μ (α_n, $i'I$) соотношением:

$$\gamma_\mu = -i'\rho_3\alpha_\mu = -i'\rho_3\alpha_n, \ \rho_3. \tag{19,14}$$

Матрицы γ_μ подчиняются симметричным (относительно пространственно-временных переменных) правилам антикоммутаций:

$$\gamma_\mu\gamma_{\mu'} + \gamma_{\mu'}\gamma_\mu = 2\delta_{\mu\mu'}. \tag{19,15}$$

---

[1]) Более подробно см., например, «Классическая теория поля», стр. 357.

Вводя четырехмерную составляющую импульса $p_4 = i'E/c$, мы можем уравнение Дирака представить в виде

$$(i' p_\mu \gamma_\mu + m_0 c)\psi = 0, \tag{19,16}$$

$$\bar{\psi}(i' p_\mu \gamma_\mu + m_0 c) = 0, \tag{19,17}$$

где

$$\bar{\psi} = \psi^+ \rho_3. \tag{19,18}$$

Тогда для четырехмерных составляющих плотности тока j_μ, удовлетворяющих уравнению непрерывности

$$\frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu} = 0,$$

мы найдем следующее выражение [см. (17,37)]:

$$j_\mu = -i' e \bar{\psi} \gamma_\mu \psi = -e \psi^+ \alpha_\mu \psi. \tag{19,19}$$

Аналогично для антисимметричного тензора второго ранга, когда $\mu \neq \nu$ (при $\mu = \nu$ его компоненты следует положить равными нулю), мы находим выражение [см. (19,7)]

$$i\psi^+ \alpha_{\mu\nu} \psi = \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_\nu \psi. \tag{19,20}$$

Для антисимметричного тензора третьего ранга [см. (19,10)] (псевдовектора) мы имеем ($\mu \neq \nu \neq \varepsilon$):

$$i\psi^+ \alpha_{\mu\nu\varepsilon} \psi = \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\varepsilon \psi. \tag{19,21}$$

Наконец, для антисимметричного тензора четвертого ранга мы получим ($\mu \neq \nu \neq \varepsilon \neq \rho$):

$$i'\psi^+ \alpha_{\mu\nu\varepsilon\rho} \psi = \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\varepsilon \gamma_\rho \psi. \tag{19,22}$$

Как следует из (19,13), антисимметричный тензор четвертого ранга связан с псевдовектором ρ_2 соотношением

$$\rho_2 = \alpha_{1234}. \tag{19,23}$$

Точно так же мы можем ввести псевдоскалярную матрицу γ_5:

$$\gamma_5 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4, \tag{19,24}$$

которая, как видно из (19,22), связана с матрицей ρ_2 соотношением

$$-i'\psi^+ \rho_2 \psi = \bar{\psi} \gamma_5 \psi.$$

Тогда для псевдовектора, т. е. для антисимметричного тензора третьего ранга [см. (19,11)], мы будем иметь:

$$-i'\psi^+ \sigma_\rho \psi = \bar{\psi} \tilde{\gamma}_\rho \psi = \bar{\psi} \gamma_5 \gamma_\rho \psi. \tag{19,25}$$

Наконец, скалярные величины в этих обозначениях принимают вид

$$\psi^+\rho_3\psi = \bar{\psi}\psi.$$

В дальнейшем матрицами γ_μ мы пользоваться не будем; под γ будет пониматься одна из матриц вида (19,1).

§ 20. Решение уравнения Дирака для свободных частиц[1]

В случае отсутствия внешних полей уравнение Дирака принимает вид

$$\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\hbar c}{i}(\boldsymbol{\alpha}\nabla) - \rho_3 m_0 c^2\right)\psi = 0.$$

Деля последнее выражение на величину $\hbar c$ и вводя обозначение $k_0 = m_0 c/\hbar$, получаем:

$$\left(-\frac{1}{ci}\frac{\partial}{\partial t} - \mathrm{H}_k\right)\psi = 0, \tag{20,1}$$

где H_k — оператор Гамильтона (точнее, гамильтониан, деленный на $\hbar c$):

$$\mathrm{H}_k = \frac{1}{i}(\boldsymbol{\alpha}\nabla) + \rho_3 k_0. \tag{20,2}$$

Нетрудно показать, что оператор[2])

$$\mathrm{S} = \frac{(\sigma\nabla)}{ki} \tag{20,3}$$

коммутирует с оператором Гамильтона H_k (k^2 — собственные значения оператора $(\nabla/i)^2$).

В самом деле, учитывая соотношение (17,29), а также коммутативность матриц σ и ρ друг с другом, имеем:

$$\mathrm{H}_k\mathrm{S} - \mathrm{S}\mathrm{H}_k = -\frac{1}{k}[\rho_1(\sigma\nabla)(\sigma\nabla) - (\sigma\nabla)(\sigma\nabla)\rho_1] = 0. \tag{20,4}$$

Общее решение уравнения (20,1) должно складываться из частных решений, каждое из которых должно подчиняться уравнению

$$\left(ks - \frac{(\sigma\nabla)}{i}\right)\psi_k = 0, \tag{20,5}$$

где s представляет собою собственное значение оператора S. Совместное решение уравнений (20,1) и (20,5) будем искать в виде

$$\psi_k = \frac{1}{L^{3/2}} b e^{-ic\varepsilon Kt + i\mathbf{kr}}, \tag{20,6}$$

---

[1]) А. А. Соколов, Journ. of Phys. 9, 363 (1945).

[2]) Как указано в § 17, оператор проекции спина на ось z имеет вид $\sigma_3\hbar/2$. Поэтому оператор S мы можем рассматривать как удвоенную проекцию спина (в единицах $\hbar$) на направление движения.

где b — четырехрядная матрица

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}, \tag{20,7}$$

L^3 — объем основного параллелепипеда; вектор $\boldsymbol{k}(k_x, k_y, k_z)$ связан с целыми числами n_x, n_y, $n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ соотношениями $k_x = \frac{2\pi}{L} n_x$ и т. д.; $K = \sqrt{k^2 + k_0^2}$, εK — собственное значение оператора $-\frac{1}{ic}\frac{\partial}{\partial t}$: $-\frac{1}{ic}\frac{\partial \psi_k}{\partial t} = \varepsilon K \psi_k$. Если $\varepsilon > 0$, то мы будем иметь положительное значение для энергии, а при $\varepsilon < 0$ — отрицательное.

Подставляя (20,6) в уравнения (20,5) и (20,1), мы получаем следующие уравнения для определения искомой матрицы b, а также значений величин ε и s:

$$\left.\begin{aligned} (ks - (\sigma \boldsymbol{k}))\, b &= 0, \\ (\varepsilon K - s\rho_1 k - \rho_3 k_0)\, b &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{20,8}$$

Эти матричные уравнения можно расписать в виде следующей системы линейных уравнений:

$$(ks - k_3)\, b_{1,3} = k_{12}^{+} b_{2,4}, \tag{20,9а}$$

$$(ks + k_3)\, b_{2,4} = k_{12} b_{1,3}, \tag{20,9б}$$

$$(\varepsilon K - k_0)\, b_{1,2} = skb_{3,4}, \tag{20,9в}$$

$$(\varepsilon K + k_0)\, b_{3,4} = skb_{1,2}, \tag{20,9г}$$

где $k_{12} = k_1 + ik_2$. Из (20,9а) и (20,9б) находим, что $s = \pm 1$. Как видно из (20,3), величина s является собственным значением оператора S, характеризующего проекцию спина на направление движения. При $s = 1$ спин направлен по движению (правый винт), а при $s = -1$ спин направлен против движения (левый винт)[1].

Из (20,9в) и (20,9г) находим, что $\varepsilon = \pm 1$. Случай $\varepsilon = 1$ соответствует положительным энергиям, а $\varepsilon = -1$ — отрицательным. Основываясь на соотношениях (20,9), можно заключить, что матричные элементы амплитуды b будут равны:

$$\left.\begin{aligned} b_1 &= Bk(k + sk_3), & b_2 &= Bskk_{12}, \\ b_3 &= Bs\varepsilon(K - \varepsilon k_0)(k + sk_3), & b_4 &= B\varepsilon(K - \varepsilon k_0)k_{12}, \end{aligned}\right\} \tag{20,10}$$

причем коэффициент B может быть найден из условия нормировки:

$$b_1^{+} b_1 + b_2^{+} b_2 + b_3^{+} b_3 + b_4^{+} b_4 = 1. \tag{20,11}$$

[1] Это относится к частицам как с положительной, так и с отрицательной энергией [см. ниже, (23,24)].

Принимая во внимание, что

$$k=\sqrt{(K+\varepsilon k_0)(K-\varepsilon k_0)},\quad k_3=k\cos\theta,\quad k_{12}=k\sin\theta\, e^{i\varphi},\tag{20,12}$$

найдем следующее значение матрицы b, являющейся функцией $\boldsymbol{k}$, s и ε:

$$b(\boldsymbol{k}, s, \varepsilon)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} f(\varepsilon K)\cos\theta_s \\ f(\varepsilon K)\sin\theta_s e^{i\varphi} \\ s\varepsilon f(-\varepsilon K)\cos\theta_s \\ s\varepsilon f(-\varepsilon K)\sin\theta_s e^{i\varphi}\end{pmatrix},\tag{20,13}$$

где

$$f(\varepsilon K)=\sqrt{1+\frac{k_0}{\varepsilon K}},\qquad \theta_s=\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}(1-s).\tag{20,14}$$

В нерелятивистском приближении ($K=k_0$) для положительной энергии ($\varepsilon=1$) в нуль обращаются матричные элементы b_3 и b_4, а для отрицательных энергий ($\varepsilon=-1$) — матричные элементы b_1 и b_2.

С помощью (20,13) легко вывести следующие соотношения:

$$\sum_{s,\,\varepsilon=\pm 1} b_{\nu'}^{+}(\boldsymbol{k}, s, \varepsilon)\, b_\nu(\boldsymbol{k}, s, \varepsilon)=\delta_{\nu\nu'},\tag{20,15}$$

$$\sum_{\nu=1}^{4} b_\nu^{+}(\boldsymbol{k}, s', \varepsilon')\, b_\nu(\boldsymbol{k}, s, \varepsilon)=\delta_{ss'}\delta_{\varepsilon\varepsilon'}.\tag{20,16}$$

Таким образом, при заданном $\boldsymbol{k}$ возможны четыре состояния для волновых функций ($s=\pm 1$, $\varepsilon=\pm 1$), которые являются ортогональными друг другу.

Общее решение уравнения Дирака в случае отсутствия внешнего поля может быть представлено в виде

$$\psi=\frac{1}{L^{3/2}}\sum_{s,\,\varepsilon,\,\boldsymbol{k}} C(\boldsymbol{k}, s, \varepsilon)\, b(\boldsymbol{k}, s, \varepsilon)\, e^{-ic\varepsilon Kt+i\boldsymbol{kr}},\tag{20,17}$$

причем величина $C^{+}C$ характеризует вероятность нахождения частицы в состоянии $\boldsymbol{k}$, s, ε.

§ 21. Вычисление матричных элементов

При исследовании вопросов, связанных с переходом частицы из одного состояния ($\boldsymbol{k}$, s, ε) в другое ($\boldsymbol{k}'$, s', ε'), нам будет необходимо вычислять следующие квадратичные формы матричных элементов:

$$<\gamma', \gamma>=b^{+}(\boldsymbol{k}, s, \varepsilon)\,\gamma' b(\boldsymbol{k}', s', \varepsilon')\, b^{+}(\boldsymbol{k}', s', \varepsilon')\,\gamma b(\boldsymbol{k}, s, \varepsilon),\tag{21,1}$$

где γ' и γ являются любыми из 16 матриц спинорных уравнений.

Как было показано в предыдущем параграфе, амплитуды b удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\left.\begin{aligned}\left(1-\rho_1\varepsilon s\frac{k}{K}-\varepsilon\rho_3\frac{k_0}{K}\right)b(\boldsymbol{k}, s, \varepsilon)=0,\\ \left(1-s\frac{(\sigma\boldsymbol{k})}{k}\right)b(\boldsymbol{k}, s, \varepsilon)=0.\end{aligned}\right\} \quad (21,2)$$

Отсюда следует

$$\frac{1}{4}\left(1+\rho_1\varepsilon s\frac{k}{K}+\varepsilon\rho_3\frac{k_0}{K}\right)\left(1+s\frac{(\sigma\boldsymbol{k})}{k}\right)b(\boldsymbol{k}, s_1, \varepsilon_1)= \\ =\delta_{ss_1}\delta_{\varepsilon\varepsilon_1}b(\boldsymbol{k}, s, \varepsilon). \quad (21,3)$$

Поэтому формула (21,1) может быть представлена в виде

$$<\gamma', \gamma>=\frac{1}{16}\sum_{s_1, \varepsilon_1, s_1', \varepsilon_1'} b^+(\boldsymbol{k}, s_1, \varepsilon_1)\times \\ \times\gamma'\left(1+\rho_1\varepsilon' s'\frac{k'}{K'}+\varepsilon'\rho_3\frac{k_0}{K'}\right)\left(1+s'\frac{(\sigma\boldsymbol{k}')}{k'}\right)\times \\ \times b(\boldsymbol{k}', s_1', \varepsilon_1')\,b^+(\boldsymbol{k}', s_1', \varepsilon_1')\times \\ \times\gamma\left(1+\rho_1\varepsilon s\frac{k}{K}+\varepsilon\rho_3\frac{k_0}{K}\right)\left(1+s\frac{(\sigma\boldsymbol{k})}{k}\right)b(\boldsymbol{k}, s_1, \varepsilon_1). \quad (21,4)$$

Для вычисления выражения (21,4) прежде всего найдем сумму вида

$$\sum_{s_1', \varepsilon_1'} b'(s_1', \varepsilon_1')\,b'^+(s_1', \varepsilon_1')=\sum_{s_1', \varepsilon_1'}\begin{pmatrix}b_1'\\ b_2'\\ b_3'\\ b_4'\end{pmatrix}(b_1'^+b_2'^+b_3'^+b_4'^+). \quad (21,5)$$

Согласно (20,15) имеем:

$$\sum_{s_1', \varepsilon_1'} b_\nu'(s_1', \varepsilon_1')\,b_{\nu'}'^+(s_1', \varepsilon_1')=\delta_{\nu\nu'}, \quad (21,6)$$

т. е. матрица (21,5) представляет собою единичную матрицу:

$$\sum_{s_1', \varepsilon_1'} b'b'^+=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}. \quad (21,7)$$

Таким образом, соотношение (21,4) принимает более простой вид:

$$<\gamma', \gamma>=\sum_{s_1, \varepsilon_1} b^+(\boldsymbol{k}, s_1, \varepsilon_1)\,\beta b(\boldsymbol{k}, s_1, \varepsilon_1), \quad (21,8)$$

где

$$\beta = \frac{1}{16}\gamma'\left(1 + \rho_1\varepsilon' s' \frac{k'}{K'} + \rho_3\varepsilon' \frac{k_0}{K'}\right)\left(1 + s' \frac{(\sigma k')}{k'}\right)\gamma \times$$
$$\times \left(1 + \rho_1 \varepsilon s \frac{k}{K} + \rho_3 \varepsilon \frac{k_0}{K}\right)\left(1 + s \frac{(\sigma k)}{k}\right). \quad (21,9)$$

Найдем, далее, матричные элементы выражения (21,8):

$$< \gamma', \gamma >_{\mu\mu'} = \sum_{s_1, \varepsilon_1} (b^+\beta)_{\mu\nu} b_{\nu\mu'} = \sum_{s_1, \varepsilon_1} b^+_{\mu\nu'} \beta_{\nu'\nu} b_{\nu\mu'}. \quad (21,10)$$

Принимая во внимание, что матрица b^+ состоит из одной строки, а матрица b — из одного столбца, т. е.

$$b^+_{\mu\nu'} = \delta_{\mu 1} b^+_{\nu'}, \qquad b_{\nu\mu'} = \delta_{\mu' 1} b_\nu,$$

получим:

$$< \gamma', \gamma >_{\mu\mu'} = \delta_{\mu 1}\delta_{\mu' 1}\beta_{\nu'\nu} \sum_{s_1, \varepsilon_1} b^+_{\nu'}(s_1, \varepsilon_1)\, b_\nu (s_1, \varepsilon_1). \quad (21,11)$$

Отсюда мы видим, что у искомого матричного элемента отличным от нуля будет лишь один элемент ($\mu = \mu' = 1$), т. е. выражение $< \gamma', \gamma >$ является числом. С помощью соотношения (20,15) находим:

$$< \gamma', \gamma > = < \gamma', \gamma >_{11} = \beta_{\nu'\nu}\delta_{\nu'\nu} = \beta_{\nu\nu} = \mathrm{Sp}\,\beta,$$

где $\mathrm{Sp}\,\beta$, по определению, есть сумма диагональных членов матрицы β.

Подставляя сюда вместо матрицы β выражение (21,9), получаем:

$$< \gamma', \gamma > = \mathrm{Sp}\,\frac{1}{16}\gamma'\left(1 + \rho_1\varepsilon' s' \frac{k'}{K'} + \rho_3\varepsilon' \frac{k_0}{K'}\right) \times$$
$$\times \left(1 + s' \frac{(\sigma k')}{k'}\right)\gamma\left(1 + \rho_1\varepsilon s \frac{k}{K} + \rho_3 \varepsilon \frac{k_0}{K}\right)\left(1 + s \frac{(\sigma k)}{k}\right). \quad (21,12)$$

Нетрудно показать, что из всех шестнадцати матриц Дирака диагональная сумма только единичной матрицы отлична от нуля и равна четырем. Поэтому после перемножения всех матриц в правой части равенства (21,12) мы должны оставить лишь члены, пропорциональные единичной матрице.

Мы сможем составить таблицу для вычисления равенства (21,12), если введем следующие обозначения для независимых шестнадцати матриц [см. (19,1)]:

$$\gamma_{\mu\nu} = \rho_\mu \sigma_\nu = \sigma_\nu \rho_\mu, \quad (21,13)$$

причем $\rho_4 = \sigma_4 = I$ (единичная матрица), а под матрицей σ_n будем понимать выражение (σn), где n — единичный вектор любого трехмерного направления. Обычные матрицы $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ можно получить, если направить вектор n соответственно по осям x, y или z. Как видно из (21,13), матрицы ρ_μ должны коммутировать с матрицами σ_ν.

Заменим матрицы γ' и γ матрицами, представленными в виде (21,13), а также примем во внимание соотношение

$$\operatorname{Sp} \rho_\mu \sigma_\nu = \frac{1}{4} \operatorname{Sp} \rho_\mu \operatorname{Sp} \sigma_\nu, \tag{21,14}$$

которое легко получить из равенств

$$\operatorname{Sp} \rho_\mu = 4\delta_{4\mu}, \qquad \operatorname{Sp} \sigma_\nu = 4\delta_{4\nu}, \qquad \operatorname{Sp} \rho_\mu \sigma_\nu = 4\delta_{4\mu}\delta_{4\nu}.$$

Тогда выражение (21,12) можно разбить на произведение двух диагональных сумм вида (21,14):

$$< \gamma_{\mu'\nu'}, \gamma_{\mu\nu} > = \frac{1}{4} \rho_{\mu'\mu} \sigma_{\nu'\nu}. \tag{21,15}$$

Здесь

$$\left.\begin{aligned} \rho_{\mu'\mu} &= \frac{1}{4} \operatorname{Sp} \rho_{\mu'} \left(1 + \varepsilon' s' \rho_1 \frac{k'}{K'} + \varepsilon' \rho_3 \frac{k_0}{K'}\right) \rho_\mu \times \\ &\qquad\qquad \times \left(1 + \varepsilon s \rho_1 \frac{k}{K} + \varepsilon \rho_3 \frac{k_0}{K}\right); \\ \sigma_{\nu'\nu} &= \frac{1}{4} \operatorname{Sp} \sigma_{\nu'} \left(1 + s' \frac{(\sigma k')}{k'}\right) \sigma_\nu \left(1 + s \frac{(\sigma k)}{k}\right). \end{aligned}\right\} \tag{21,16}$$

В зависимости от различных комбинаций индексов μ' и μ величина $\rho_{\mu'\mu}$ может принимать шестнадцать значений, которые мы расположим в следующую таблицу [1]):

$$\left.\begin{aligned} &\left.\begin{matrix} \rho_{11} \\ \rho_{22} \\ \rho_{33} \\ \rho_{44} \end{matrix}\right\} = 1 \pm_{\mp} \varepsilon\varepsilon' s s' \frac{kk'}{KK'} \,{}^{-}_{\mp}{}_{+}\, \varepsilon\varepsilon' \frac{k_0^2}{KK'}, \\ &\left.\begin{matrix} -i\rho_{12} = i\rho_{21} \\ \rho_{34} = \rho_{43} \end{matrix}\right\} = \frac{\varepsilon k_0}{K} \mp \frac{\varepsilon' k_0}{K'}, \\ &\left.\begin{matrix} \rho_{13} = \rho_{31} \\ -i\rho_{24} = i\rho_{42} \end{matrix}\right\} = \frac{\varepsilon\varepsilon' s k_0 k}{KK'} \pm \frac{\varepsilon\varepsilon' s' k_0 k'}{KK'}, \\ &\left.\begin{matrix} \rho_{14} = \rho_{41} \\ -i\rho_{23} = i\rho_{32} \end{matrix}\right\} = \frac{\varepsilon s k}{K} \pm \frac{\varepsilon' s' k'}{K'}. \end{aligned}\right\} \tag{21,17}$$

---

[1]) Этой таблицей также оказывается удобно пользоваться, когда мы хотим учесть продольную поляризацию электрона. В последнее время появились основания считать, что нейтрино отличается от антинейтрино величиной проекции спина на направление движения, т. е., на языке излагаемой теории, величиной s. Таким образом, формулы, учитывающие направление спина, могут найти новое неожиданное применение. Более подробно см. § 23, п. е).

Для $\sigma_{\nu\nu'}$ аналогичным способом найдем:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{44} &= 1 + ss'\frac{(\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}')}{kk'},\\
\sigma_{nn'} &= (\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}')\left(1 - ss'\frac{(\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}')}{kk'}\right) + \\
&\quad + \frac{i}{kk'}((sk'\boldsymbol{k} - s'k\boldsymbol{k}')[\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}']) + ss'\frac{k_n k'_{n'} + k_{n'}k'_n}{kk'},\\
\left.\begin{matrix}\sigma_{n4}\\ \sigma_{4n}\end{matrix}\right\} &= \frac{sk'k_n + s'kk'_n}{kk'} \mp \frac{iss'(\boldsymbol{n}[\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'])}{kk'}.
\end{aligned}\right\} \quad (21,18)$$

Отсюда видно, что при переходе к нерелятивистскому приближению полезно учесть следующие правила:

1) Если частица переходит из одного состояния в другое с тем же знаком энергии ($\varepsilon\varepsilon' = 1$), то матричные элементы, пропорциональные матрицам ρ_1 или ρ_2, имеют порядок v/c по сравнению с матричными элементами, пропорциональными матрицам ρ_3 и $\rho_4 = I$, и следовательно, в нерелятивистском случае величины, пропорциональные ρ_{11} и ρ_{22}, пренебрежимо малы. В самом деле, как видно из формул (21,17),

$$\rho_{33} \sim \rho_{44} \sim 1, \quad \rho_{11} \sim \rho_{22} \sim \frac{k^2}{K^2}.$$

2) Если частица переходит из одного состояния в другое с противоположным знаком энергии ($\varepsilon\varepsilon' = -1$), т. е. из состояния с положительной энергией в состояние с отрицательной энергией, или наоборот, то легко показать, что матричные элементы, пропорциональные ρ_3 и I, будут иметь порядок v/c по сравнению с матричными элементами, пропорциональными ρ_1 и ρ_2.

В самом деле, как следует из формул (21,17) при $\varepsilon\varepsilon' = -1$,

$$\rho_{11} \sim \rho_{22} \sim 1, \quad \rho_{33} \sim \rho_{44} \sim \frac{k^2}{K^2}.$$

Если в рассматриваемой задаче частица обладает равновероятными значениями для направления спина, то мы должны усреднить квадратичную форму матричного элемента по спиновым состояниям s и s':

$$\overline{f} = \frac{1}{4}\sum_{s,\, s' = -1,\, +1} f(s, s'). \quad (21,19)$$

Отсюда видно, что при усреднении члены, пропорциональные s, s' и ss', обращаются в нуль, а члены, не зависящие от s и s', дают единицу.

В качестве примера вычислим среднее значение матричного элемента $<I, I>$. Согласно выведенным формулам имеем:

$$\overline{<I, I>} = \frac{1}{4}\overline{\rho_{44}\sigma_{44}} =$$

$$= \frac{1}{16}\sum_{\varepsilon, \varepsilon' = -1, +1}\left(1 + \varepsilon\varepsilon' ss' \frac{kk'}{KK'} + \varepsilon\varepsilon' \frac{k_0^2}{KK'}\right)\left(1 + ss' \frac{(\boldsymbol{kk}')}{kk'}\right),$$

или, окончательно,

$$\overline{<I, I>} = \frac{1}{4}\left(1 + \varepsilon\varepsilon' \frac{(\boldsymbol{kk}') + k_0^2}{KK'}\right). \tag{21,20}$$

Аналогичным способом могут быть найдены другие средние значения квадратичных форм матричных элементов.

Заметим, что для вычисления средних значений квадратов матричных элементов мы можем произвести усреднение с помощью формулы (21,19) непосредственно в выражении (21,12). Тогда будем иметь формулу Казимира:

$$\overline{<\gamma', \gamma>} = \frac{1}{16}\,\mathrm{Sp}\,\gamma'\left(1 + \varepsilon' \frac{(\boldsymbol{\alpha k}') + \rho_3 k_0}{K'}\right)\gamma\left(1 + \varepsilon \frac{(\boldsymbol{\alpha k}) + \rho_3 k_0}{K}\right). \tag{21,21}$$

В частности, подставляя сюда вместо матриц γ' и γ единичные матрицы, мы вновь получим формулу (21,20).

§ 22. Вариационные методы

При изложении вопросов, связанных со вторичным квантованием, необходимо развить вариационные методы для спинорных уравнений, точно так же, как это было сделано при квантовании скалярных и максвелловских уравнений.

Для составления функции Лагранжа, тензора энергии и тензора спина спинорных уравнений проще всего ввести систему координат с мнимой четвертой составляющей ($x_4 = i'ct$). Тогда уравнение Дирака можно записать в виде

$$-\hbar c\left(\frac{1}{i}\alpha_\mu\psi_\mu + k_0\rho_3\psi\right) = 0, \tag{22,1}$$

где

$$\psi_\mu = \frac{\partial\psi}{\partial x_\mu}, \quad k_0 = \frac{m_0 c}{\hbar}. \tag{22,2}$$

Из уравнения (22,1) следует

$$\alpha_\mu\psi_\mu = -ik_0\rho_3\psi. \tag{22,3}$$

Аналогично для комплексно-сопряженного уравнения имеем:

$$\psi_\mu^+\alpha_\mu = ik_0\psi^+\rho_3. \tag{22,4}$$

а) Функция Лагранжа. Подберем плотность функции Лагранжа L таким образом, чтобы уравнения Дирака явились бы следствием вариационного принципа

$$\delta \int L\, d^4x = 0, \tag{22,5}$$

т. е. уравнения для волновых функций ψ и ψ^+ получились бы соответственно из условий

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta L}{\delta \psi^+} &= \frac{\partial L}{\partial \psi^+} - \frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial L}{\partial \psi_\mu^+} = 0, \\ \frac{\delta L}{\delta \psi} &= \frac{\partial L}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial L}{\partial \psi_\mu} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{22,6}$$

Можно выбрать следующие выражения для плотности функции Лагранжа:

$$\left.\begin{aligned} L' &= -\hbar c \psi^+ \left(\frac{1}{i}\alpha_\mu \psi_\mu + k_0 \rho_3 \psi\right), \\ L'' &= -\hbar c \left(-\frac{1}{i}\psi_\mu^+ \alpha_\mu + k_0 \psi^+ \rho_3\right)\psi. \end{aligned}\right\} \tag{22,7}$$

Поскольку оба эти выражения отличаются друг от друга на величину, равную четырехмерной расходимости

$$L' - L'' = -\hbar c \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\psi^+ \alpha_\mu \psi,$$

которая, как известно, может быть отброшена, мы можем положить плотность функции Лагранжа равной любой линейной комбинации функций L' и L''.

В частности, оказывается удобным выбрать симметричный вид относительно ψ и ψ^+:

$$L = \frac{1}{2}(L' + L'') = -\hbar c \left(\frac{1}{2i}\psi^+ \alpha_\mu \psi_\mu - \frac{1}{2i}\psi_\mu^+ \alpha_\mu \psi + k_0 \psi^+ \rho_3 \psi\right). \tag{22,8}$$

Отсюда с помощью уравнений (22,6) получаем спинорные уравнения (22,3) и (22,4).

Заметим, что для реальных движений, подчиняющихся уравнениям (22,3) и (22,4), плотность функции Лагранжа обращается в нуль; однако это ни в коей мере не означает, что все ее вариации по функциям ψ и ψ_μ также обращаются в нуль.

б) Тензор энергии. Найдем компоненты тензора энергии, связанные с лагранжианом L соотношением [см., например, (3,11)]

$$T_{\mu\nu} = \psi_\mu^+ \frac{\partial L}{\partial \psi_\nu^+} + \frac{\partial L}{\partial \psi_\nu}\psi_\mu - L\delta_{\mu\nu}, \tag{22,9}$$

и удовлетворяющие закону сохранения

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0. \tag{22,10}$$

Принимая во внимание соотношения

$$\frac{\partial L}{\partial \psi_\nu^+} = \frac{\hbar c}{2i}\alpha_\nu \psi, \quad \frac{\partial L}{\partial \psi_\nu} = -\frac{\hbar c}{2i}\psi^+\alpha_\nu, \quad L = 0,$$

имеем для искомых компонент следующие выражения:

$$T_{\mu\nu} = -\frac{\hbar c}{2i}\left(\psi^+\alpha_\nu\psi_\mu - \psi_\mu^+\alpha_\nu\psi\right). \tag{22,11}$$

В частности, из (22,11) находим компоненты плотности энергии u и плотности импульса g_n системы

$$\left.\begin{aligned} u = T_{44} &= -\frac{\hbar c}{2i}\left(\psi^+\alpha_4\psi_4 - \psi_4^+\alpha_4\psi\right) = \\ &= -\frac{\hbar c}{2i}\left(\psi^+\frac{\partial\psi}{c\,\partial t} - \frac{\partial\psi^+}{c\,\partial t}\psi\right), \\ g_n = \frac{i'}{c}T_{n4} &= \frac{\hbar}{2i}\left(\psi^+\psi_n - \psi_n^+\psi\right), \end{aligned}\right\} \tag{22,12}$$

причем для полной энергии

$$H = U = \int T_{44} d^3x \tag{22,13}$$

и полного импульса поля

$$G_n = \int \frac{i'}{c} T_{n4}\, d^3x \tag{22,13a}$$

имеют место законы сохранения.

в) Тензор спина. Наряду с компонентами канонического тензора энергии, которые в данном случае не являются симметричными ($T_{\mu\nu} \neq T_{\nu\mu}$), мы можем получить компоненты метрического тензора энергии $T'_{\mu\nu}$, которые всегда должны быть симметричными. Эти компоненты могут быть получены путем добавления к компонентам канонического тензора расходимости от некоторого тензора третьего ранга (см. также § 4)

$$f_{\mu[\nu\lambda]} = -f_{\mu[\lambda\nu]},$$

образованного таким образом, чтобы величины

$$T'_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{\partial}{\partial x_\lambda} f_{\mu[\nu\lambda]} \tag{22,14}$$

представляли собой симметричный тензор. Тогда в силу тождественного соотношения

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\nu \partial x_\lambda} f_{\mu[\nu\lambda]} \equiv 0$$

компоненты метрического тензора энергии также будут удовлетворять законам сохранения:

$$\frac{\partial T'_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0.$$

Для решения указанной задачи функцию f мы должны выбрать в виде антисимметричного тензора третьего ранга

$$f_{\mu\,[\nu\lambda]} = \frac{\hbar c}{4l'} \psi^+ \alpha_{\mu\nu\lambda}\psi, \tag{22,15}$$

где

$$\alpha_{\mu\nu\lambda} = \begin{cases} il'\rho_1\sigma_\mu\rho_3\sigma_\nu\rho_3\sigma_\lambda, & \text{когда все три значка разные,} \\ 0, & \text{когда хотя бы два значка одинаковые.} \end{cases} \tag{22,16}$$

Из (22,16) видно, что

$$\alpha_{\mu\nu\lambda} = -\alpha_{\mu\lambda\nu} = -\alpha_{\nu\mu\lambda}.$$

Найдем расходимость тензора (22,15), учитывая последние соотношения:

$$\frac{\partial f_{\mu\,[\nu\lambda]}}{\partial x_\lambda} = -\frac{\hbar c}{4i} \sum_\lambda{}'' (\psi_\lambda^+ \alpha_\lambda \rho_3 \sigma_\mu \rho_3 \sigma_\nu \psi + \psi^+ \sigma_\mu \rho_3 \sigma_\nu \rho_3 \alpha_\lambda \psi_\lambda). \tag{22,17}$$

Два штриха, поставленные у суммы, означают, что в этой сумме согласно (22,16) мы должны исключить два члена, для которых $\lambda = \mu$ и $\lambda = \nu$.

Из равенств (22,3) и (22,4) следует

$$\left.\begin{aligned} \sum{}'' \alpha_\lambda \psi_\lambda &= -\alpha_\mu \psi_\mu - \alpha_\nu \psi_\nu - ik_0 \rho_3 \psi, \\ \sum{}'' \psi_\lambda^+ \alpha_\lambda &= -\psi_\mu^+ \alpha_\mu - \psi_\nu^+ \alpha_\nu + ik_0 \psi^+ \rho_3, \end{aligned}\right\} \tag{22,18}$$

причем в правых частях суммирования по значкам μ и ν нет.

Подставляя (22,18) в (22,17) и принимая во внимание тождество

$$\alpha_\mu \rho_3 \sigma_\mu \rho_3 = \rho_1, \tag{22,19}$$

получаем:

$$\frac{\partial f_{\mu\,[\nu\lambda]}}{\partial x_\lambda} = \frac{\hbar c}{4i} (\psi^+ \alpha_\mu \psi_\nu - \psi_\nu^+ \alpha_\mu \psi - \psi^+ \alpha_\nu \psi_\mu + \psi_\mu^+ \alpha_\nu \psi). \tag{22,20}$$

Отсюда с помощью (22,14) находим выражение для метрического тензора энергии:

$$T'_{\mu\nu} = -\frac{\hbar c}{4i} (\psi^+ \alpha_\nu \psi_\mu - \psi_\mu^+ \alpha_\nu \psi + \psi^+ \alpha_\mu \psi_\nu - \psi_\nu^+ \alpha_\mu \psi). \tag{22,21}$$

Для плотности энергии из (22,21) получим старое выражение (22,12).

Поскольку компоненты канонического тензора энергии не являются симметричными, мы должны ожидать, что поле спинорных частиц обладает «собственным» моментом.

Согласно (4,14) для тензора плотности «собственного» момента количества движения поля имеем:

$$s_{[\mu\nu]\,\lambda} = \frac{l'}{c} (f_{\mu\,[\nu\lambda]} - f_{\nu\,[\mu\lambda]}) = \frac{\hbar}{2} \psi^+ \alpha_{\mu\nu\lambda} \psi. \tag{22,22}$$

Отсюда для пространственных составляющих тензора спина имеем:

$$s_x = s_{[23]4} = \frac{\hbar}{2}\psi^+\alpha_{234}\psi \quad \text{и т. д.}$$

Из формулы (22,16) находим:

$$\alpha_{234} = ii'\rho_1\sigma_2\rho_3\sigma_3\rho_3 i'\rho_1 = -i\sigma_2\sigma_3 = \sigma_1. \qquad (22,23)$$

Поэтому

$$s_x = \frac{\hbar}{2}\psi^+\sigma_1\psi. \qquad (22,24)$$

Аналогичным способом получаем:

$$s_y = \frac{\hbar}{2}\psi^+\sigma_2\psi, \qquad s_z = \frac{\hbar}{2}\psi^+\sigma_3\psi. \qquad (22,25)$$

г) Четырехмерная плотность тока. Мы можем с помощью плотности функции Лагранжа найти также плотность четырехмерного тока. Для этого следует включить в лагранжиан спинорного уравнения электромагнитные потенциалы [по правилу (10,7)], т. е.

$$L = -\hbar c\left[\frac{1}{2i}\psi^+\alpha_\mu\left(\nabla_\mu + \frac{ie}{\hbar c}A_\mu\right)\psi - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2i}\left(\nabla_\mu - \frac{ie}{\hbar c}A_\mu\right)\psi^+\alpha_\mu\psi + k_0\psi^+\rho_3\psi\right]. \qquad (22,26)$$

Тогда, варьируя лагранжиан L по потенциалам A_μ, найдем компоненты четырехмерной плотности тока:

$$j_\mu = \frac{\partial L}{\partial A_\mu} = -e\psi^+\alpha_\mu\psi.$$

Отсюда для плотности заряда и плотности тока получим:

$$\rho = \frac{j_4}{i'} = -e\psi^+\psi, \qquad \boldsymbol{j} = -e\psi^+\boldsymbol{\alpha}\psi, \qquad (22,27)$$

что совпадает с результатом, найденным нами в § 17.

С помощью закона сохранения для четырехмерной плотности тока,

$$\frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu} = 0,$$

легко показать, что полный заряд будет оставаться постоянной величиной

$$\int \rho\, d^3x = -e. \qquad (22,28)$$

§ 23. Квантование спинорного уравнения

а) Энергия, заряд и спин поля. Прежде чем произвести вторичное квантование уравнения Дирака, определим полную энергию (функцию Гамильтона H), полный заряд $e_{\text{полн}}$, спин $S_{\text{полн}}$ и импульс G поля.

Согласно формуле (22,13) имеем для функции Гамильтона H следующее выражение:

$$H = -\frac{\hbar c}{2i}\int\left(\psi^+ \frac{\partial\psi}{c\,\partial t} - \frac{\partial\psi^+}{c\,\partial t}\psi\right) d^3x. \tag{23,1}$$

Подставляя сюда общее решение для волновых функций [см. (20,17)]

$$\left.\begin{aligned} \psi^+ &= \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{s',\,\varepsilon',\,k'} C^+(s',\,\varepsilon',\,\boldsymbol{k}')\,b^+(s',\,\varepsilon',\,\boldsymbol{k}')\,e^{ic\varepsilon' K' t - i\boldsymbol{k}'\boldsymbol{r}}, \\ \psi &= \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{s,\,\varepsilon,\,k} C(s,\,\varepsilon,\,\boldsymbol{k})\,b(s,\,\varepsilon,\,\boldsymbol{k})\,e^{-ic\varepsilon K t + i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}} \end{aligned}\right\} \tag{23,2}$$

и принимая во внимание условия (20,16) и (5,10), получаем:

$$H = \sum_{s,\,\varepsilon,\,k} c\hbar\varepsilon K C^+(s,\,\varepsilon,\,\boldsymbol{k})\,C(s,\,\varepsilon,\,\boldsymbol{k}). \tag{23,3}$$

Аналогичным способом с помощью формулы (22,28) находим полный заряд поля:

$$e_{\text{полн}} = -e\sum_{s,\,\varepsilon,\,k} C^+(s,\,\varepsilon,\,\boldsymbol{k})\,C(s,\,\varepsilon,\,\boldsymbol{k}). \tag{23,4}$$

С помощью формул (20,3) и (5,10) находим выражение для проекции полного спина на направление движения:

$$S_{\text{полн}} = \frac{\hbar}{2}\int \psi^+ \frac{(\sigma\nabla)}{ik}\psi\, d^3x, \tag{23,5}$$

где величина k^2 есть собственное значение оператора $(\nabla/i)^2$. Подставляя сюда вместо ψ разложение (23,2) и принимая во внимание соотношение (20,5), найдем:

$$S_{\text{полн}} = \sum_{s,\,\varepsilon,\,k} \frac{\hbar s}{2} C^+(s,\,\varepsilon,\,\boldsymbol{k})\,C(s,\,\varepsilon,\,\boldsymbol{k}). \tag{23,6}$$

Согласно (22,12) и (22,13а) имеем для полного импульса поля

$$\boldsymbol{G} = \frac{\hbar}{2i}\int (\psi^+(\nabla\psi) - (\nabla\psi^+)\psi)\, d^3x,$$

или, в компонентах Фурье:

$$\boldsymbol{G} = \sum_{s,\,\varepsilon,\,k} \hbar\boldsymbol{k} C^+(s,\,\varepsilon,\,\boldsymbol{k})\,C(s,\,\varepsilon,\,\boldsymbol{k}). \tag{23,7}$$

Из этих формул видно, что произведение C^+C характеризует вероятность нахождения частицы в рассматриваемом состоянии, причем

для заданного значения импульса $\hbar \boldsymbol{k}$ имеем четыре различных состояния:

$$1)\ \varepsilon=1, \quad s=1,$$
$$2)\ \varepsilon=1, \quad s=-1,$$
$$3)\ \varepsilon=-1, \quad s=1,$$
$$4)\ \varepsilon=-1, \quad s=-1.$$

Состояния с отрицательной энергией ($\varepsilon=-1$) при переходе к нерелятивистской квантовой теории не имеют физического смысла и поэтому, как правило, просто отбрасываются, т. е. соответствующие амплитуды приравниваются нулю. Однако в теории вторичного квантования состояния с отрицательной энергией получают вполне определенный физический смысл и указывают на существование наряду с обычными частицами также и так называемых античастиц, обладающих противоположным знаком заряда (точнее, изотопического спина). Учитывая состояния с отрицательной энергией, Дираку удалось предсказать существование новой элементарной частицы — позитрона, которая была впоследствии открыта экспериментально.

б) Вторичное квантование уравнений Дирака по Бозе—Эйнштейну. Квантование спинорных уравнений мы можем произвести с помощью квантовых уравнений движения (8,3), которые для нашего случая принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} -icK\varepsilon C(s, \varepsilon, \boldsymbol{k}) &= \frac{i}{\hbar}\left(HC(s, \varepsilon, \boldsymbol{k}) - C(s, \varepsilon, \boldsymbol{k})H\right), \\ icK\varepsilon C^{+}(s, \varepsilon, \boldsymbol{k}) &= \frac{i}{\hbar}\left(HC^{+}(s, \varepsilon, \boldsymbol{k}) - C^{+}(s, \varepsilon, \boldsymbol{k})H\right). \end{aligned}\right\} \tag{23,8}$$

Учитывая еще выражение для функции Гамильтона

$$H = \sum_{s', \varepsilon', \boldsymbol{k}'} c\hbar\varepsilon' K' C^{+}(s', \varepsilon', \boldsymbol{k}') C(s', \varepsilon', \boldsymbol{k}'), \tag{23,9}$$

легко видеть, что уравнение (23,8) имеет два решения.

Первое решение связано со статистикой Бозе. В этом случае перестановочные соотношения:

$$[C(s, \varepsilon, \boldsymbol{k}),\ C^{+}(s', \varepsilon', \boldsymbol{k}')]_{-} = \delta_{\varepsilon\varepsilon'}\delta_{ss'}\delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}. \tag{23,9a}$$

Связь между амплитудами C и числом частиц N в случае статистики Бозе была нами подробно исследована в § 8.

Из соотношения (23,9a) легко найти следующие собственные значения для квадратов амплитуд:

$$\left.\begin{aligned} C^{+}(s, 1, \boldsymbol{k})C(s, 1, \boldsymbol{k}) &= N(s, \boldsymbol{k}), \\ C(s, 1, \boldsymbol{k})C^{+}(s, 1, \boldsymbol{k}) &= 1 + N(s, \boldsymbol{k}), \\ C(s, -1, \boldsymbol{k})C^{+}(s, -1, \boldsymbol{k}) &= 1 + \tilde{N}(s, \boldsymbol{k}), \\ C^{+}(s, -1, \boldsymbol{k})C(s, -1, \boldsymbol{k}) &= \tilde{N}(s, \boldsymbol{k}). \end{aligned}\right\} \tag{23,10}$$

Подставляя (23,10) в выражение для полной энергии (23,9), имеем:

$$H = \sum_{s,\,k} c\hbar K (N(s,\ \boldsymbol{k}) - \tilde{N}(s,\ \boldsymbol{k})). \tag{23,10a}$$

Отсюда видно, что квантование спинорных уравнений по Бозе — Эйнштейну приводит к трудности, связанной с отрицательной энергией, которую принимают античастицы ($\varepsilon = -1$).

в) Вторичное квантование спинорных уравнений по Ферми — Дираку[1]. Для устранения трудностей с отрицательной энергией Дирак предложил воспользоваться принципом запрета Паули, согласно которому в каждом состоянии может находиться не более одной частицы.

Согласно этому представлению состояния с отрицательной энергией должны быть все заняты (более подробно см. § 38). Свободный же отрицательный уровень, или так называемая «дырка» ведет себя по отношению к вакууму как частица с положительной энергией, но противоположным зарядом (античастица, например позитрон, см. ниже).

Теория «дырок» не вполне симметрична относительно знака заряда. Метод вторичного квантования, связанный со статистикой Ферми — Дирака, позволяет, оставляя математическую сторону теории «дырок» без изменений, придать всей теории симметричную форму.

Для того чтобы при квантовании спинорных уравнений найти решение, связанное со статистикой Ферми—Дирака, преобразуем уравнения (23,8) к виду

$$\begin{aligned} -icK\varepsilon C &= \sum_{s',\,\varepsilon',\,k'} icK'\varepsilon' (C'^{+}(C'C + CC') - (C'^{+}C + CC'^{+})\,C'), \\ icK\varepsilon C^{+} &= \sum_{s',\,\varepsilon',\,k'} icK'\varepsilon' (C'^{+}(C'C^{+} + C^{+}C') - \\ &\qquad - (C'^{+}C^{+} + C^{+}C'^{+})\,C'), \end{aligned} \tag{23,11}$$

где

$$C = C(s,\ \varepsilon,\ \boldsymbol{k}),$$
$$C' = C(s',\ \varepsilon',\ \boldsymbol{k}').$$

Отсюда находим:

$$\left.\begin{aligned} [C'^{+},\ C]_{+} &= C^{+}(s',\ \varepsilon',\ \boldsymbol{k}')\,C(s,\ \varepsilon,\ \boldsymbol{k}) + \\ &\quad + C(s,\ \varepsilon,\ \boldsymbol{k})\,C^{+}(s',\ \varepsilon',\ \boldsymbol{k}') = \delta_{ss'}\delta_{\varepsilon\varepsilon'}\delta_{kk'}, \\ [C',\ C]_{+} &= [C'^{+},\ C^{+}]_{+} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{23,12}$$

---

[1]) Д. Иваненко и А. Соколов, Sow. Phys. 11, 590 (1937).

Последние соотношения имеют два решения:

первое решение имеет вид

$$C=\sqrt{1-N}\lambda F, \quad C^{+}=F\lambda\sqrt{1-N}; \tag{23,13}$$

второе решение

$$C=F\lambda\sqrt{1-N}, \qquad C^{+}=\sqrt{1-N}\lambda F \tag{23,14}$$

может быть получено путем замены амплитуды C амплитудой C^{+}, и наоборот, поскольку в основное уравнение (23,12) обе эти амплитуды входят совершенно симметрично. Здесь функция λ может принимать два значения ($\lambda=\pm 1$), N — число частиц в состоянии (s, ε, $\boldsymbol{k}$), а F — оператор, действующий на функцию числа частиц следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} Ff(N)&=f(1-N)F, \\ Ff(1-N)&=f(N)F. \end{aligned}\right\} \tag{23,15}$$

В качестве конкретного вида оператора F мы можем выбрать выражение

$$F=1+(1-2N)\frac{\partial}{\partial N}+\frac{(1-2N)^2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial N^2}+\frac{(1-2N)^3}{3!}\frac{\partial^3}{\partial N^3}+\ldots \tag{23,16}$$

Тогда мы сможем удовлетворить равенствам (23,15), если примем во внимание тождественное соотношение

$$f(N+\alpha)=\left(1+\alpha\frac{\partial}{\partial N}+\frac{\alpha^2}{2!}\frac{\partial}{\partial N^2}+\frac{\alpha^3}{3!}\frac{\partial^3}{\partial N^3}+\ldots\right)f(N) \tag{23,17}$$

и положим величину α равной $1-2N$.

С помощью формулы (23,16) легко получить следующие правила действия оператора F на постоянную величину A:

$$FA=A. \tag{23,18}$$

Далее, согласно (23,15) имеем:

$$F^2f(N)=Ff(1-N)F=f(N)F^2.$$

Отсюда видно, что собственные значения оператора F^2 равны единице:

$$F^2=1. \tag{23,19}$$

Для того чтобы определить функцию λ, мы должны перенумеровать все квантовые состояния. Волновые числа $\boldsymbol{k}(k_x, k_y, k_z)$ связаны с целыми числами $n_x, n_y, n_z=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ соотношениями

$$k_x=\frac{2\pi}{L}n_x, \qquad k_y=\frac{2\pi}{L}n_y, \qquad k_z=\frac{2\pi}{L}n_z, \tag{23,20}$$

где L^3 — объем основного параллелепипеда. Для дальнейшего нам важно лишь показать, что подобное перенумерование мы принци-

пиально можем произвести. Например, в основу перенумерования мы можем положить сумму абсолютных значений:

$$|n_x|+|n_y|+|n_z|=n. \qquad (23,21)$$

Мы перенумеруем все состояния, когда эта сумма вначале равна нулю, затем единице, двум, трем и т. д. Так, для первого квантового состояния ($\nu=1$)

$$n_x=n_y=n_z=0, \quad s=1, \quad \varepsilon=1,$$

для второго ($\nu=2$)

$$n_x=n_y=n_z=0, \quad s=-1, \quad \varepsilon=1$$

и т. д. Тогда величину λ мы выберем следующим образом[1]):

$$\lambda=\prod_1^{\nu}[1-2N(s,\ \varepsilon,\ n_x,\ n_y,\ n_z)]. \qquad (23,22)$$

Как будет показано ниже, число частиц N в каждом состоянии может составлять только нуль или единицу; тогда нетрудно проверить, что функция λ может принимать лишь два значения: $\lambda=\pm 1$.

Пусть одно квантовое состояние $(s',\ \varepsilon',\ \boldsymbol{k}')$ характеризуется числом ν', а второе $(s,\ \varepsilon,\ \boldsymbol{k})$ — числом ν. Тогда имеем следующий закон коммутативности между оператором F', зависящим от N', и знаковой функцией λ:

$$F'\lambda=\begin{cases} \lambda F' & \text{при} \quad \nu'>\nu, \\ -\lambda F' & \text{при} \quad \nu'\leqslant\nu. \end{cases} \qquad (23,23)$$

Здесь оператор F' действует на функцию числа частиц.

Наконец, мы должны сделать выбор между двумя возможными решениями (23,13) и (23,14) для искомых амплитуд C.

Для того чтобы энергия частиц была положительной величиной, мы должны для состояний $\varepsilon=1$ взять решение (23,13), а для состояний $\varepsilon=-1$ взять решение (23,14).

В связи с этим введем следующие обозначения:

$$\left.\begin{aligned} C(s,\ 1,\ \boldsymbol{k})&=C(s,\ \boldsymbol{k})=C, \\ C^+(s,\ 1,\ \boldsymbol{k})&=C^+(s,\boldsymbol{k})=C^+, \\ C(s,\ -1,\ -\boldsymbol{k})&=\tilde{C}^+(s,\boldsymbol{k})=\tilde{C}^+, \\ C^+(s,\ -1,\ -\boldsymbol{k})&=\tilde{C}(s,\ \boldsymbol{k})=\tilde{C}, \end{aligned}\right\} \qquad (23,24)$$

т. е. отнесем решения с отрицательной энергией к комплексно-сопряженному состоянию, обладающему противоположными импульсом и направлением спина, благодаря чему $s=(\boldsymbol{k}^0\boldsymbol{s})=\text{const}$.

---

[1]) P. Jordan und E. Wigner, Zs. f. Phys. 47, 631 (1928).

Попытаемся удовлетворить соотношениям (23,12), выбрав следующие значения для амплитуд C и $\tilde{C}$ (см. также решения (23,13) и (23,14)):

для $\varepsilon = 1$

$$\left.\begin{aligned} C &= \sqrt{1-N}\lambda F = -F\lambda\sqrt{N}, \\ C^{+} &= F\lambda\sqrt{1-N} = -\sqrt{N}\lambda F; \end{aligned}\right\} \tag{23,25}$$

для $\varepsilon = -1$

$$\left.\begin{aligned} \tilde{C} &= \sqrt{1-\tilde{N}}\,\lambda\tilde{F}, \\ \tilde{C}^{+} &= \tilde{F}\lambda\sqrt{1-\tilde{N}}, \end{aligned}\right\} \tag{23,26}$$

где значок $\sim$ над амплитудами показывает, что у аргументов s, $\boldsymbol{k}$ (при $\varepsilon = -1$) следует поставить знак минус.

Покажем, что решение (23,25) удовлетворяет перестановочным соотношениям (23,12). Для этого мы должны доказать существование следующих равенств:

$$C^{+}C + CC^{+} = 1, \tag{23,27}$$

$$CC = 0, \tag{23,28}$$

$$C'^{+}C + CC'^{+} = 0 \tag{23,29}$$

и т. д.

Принимая во внимание, что

$$F^2 = \lambda^2 = 1,$$

находим согласно равенству (23,25) следующие собственные значения для квадратичных комбинаций, составленных из амплитуд:

$$C^{+}C = N,$$

$$CC^{+} = 1 - N,$$

откуда получаем соотношение (23,27):

$$C^{+}C + CC^{+} = 1.$$

Далее имеем:

$$CC = -\sqrt{(1-N)N}.$$

Согласно равенству (23,28) это выражение должно обращаться в нуль. Отсюда следует, что в каждом квантовом состоянии может быть или нуль ($N = 0$), или одна ($1 - N = 0$) частица. Таким образом, перестановочные соотношения (23,12) автоматически приводят к статистике Ферми — Дирака.

Наконец, определим левую часть равенства (23,29):

$$C'^{+}C + CC'^{+} = -\sqrt{N'}\lambda' F'\sqrt{1-N}\lambda F - \sqrt{1-N}\lambda F\sqrt{N'}\lambda' F'.$$

Учтем, что все штрихованные величины коммутируют с нештрихованными, за исключением знаковой функции λ, закон коммутативности которой с оператором F' определяется равенством (23,23).

Полагая для конкретности $\nu' > \nu$ (случай $\nu' = \nu$ был нами только что рассмотрен), имеем:

$$C'^{+}C + CC'^{+} = \sqrt{N'(1-N)}(-\lambda'\lambda F'F + \lambda'\lambda FF') = 0.$$

Аналогичным путем легко показать, что

$$C'^{+}C^{+} + C^{+}C'^{+} = C'C + CC' = 0.$$

Таким образом, с помощью введения функции λ мы смогли удовлетворить требованию, чтобы амплитуды, отнесенные к различным квантовым состояниям, антикоммутировали между собою.

Для амплитуд $\tilde{C}$ ($\varepsilon = -1$) мы можем получить аналогичные формулы. В частности, для их квадратов мы находим:

$$\tilde{C}^{+}\tilde{C} = \tilde{N},$$

$$\tilde{C}\tilde{C}^{+} = 1 - \tilde{N}.$$

г) Физический смысл решений с положительной и отрицательной энергией. С помощью последних равенств, а также соотношений (23,3), (23,4), (23,6) и (23,7) мы находим следующие значения полной энергии, полного заряда, полного спина и полного импульса:

$$H = \sum_{\boldsymbol{k}} cK\hbar\,[N(1, \boldsymbol{k}) + N(-1, \boldsymbol{k}) + \tilde{N}(1, \boldsymbol{k}) + \tilde{N}(-1, \boldsymbol{k}) - 2],$$

$$e_{\text{полн}} = -e\sum_{\boldsymbol{k}}[N(1, \boldsymbol{k}) + N(-1, \boldsymbol{k}) - \tilde{N}(1, \boldsymbol{k}) - \tilde{N}(-1, \boldsymbol{k}) + 2],$$

$$S_{\text{полн}} = \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{\hbar}{2}[N(1, \boldsymbol{k}) - N(-1, \boldsymbol{k}) + \tilde{N}(1, \boldsymbol{k}) - \tilde{N}(-1, \boldsymbol{k})],$$

$$G = \sum_{\boldsymbol{k}} \hbar\boldsymbol{k}\,[N(1, \boldsymbol{k}) + N(-1, \boldsymbol{k}) + \tilde{N}(1, \boldsymbol{k}) + \tilde{N}(-1, \boldsymbol{k})]. \quad (23,30)$$

Отсюда мы можем сделать следующее заключение: только решения, соответствующие статистике Ферми — Дирака, ведут к тому, что оба сорта частиц N и $\tilde{N}$ будут обладать положительной энергией. Знак заряда обоих сортов частиц будет противоположным, т. е. если, например, частицы N соответствуют электронам, то частицы $\tilde{N}$ будут описывать позитроны (античастицы). Величина $s = \pm 1$ характеризует спин частицы. Как у электрона, так и у позитрона возможны две ориентации спина. При введении обозначений (23,24) нам удалось добиться того, что аргументы s и $\boldsymbol{k}$, стоящие в скобках и характеризующие состояние частицы, совпадают с соответствующими полными значениями.

Учитывая, что спин античастиц, так же как и их импульс, меняет свое направление, мы заключаем, что проекция спина позитрона на направление импульса античастицы (а не частицы) будет характеризоваться так же, как и для электрона, просто величиной s.

Заметим, что в случае спинорных уравнений бесконечная нулевая энергия имеет отрицательное значение

$$H_0 = \sum_k c\hbar K(-2);$$

кроме того, появляется нулевой заряд[1])

$$e_0 = -e\sum_k 2;$$

нулевое же значение спина и нулевое значение импульса исчезают. Более подробно вопросы, связанные с энергией вакуума, мы разберем в гл. IV.

д) Инвариантность уравнений Дирака относительно инверсии пространства и времени. Преобразование зарядового сопряжения. В § 18, п. а) мы показали, что уравнение Дирака инвариантно относительно пространственных и пространственно-временных вращений (преобразований Лоренца). Заметим, что эти вращения могут быть совершены как на бесконечно малые углы, так и на конечные.

Наряду с этим уравнение Дирака должно быть инвариантно относительно следующих преобразований, которые не могут быть сделаны бесконечно малыми.

1) Преобразование инверсии пространства, когда вектор $\boldsymbol{r}$ заменяется на $-\boldsymbol{r}'$. Это преобразование представляет собою фактически переход от правой системы координат к левой (зеркальное преобразование). При инверсии пространства ($\mathrm{E}' = \mathrm{E}$, $\mathbf{p}' = -\mathbf{p}$) уравнение Дирака[2])

$$(\mathrm{E} - c(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}) - \rho_3 m_0 c^2)\psi = 0 \qquad (23,31)$$

принимает форму

$$(\mathrm{E}' + c(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}') - \rho_3 m_0 c^2)\psi = 0.$$

---

[1]) Если с частицами мы сопоставим не электроны, а позитроны ($e^+ = e$), то найдем, что полный нулевой заряд будет положительной величиной:

$$e_0' = e\sum_k 2.$$

В теории, симметричной относительно электронов и позитронов [см. § 42, п. г)], нулевой заряд будет равен нулю.

[2]) Заметим, что наличие потенциалов не может изменить окончательных результатов, поскольку при инверсии пространства и времени компоненты потенциалов преобразуются по тем же законам, что и составляющие E и p.

Полагая $\psi = \rho_3\psi'$, мы найдем, что в штрихованной, т. е. в данном случае в левой, системе координат волновое уравнение будет иметь такой же вид, как и в нештрихованной, т. е. в правой системе

$$(\mathrm{E}' - c(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}) - \rho_3 m_0 c^2)\psi' = 0.$$

Таким образом, матрица ρ_3 является матрицей преобразования волновой функции при инверсии пространства.

Заметим, что инверсия пространства (т. е. переход от правой системы к левой) не может быть произведена с помощью вращений. Изменение одного направления оси координат ($x' = -x$, $y' = y$, $z' = z$) сводится к инверсии пространства и вращению. Изменение же двух направлений ($x' = -x$, $y' = -y$, $z' = z$) сводится просто к вращению.

2) Преобразование инверсии времени сводится к замене: $t' = -t$, $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}$. Тогда уравнение Дирака (23,31) принимает вид:

$$(-\mathrm{E}' - c(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}') - \rho_3 m_0 c^2)\psi = 0. \qquad (23,32)$$

Очевидно, что матрицей преобразования в данном случае явится матрица ρ_2:

$$\psi = \rho_2\psi'. \qquad (23,32а)$$

В самом деле, волновая функция ψ' [см. (23,32а)] будет удовлетворять уравнению (23,31), но с заменой E и p на соответствующие штрихованные величины.

Физический смысл инверсии времени сводится к тому, что уравнение Дирака, так же как и другие уравнения, описывающие движения элементарных частиц, должно быть обратимо во времени.

3) Преобразование зарядового сопряжения переводит частицы с положительной энергией (электроны) в дырки в фоне отрицательных энергий и, наоборот, дырки (позитроны)—в частицы с положительной энергией.

Эти преобразования имеют следующий важный физический смысл: теория должна быть симметричной относительно знака заряда, т. е. в данном случае относительно электронов и позитронов.

Мы считаем целесообразным более подробно рассмотреть эти преобразования в теории электрон-позитронного вакуума [см. § 42, п. г)]. Здесь же мы воспользуемся лишь окончательными результатами для связи новых волновых функций (которые мы отметим значком $\sim$) со старыми [определяемыми равенствами (42,64) и (42,65)]:

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\psi} &= C\psi^{+\mathrm{T}}, \\ \tilde{\psi}^{+} &= \psi C^{\mathrm{T}}, \end{aligned}\right\} \qquad (23,32б)$$

где матрица

$$C = -i\alpha_2\rho_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а $\psi^T = (\psi_1\psi_2\psi_3\psi_4)$ — транспонированная матрица, у которой строки заменены столбцами и наоборот.

Таким образом, теория Дирака, как и другие известные теории элементарных частиц, инвариантна относительно зеркальных преобразований ($I = \text{const}$), преобразований с изменением знака у времени ($T = \text{const}$) и преобразований зарядового сопряжения ($C = \text{const}$).

Рассматривая вопрос об инвариантности волновых уравнений в общем виде, Людерс [1]) и Паули [2]) показали, что спин частицы, а также статистика связи сохраняются, если лагранжиан инвариантен относительно произведения преобразований зарядового сопряжения и отражения всех четырех координат; теорема Людерса — Паули может быть записана в виде

$$ICT = \text{const}. \qquad (23,33)$$

е) Нарушение закона сохранения четности при слабых взаимодействиях. Как известно, частица нейтрино, введенная Паули [3]) еще в 1933 г. для объяснения законов сохранения при β-распаде, теория которого была построена Ферми [4]), обнаружена экспериментально [5]) только недавно (1956 г.). Это связано с тем обстоятельством, что эффективное сечение захвата нейтрино очень мало: по данным о β-распаде, оно должно составлять $(6{,}3 \pm 1{,}6) \cdot 10^{-44}$ *см*^{2}.

Теоретический анализ β-распада показал, что спин нейтрино должен быть равен $^1/_2$. Поэтому для описания движения нейтрино естественным было использовать уравнение Дирака. Однако было неясно значение массы покоя нейтрино (считалось, что она должна быть много меньше массы электрона), а также существование антинейтрино; в случае существования последнего надо было также установить, в чем заключается отличие антинейтрино от нейтрино, поскольку электрический заряд нейтрино равен нулю.

---

[1]) G. Lüders, Det. Kong. Danske Videnskab. Selskab. Mat.-Fys. Medd. 28, № 5 (1954).

[2]) W. Pauli, в сб. «N. Bohr and the Development of Physics», London, 1955, стр. 30.

[3]) W. Pauli, Rapp. Septieme Conseil. Phys. Solvay, Brussels, 1933; Paris, 1934.

[4]) E. Fermi, Zs. f. Phys. 88, 161 (1934).

[5]) C. Cowan, F. Reines, F. Harrison, H. Kruse, A. McGuire, Science 124, 103, 1956; см. также сб. «Проблемы современной физики», № 11, стр. 167, ИЛ, 1956.

Майорана[1]) выдвинул гипотезу, согласно которой нейтрино и антинейтрино должны быть тождественными частицами, так что для их описания можно воспользоваться уравнениями с вещественными волновыми функциями. Эта гипотеза могла быть проверена на двойном β-распаде, которым обладают ядра Ca^{48}, Zr^{96}, Nd^{150} и т. д. Если нейтрино и антинейтрино тождественны, то следовало бы ожидать сравнительно большого значения вероятности двойного β-распада (времени жизни порядка 10^{15} лет) с испусканием двух электронов (один нейтрон ядра испускает e^- и ν, другой нейтрон поглощает это нейтрино и испускает второй электрон). Если же двойной β-распад представляет собою просто два последовательных одинарных β-распада с испусканием двух электронов и двух нейтрино, то вероятность испускания должна быть много меньше, чем в первом случае (соответствующее время жизни будет иметь порядок 10^{22} лет). Эксперимент показал[2]), что время жизни при двойном β-распаде не может быть меньше, чем 10^{18} лет, и поэтому нейтрино не должно быть тождественным антинейтрино.

В последнее время были получены дополнительные сведения о свойствах элементарных частиц, которые позволили по-новому сформулировать теорию нейтрино. К этому привело изучение распада K-частиц, обладающих массой $965\, m_0$, как заряженных, так и нейтральных. Наибольший интерес представил собой распад K^+-частиц. Всего известно пять типов распадов K^+-частиц, два из которых мы здесь выпишем:

$$K_\tau^+ \to 2\pi^+ + \pi^- \quad (\text{или } \pi^+ + 2\pi^0),$$

$$K_\theta^+ \to \pi^+ + \pi^0.$$

Для того чтобы объяснить распад K_θ^+-частиц на две частицы, необходимо предположить, что взаимодействие описывается скалярной функцией. Тогда распад K_τ^+-частиц на три частицы будет описываться псевдоскалярной функцией[3]). Если бы K_τ^+- и K_θ^+-мезоны представляли отличные друг от друга частицы, то эти два различных распада были бы совершенно независимыми.

На основе анализа экспериментальных фактов Ли и Янг[4]) выдвинули смелую гипотезу о тождественности K_τ^+- и K_θ^+-частиц. Тогда одной и той же частице присуще и скалярное и псевдоскалярное

---

[1]) E. Majorana, Nuovo Cim. **14**, 171 (1937).

[2]) C. Cowan, F. Harrison, L. Langer, F. Reines, Nuovo Cim. 3, 649 (1956).

[3]) Это легко получить, если учесть, что волновая функция π-мезона представляет собою псевдоскаляр.

[4]) T. Lee, C. Jang, Phys. Rev. **104**, 254 (1956).

взаимодействие, обладающее различной четностью (при повороте осей координат скаляр и псевдоскаляр остаются без изменений, при зеркальных же преобразованиях скаляр также остается без изменений, в то время как псевдоскаляр изменяет свой знак).

Следует со всей ясностью подчеркнуть, что гипотеза Ли и Янга о несохранении четности пока что касается только слабых взаимодействий (распад K-частиц, распад π-, μ-мезонов, β-распад и т. д.) и не затрагивает сильных взаимодействий (например, взаимодействия нуклонов с π-мезонами) или электромагнитных взаимодействий, включая электрон-позитронный вакуум.

Ли и Янг предложили экспериментально исследовать возможное нарушение четности для других слабых взаимодействий. Ву с сотрудниками[1]) исследовали угловое распределение электронов, вылетающих при β-распаде ориентированных ядер Co^{60}. Они обнаружили значительную асимметрию распределения относительно направления спина ориентированных ядер (бóльшая часть электронов вылетала в направлении, противоположном магнитному моменту ядра)[2]).

Аналогично, при распаде $\pi^{\pm}$-мезона (спин которого равен нулю) на $\mu^{\pm}$-мезон и нейтрино ($\pi \to \mu + \nu$) μ-мезоны оказываются полностью поляризованными в направлении (или против) своего движения[3]).

Ли и Янг указали также, что несохранение четности должно привести к корреляции между направлением μ-мезона и электроном при $\pi \to \mu \to e$-распаде.

Ли и Янг[4]) (см. также[5]),[6])[7])) сделали попытку объяснить нарушение четности лишь в явлениях, связанных с нейтрино, приписав последним особые свойства. Тем самым объяснение нарушения четности при распаде K^{+}-частиц, в котором нейтрино не участвует, остается по-прежнему открытым. Они прежде всего предположили, что масса нейтрино точно равна нулю. Тогда уравнение для нейтрино разбивается на два независимых уравнения, каждое из которых содержит две компоненты.

Новую теорию нейтрино мы попытаемся изложить, используя уравнения Дирака, в которых явно учтены спиновые состояния [см. § 21].

---

[1]) C. Wu, E. Ambler, R. Hayward, D. Hoppes, R. Hudson, Phys. Rev. **105**, 1413 (1957).

[2]) Как показали Фрауенфельдер и др. [Phys. Rev. **106**, 386 (1957)], при β-распаде неориентированных ядер Co^{60} электроны вылетают со спином, направленным преимущественно против движения, причем степень поляризации их (см. ниже) равна $-v/c$.

[3]) R. Garwin, L. Lederman, M. Weinrich, Phys. Rev. **105**, 1415 (1957).

[4]) T. Lee and C. Yang, Phys. Rev. **105**, 1671 (1957).

[5]) A. Salam, Nuovo Cim. **5**, 299 (1957).

[6]) Л. Д. Ландау, ЖЭТФ **32**, 405, 407 (1957).

[7]) R. Feynmann and M. Gell-Mann, Phys. Rev. **109**, 193 (1958).

ж) Теория нейтрино с ориентированным спином[1]. Уравнение Дирака (17,16) для свободной частицы может быть представлено в виде

$$\left.\begin{aligned}(E - m_0c^2)\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} = c(\sigma'\mathbf{p})\begin{pmatrix}\psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix},\\ (E + m_0c^2)\begin{pmatrix}\psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix} = c(\sigma'\mathbf{p})\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix},\end{aligned}\right\} \qquad (23,34)$$

где σ' — матрицы Паули [см. (17,8)].

Если мы положим массу покоя нейтрино равной нулю ($m_0 = 0$), то получим следующее линейное соотношение между волновыми функциями:

$$\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}\psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix}, \qquad (23,34\text{a})$$

где

$$\lambda = \pm 1.$$

Последнее соотношение может быть получено из решения (20,13), если в последнем положить $k_0 = 0$. В этом случае λ может принимать четыре значения:

1) $\lambda = 1$. Тогда на основе равенств (23,30) и (23,24) можно заключить, что состояния как с $E > 0$, так и с $E < 0$ будут соответствовать $\varepsilon s = 1$, т. е. $s_+ = -s_- = 1$.

2) $\lambda = -1$. Тогда состояния как с $E > 0$, так и с $E < 0$ будут соответствовать $\varepsilon s = -1$, т. е. $s_+ = -s_- = -1$.

3) $\lambda = E/|E|$. Состояния с $E > 0$ и с $E < 0$ будут соответствовать $s = 1$.

4) $\lambda = -E/|E|$. Состояния с $E > 0$ и с $E < 0$ будут принадлежать $s = -1$.

Для дальнейшего исследования инвариантности преобразований ограничимся случаями 1) и 2).

Условие (23,34а) принимает при этом вид:

$$\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}\psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix}, \qquad (23,34\text{б})$$

где

$$\lambda = \varepsilon s.$$

Прежде всего заметим, что исследование инвариантности касается лишь условия (23,34б), так как уравнения (23,34) представляют собою уравнения Дирака, инвариантность которых была подробно нами только что рассмотрена. Условие (23,34б) сохраняет инвариантную

[1] А. А. Соколов, ЖЭТФ **33**, 794 (1957); см. также «Атомная энергия» **4**, № 4 (1958). Определение нейтрино и антинейтрино мы вынуждены здесь вновь пересмотреть.

форму при инверсии пространства. В самом деле, при этом $\boldsymbol{k}'=-\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{s}'=-\boldsymbol{s}$, $\varepsilon'=\varepsilon$, $\lambda'=-\lambda$, и волновая функция преобразуется по закону:

$$\begin{pmatrix}\psi_1'\\ \psi_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\psi_3'\\ \psi_4'\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix}.$$

Поэтому в штрихованной системе координат условие (23,34б) сохранит свою форму:

$$\begin{pmatrix}\psi_3'\\ \psi_4'\end{pmatrix}=\lambda'\begin{pmatrix}\psi_1'\\ \psi_2'\end{pmatrix}.$$

При инверсии времени ($\boldsymbol{k}'=-\boldsymbol{k}$, $s'_{\pm}=s_{\mp}=-s_{\pm}$, $\varepsilon'=-\varepsilon$, $\lambda'=\lambda$) волновые функции изменяются по закону:

$$\begin{pmatrix}\psi_1'\\ \psi_2'\end{pmatrix}=-i\begin{pmatrix}\psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\psi_3'\\ \psi_4'\end{pmatrix}=i\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}.$$

Поэтому в штрихованной системе координат условие (23,34б) принимает вид

$$\begin{pmatrix}\psi_3'\\ \psi_4'\end{pmatrix}=-\lambda'\begin{pmatrix}\psi_1'\\ \psi_2'\end{pmatrix},$$

т. е. неинвариантно относительно инверсии времени.

Если мы хотим сохранить условие (23,34б), то должны выполнить еще преобразование зарядового сопряжения ($\boldsymbol{k}'=\boldsymbol{k}$, $s'_{\pm}=s_{\mp}=-s_{\pm}$, $\varepsilon'=-\varepsilon$, $\lambda'=\lambda$). Согласно соотношениям (23,32б) волновые функции при этом преобразовании будут изменяться по закону

$$\begin{pmatrix}\psi_1'\\ \psi_2'\end{pmatrix}=i\sigma_2'\begin{pmatrix}\tilde{\psi}_3^+\\ \tilde{\psi}_4^+\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\psi_3'\\ \psi_4'\end{pmatrix}=-i\sigma_2'\begin{pmatrix}\tilde{\psi}_1^+\\ \tilde{\psi}_2^+\end{pmatrix}.$$

Таким образом, если одновременно произвести инверсию времени и преобразование зарядового сопряжения (комбинированную инверсию), то мы будем иметь:

$$\begin{pmatrix}\psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix}=-\sigma_2'\begin{pmatrix}\tilde{\psi}_3^+\\ \tilde{\psi}_4^+\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}=-\sigma_2'\begin{pmatrix}\tilde{\psi}_1^+\\ \tilde{\psi}_2^+\end{pmatrix}.$$

В этом случае для волновых функций $\tilde{\psi}$ сохраняется условие (23,34б). Уравнение для нейтрино будет инвариантным относительно комбинированной инверсии вида $TC=\text{const}$, $I=\text{const}$.

Несохранение четности при нашем рассмотрении объясняется определенной ориентацией спина (т. е. значением величины s) изучаемого нейтрино, причем знак у s при инверсии пространства следует изменить. Если же несохранение четности каким-то образом связать со свойствами пространства, для которого $I \neq \mathrm{const}$, то тогда, чтобы сохранить теорему Людерса — Паули, необходимо ввести комбинированную инверсию вида $IC = \mathrm{const}$, $T = \mathrm{const}$ (Ландау), хотя теоретически допустимо также $IT = \mathrm{const}$, $C = \mathrm{const}$.

Следует заметить, что несохранение четности экспериментально доказано также при распаде без участия нейтрино. Поэтому построение теории несохранения четности с пересмотром некоторых законов инвариантности остается далеко еще не законченным.

з) **Простейшие превращения элементарных частиц при участии нейтрино с ориентированным спином.** Ли и Янг использовали для электрона уравнение, не разделенное явно на спиновые состояния. Поэтому, чтобы найти вероятность вылета электрона с определенной ориентацией спина, им пришлось записать энергию взаимодействия в виде суммы линейной комбинации скаляра на скаляр и скаляра на псевдоскаляр и т. д. Покажем, что при явном разделении на спиновые состояния мы не должны этого делать, т. е. в энергии взаимодействия можем оставить только члены, представляющие собою произведение скаляра на скаляр и т. д.

В самом деле, для вычисления шпура волновых функций при наличии нейтрино с ориентированным спином мы можем воспользоваться формулой (21,12), полученной для шпура электронных волновых функций с учетом спиновых состояний.

Полагая для нейтринных функций массу покоя равной нулю ($k_0 = 0$), найдем

$$\langle \gamma', \gamma \rangle = \mathrm{Sp}\,\frac{1}{16}\,\gamma' \left(1 + \rho_1 \varepsilon' s' \frac{k'}{K'} + \rho_3 \varepsilon' \frac{k_0'}{K'}\right) \times \\ \times \left(1 + s' \frac{(\sigma k')}{k'}\right) \gamma \left(1 + \rho_1 \varepsilon s\right) \left(1 + s \frac{(\sigma k)}{k}\right), \qquad (23{,}35\text{a})$$

причем импульс будет определяться направлением $\varepsilon \boldsymbol{k}$. Величины K', $\varepsilon' \boldsymbol{k}'$ и k_0' определяют энергию, импульс и массу частицы, появляющейся совместно с нейтрино (например, μ-мезона или электрона), γ' и γ — одна из матриц Дирака, определяющая вид энергии взаимодействия с электрон-нейтринным полем.

Для примера рассмотрим распад π-мезона на μ-мезон и нейтрино. Выберем систему координат, в которой π-мезон покоится. Тогда импульс мезона $\boldsymbol{k}_\mu = \varepsilon' \boldsymbol{k}'$ и импульс нейтрино $\boldsymbol{k}_\nu = \varepsilon \boldsymbol{k}$ будут связаны между собою соотношением $\boldsymbol{k}_\mu + \boldsymbol{k}_\nu = 0$. Полагая для простоты, что взаимодействие π-мезона с μ-мезон-нейтринным полем является псевдоскалярным ($\gamma' = \gamma = \rho_2 \sigma_4$), мы найдем, что спиновая часть веро-

ятности распада будет пропорциональна следующему выражению [см. (21,17) и (21,18) при $k_0 = 0$]:

$$R = \rho_{22}\sigma_{44} = \left(1 - \varepsilon s \varepsilon' s' \frac{k'}{K'}\right)(1 - \varepsilon s \varepsilon' s'). \quad (23,35б)$$

Отсюда видно, что вылетевшие μ-мезоны будут полностью поляризованными, причем, если для μ-мезона $\varepsilon' = 1$, а $\varepsilon' s' = 1$, то вместе с ним будет вылетать нейтрино или антинейтрино с $\varepsilon = -1$, $s = 1$ (на различии между нейтрино и антинейтрино мы остановимся ниже).

Точно так же, согласно этой теории, при β-распаде должны наблюдаться эффекты поляризации вылетевших электронов (или позитронов).

Как известно, при β-распаде нейтрон превращается в протон, электрон и антинейтрино:

$$n \rightarrow p + e^- + \tilde{\nu}.$$

Для простоты ограничимся рассмотрением теории β-распада в варианте Ферми, когда энергия взаимодействия может быть представлена в виде

$$U = \sum_i g_i (\chi_p^+ \gamma_i \chi_n)(\psi_{e^-}^+ \gamma_i \psi_\nu), \quad (23,36а)$$

где χ_p^+, χ_n, $\psi_{e^-}^+$ и ψ_ν представляют собою волновые функции протона, нейтрона и электрон-нейтринного поля. Матрица γ_i является одной из 16 матриц Дирака, представляющей тот или иной вариант теории, а коэффициенты g_i определяют соответствующий ядерный заряд.

Поскольку в теории β-распада нейтрон берется покоящимся, мы можем ограничиться нерелятивистским приближением, т. е. можем положить $\rho_1 \cong \rho_2 \cong 0$. В этом случае, отличные от нуля значения матричных элементов дадут следующие виды взаимодействия: скалярное ($\gamma^S = \rho_3$), тензорное ($\gamma^T = \rho_3\sigma$), векторное ($\gamma^V = I$) и псевдовекторное ($\gamma^A = \sigma$). Псевдоскалярное взаимодействие будет в данном случае равно нулю, так как $\gamma^P = \rho_2 \cong 0$.

Так как при β-распаде антинейтрино может вылетать под любыми углами (часть импульса берет на себя протон), среднее значение матричного элемента $\sigma_{\mu\mu'}$ [см. (21,18)] в результате интегрирования по углам вылетевших антинейтрино становится равным единице, и поэтому поляризационные эффекты будут описываться матричными элементами $\rho_{\mu\mu'}$ [см. (21,17)]. В зависимости от характера взаимодействия они будут равны ($k_0 = 0$):

$$\left.\begin{matrix} R^{S,T}_{\varepsilon' s'} \\ R^{V,A}_{\varepsilon' s'} \end{matrix}\right\} = \left.\begin{matrix} \rho_{33} \\ \rho_{44} \end{matrix}\right\} = 1 \mp \varepsilon s \varepsilon' s' \frac{v}{c}, \quad (23,36б)$$

где $v/c = k'/K'$.

Степень продольной поляризации электронов равна

$$p^{S,T} = -p^{V,A} = \varepsilon' \frac{R_1 - R_{-1}}{R_1 + R_{-1}} = -\varepsilon' \varepsilon s \frac{v}{c}. \qquad (23,36\text{в})$$

Согласно экспериментальным данным Фрауенфельдера и др.

$$p^{\text{эксп}} = -\frac{v}{c};$$

отсюда мы заключаем, что в случаях взаимодействий V, A наряду с электроном ($\varepsilon' = 1$) должно вылетать антинейтрино (в обобщенном понятии) с $\varepsilon s = -1$, а при взаимодействиях T, S—антинейтрино с $\varepsilon s = 1$.

Далее, для величины, характеризующей полярную асимметрию вылетевших электронов ($\varepsilon' = 1$) при распаде свободного нейтрона с ориентированным спином, мы находим выражение:

$$R = 1 + \varepsilon s a \frac{v}{c} \cos \theta,$$

причем

$$a^S = a^V = 0, \quad a^A = -a^T = \frac{2}{3}.$$

Экспериментальные данные Телегди и др. [1]) дают $(\varepsilon s a)_{\text{эксп}} = -0{,}37$. При $\varepsilon s = -1$ лучшее совпадение с экспериментом дает смесь векторного (объясняющего правила отбора Ферми) и псевдовекторного (объясняющего правила отбора Гамова—Теллера) взаимодействий. При $\varepsilon s = 1$ лучше подходит смесь T- и S-взаимодействий.

Если при распаде антинейтрона эксперимент покажет обратную картину нарушения симметрии, то появится основание считать, что асимметрия нашего мира в целом обязана подавляющему превосходству числа нуклонов над антинуклонами.

Как известно, в теории Дирака мы имеем четыре независимых решения, поскольку каждому значению $\varepsilon = \pm 1$ соответствуют два значения $s = \pm 1$. Для того чтобы получить результат Ли и Янга, необходимо во взаимодействии оставить только два решения, а именно: $\varepsilon = 1$, $s = 1$ (правый винт) и $\varepsilon = -1$, $s = -1$ (левый винт). Тогда другая пара решений: $\varepsilon = 1$, $s = -1$ и $\varepsilon = -1$, $s = 1$ может быть получена из первой при помощи преобразования зарядового сопряжения. Под антинейтрино, по-видимому, лучше всего понимать ту частицу, которая образуется при β-распаде вместе с электроном. Тогда, если окажется справедлив T, S-вариант, то для нейтрино $s = 1$, а для антинейтрино $s = -1$ (случай 1). В случае же V, A-варианта для нейтрино $s = -1$, для антинейтрино $s = 1$ [случай 2, определение Фейнманна—Гелл-Манна]. Возможно, существуют два сорта нейтрино и антинейтрино. Теоре-

[1]) V. L. Telegdi и др., Phys. Rev. 107, 1731, 1957.

тически допустим и другой вариант комбинаций решений, а именно $\varepsilon = 1$, $s = 1$ и $\varepsilon = -1$, $s = 1$ (случай 3). Тогда в другой паре решений второго варианта мы будем иметь $\varepsilon = 1$, $s = -1$ и $\varepsilon = -1$, $s = -1$ (случай 4). Случаи 3 и 4 вряд ли по отдельности объяснят различие в асимметрии при β^-- и β^+-распадах, хотя для частиц с $\varepsilon = -1$ случай 3 эквивалентен случаю 2. Во всех вариантах теории мы можем при вычислении матричных элементов использовать формулы (21,17) и (21,18).

Во всяком случае, открытие несохранения четности должно привести также к дальнейшему развитию новой главы квантовой электродинамики, связанной с исследованием продольно поляризованных электронов, μ-мезонов и γ-квантов.

Более подробное освещение всех этих вопросов, к тому же далеко еще не завершенных, не входит в нашу задачу.

и) Функция числа частиц. В качестве функции числа частиц выберем выражение (8,15), которое в нашем случае принимает вид[1])

$$f(N) = \prod_{s',k'} \delta_{N_{k's'}, N^0_{k's'}} \prod_{s',k'} \delta_{\tilde{N}_{k's'}, \tilde{N}^0_{k's'}}, \qquad (23,37)$$

где $N^0_{k's'}$ — число частиц в состоянии (k', s') до действия на эту функцию операторов. В случае статистики Ферми величина $N^0_{k's'}$ может принимать два значения: $N^0_{k's'} = 0$, если в начальный момент частица в состоянии (k', s') отсутствует, и $N^0_{k's'} = 1$, если в начальный момент в состоянии (k', s') имеется одна частица.

---

[1]) В случае статистики Ферми—Дирака функция числа частиц δ_{NN^0} представляет собою двухрядную единичную матрицу ($N, N^0 = 0, 1$):

$$(\delta_{NN^0}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Амплитуды, характеризующие соответственно появление (C^+) и поглощение (C) частицы, могут быть записаны тогда также в виде двухрядных матриц:

$$C^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

откуда следует

$$C^+C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad CC^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

т. е. амплитуды C и C^+ удовлетворяют перестановочным соотношениям статистики Ферми:

$$C^+C + CC^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Подействуем теперь операторами C и C^+ на функцию числа частиц (23,37). Опуская знаковую функцию λ, имеем:

$$C\delta_{NN^0} = \sqrt{1-N}\,\delta_{1-N,\,N^0},$$

$$C^+\delta_{NN^0} = \sqrt{N}\,\delta_{1-N,\,N^0},$$

причем амплитуды C, а также N и N^0 зависят от квантового состояния $(\boldsymbol{k},\ s)$.

Полагая, что в начальном состоянии частиц нет ($N^0 = 0$), мы находим следующие правила действия операторов C и C^+:

$$C\delta_{N,0} = 0, \qquad C^+\delta_{N,0} = 1.$$

Аналогично, при наличии в начальный момент одной частицы ($N^0 = 1$) имеем:

$$C\delta_{N,1} = 1,$$

$$C^+\delta_{N,1} = 0.$$

Отсюда видно, что действие амплитуды C^+ приводит к появлению частицы (оператор появления), а амплитуды C — к ее поглощению (оператор поглощения).

к) Перестановочные соотношения для квантованных волновых функций. Найдем перестановочные соотношения между квантованными волновыми функциями $\psi_\rho(\boldsymbol{r},\ t)$ и $\psi^+_{\rho'}(\boldsymbol{r}',\ t')$.

Согласно равенству (20,17) волновые функции мы можем записать в виде

$$\left.\begin{aligned} \psi^+_{\rho'}(\boldsymbol{r}',\ t') &= \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{s',\,\varepsilon',\,\boldsymbol{k}'} C^+(s',\ \varepsilon',\ \boldsymbol{k}')\, b^+_{\rho'}(s',\ \varepsilon',\ \boldsymbol{k}')\, e^{ic\varepsilon' K't' - i\boldsymbol{k}'\boldsymbol{r}'}, \\ \psi_\rho(\boldsymbol{r},\ t) &= \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{s,\,\varepsilon,\,\boldsymbol{k}} C(s,\ \varepsilon,\ \boldsymbol{k})\, b_\rho(s,\ \varepsilon,\ \boldsymbol{k})\, e^{-ic\varepsilon Kt + i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}, \end{aligned}\right\} \tag{23,38}$$

откуда находим

$$[\psi^+_{\rho'}(\boldsymbol{r}',\ t'),\ \psi_\rho(\boldsymbol{r},\ t)]_+ = \frac{1}{L^3} \sum_{s,\,\varepsilon,\,\boldsymbol{k}} \sum_{s',\,\varepsilon',\,\boldsymbol{k}'} [C^+(s',\ \varepsilon',\ \boldsymbol{k}'),\ C(s,\ \varepsilon,\ \boldsymbol{k})]_+ \times$$

$$\times\, b^+_{\rho'}(s',\ \varepsilon',\ \boldsymbol{k}')\, b_\rho(s,\ \varepsilon,\ \boldsymbol{k})\, e^{-ic(\varepsilon Kt - \varepsilon' K't') + i(\boldsymbol{k}\boldsymbol{r} - \boldsymbol{k}'\boldsymbol{r}')}. \tag{23,38a}$$

Принимая во внимание перестановочные соотношения для амплитуд:

$$[C^+(s',\ \varepsilon',\ \boldsymbol{k}'),\quad C(s,\ \varepsilon,\ \boldsymbol{k})]_+ = \delta_{ss'}\delta_{\varepsilon\varepsilon'}\delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}, \tag{23,39}$$

находим после суммирования по величинам s', ε', $\boldsymbol{k}'$:

$$[\psi_{\rho'}^{+}(\boldsymbol{r}', t'), \psi_{\rho}(\boldsymbol{r}, t)]_{+} = \frac{1}{L^3}\sum_{\varepsilon, \boldsymbol{k}} b_{\rho'\rho} e^{-ic\varepsilon K(t-t') + i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}, \tag{23,40}$$

причем здесь введено обозначение

$$b_{\rho'\rho} = \sum_{s} b_{\rho'}^{+}(s, \varepsilon, \boldsymbol{k})\, b_{\rho}(s, \varepsilon, \boldsymbol{k}). \tag{23,41}$$

Эту сумму можно представить в виде

$$b_{\rho'\rho} = \sum_{s, \varepsilon'} b_{\rho'}^{+}(s, \varepsilon', \boldsymbol{k}) \left(\frac{K + \varepsilon(\boldsymbol{\alpha k}) + \varepsilon\rho_3 k_0}{2K}\right) b_{\rho}(s, \varepsilon', \boldsymbol{k}) =$$

$$= \frac{\varepsilon K + (\boldsymbol{\alpha k}) + \rho_3 k_0}{2K\varepsilon} \sum_{s, \varepsilon'} b_{\rho'}^{+}(s, \varepsilon', \boldsymbol{k})\, b_{\rho}(s, \varepsilon', \boldsymbol{k}),$$

причем матрицы $\boldsymbol{\alpha}$ и ρ_3 действуют только на значки ρ (а не ρ'!) по закону:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_4 \\ b_3 \\ b_2 \\ b_1 \end{pmatrix},$$

т. е. $\alpha_1 b_1 = b_4$; аналогично $\alpha_2 b_1 = -ib_4$ и т. д.

Согласно (21,6) имеем:

$$\sum_{s, \varepsilon'} b_{\rho'}^{+}(s, \varepsilon', \boldsymbol{k})\, b_{\rho}(s, \varepsilon', \boldsymbol{k}) = \delta_{\rho\rho'},$$

откуда для искомых перестановочных соотношений (23,40) получаем:

$$[\psi_{\rho'}^{+}(\boldsymbol{r}', t'), \psi_{\rho}(\boldsymbol{r}, t)]_{+} = -\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - (\boldsymbol{\alpha}\nabla) - i\rho_3 k_0\right) \times$$

$$\times \frac{1}{L^3}\sum_{\boldsymbol{k}} \frac{e^{i\boldsymbol{kR}}}{K}\left(\frac{-e^{icKT} + e^{-icKT}}{2i}\right)\delta_{\rho\rho'},$$

где $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$, $T = t - t'$.

Учитывая, что перестановочная $D(\boldsymbol{R}, T)$-функция имеет вид [см. формулу (9,5)]

$$D(\boldsymbol{R}, T) = \frac{1}{L^3}\sum_{\boldsymbol{k}} \frac{e^{i\boldsymbol{kR}}}{K}\sin cKT = \frac{1}{8\pi^3}\int e^{i\boldsymbol{kR}}\frac{\sin cKT}{K}\, d^3k,$$

находим окончательно:

$$[\psi_{\rho'}^{+}(\boldsymbol{r}', t')\, \psi_{\rho}(\boldsymbol{r}, t)]_{+} = i\left(\frac{1}{ic}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{i}(\boldsymbol{\alpha}\nabla) - \rho_3 k_0\right) D(\boldsymbol{R}, T)\,\delta_{\rho\rho'}. \tag{23,42}$$

Появление множителя

$$\frac{\hat{D}}{c\hbar} = \frac{1}{ic}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{i}(\boldsymbol{\alpha}\nabla) - \rho_3 k_0$$

в правой части равенства (23,42) связано с тем обстоятельством, что волновая функция ψ_ρ должна подчиняться уравнению Дирака, в то время как функция $D(\boldsymbol{R}, T)$ подчиняется скалярному уравнению. В самом деле, действуя слева на равенство (23,42) оператором Дирака D:

$$\frac{D}{c\hbar} = -\frac{1}{ic}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{i}(\boldsymbol{\alpha}\nabla) - \rho_3 k_0$$

и принимая во внимание, что

$$\frac{D\hat{D}}{c^2\hbar^2} = -(\Box - k_0^2),$$

получим, что как левая, так и правая части равенства обращаются в нуль в силу соотношений

$$D\psi_\rho = 0,$$

$$(\Box - k_0^2) D(\boldsymbol{R}, T) = 0.$$

Полагая в равенстве (23,42) $t = t'$ $(T \to 0)$ и учитывая соотношения (9,7), найдем трехмерные перестановочные соотношения:

$$[\psi^+_{\rho'}(\boldsymbol{r}', t), \psi_\rho(\boldsymbol{r}, t)]_+ = \delta_{\rho\rho'}\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'), \qquad (23,43)$$

$$[\psi^+_{\rho'}(\boldsymbol{r}', t), \psi^+_\rho(\boldsymbol{r}, t)]_+ = [\psi_{\rho'}(\boldsymbol{r}', t), \psi_\rho(\boldsymbol{r}, t)]_+ = 0. \qquad (23,44)$$

ГЛАВА II

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕКТРОНОВ С ВТОРИЧНО КВАНТОВАННЫМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

§ 24. Общие формулы взаимодействия

В предыдущей главе мы показали, что при исследовании свободного поля нам достаточно было определить лагранжиан, который должен представлять собою инвариант. Далее с помощью разработанного математического формализма мы могли автоматически получить все основные величины, характеризующие поле (волновое уравнение, тензор энергии, тензор момента количества движения и т. д.), а также произвести квантование поля.

Попробуем использовать этот же метод при построении теории двух взаимодействующих полей, а именно полей электронов, подчиняющихся уравнению Дирака (в этой главе мы рассмотрим эффекты, когда можно его вторично не квантовать), и вторично квантованного электромагнитного поля.

а) Лагранжиан. Лагранжиан должен состоять из трех частей:

$$L = L_1 + L_2 + L', \tag{24,1}$$

где L_1 является лагранжианом первого поля, L_2 — второго поля, а L' является смешанным лагранжианом (пропорциональным энергии взаимодействия), который обусловливает связь между полями.

Смешанный лагранжиан L', так же как и лагранжиан свободного поля, должен представлять собою инвариант, имеющий в простейшем случае вид суммы скалярных произведений: скаляра первого поля на скаляр второго, вектора первого поля на вектор второго, тензора на тензор и т. д.

В частности, при взаимодействии спинорных частиц (электронов, нуклонов и т. д.) с электромагнитным полем лагранжиан спинорных частиц имеет вид [см. формулу (22,8)]:

$$L_1 = -\hbar c \left(\frac{1}{2i} \psi^+ \alpha_\mu \psi_\mu - \frac{1}{2i} \psi_\mu^+ \alpha_\mu \psi + k_0 \psi^+ \rho_3 \psi \right), \tag{24,2}$$

а лагранжиан электромагнитного поля [см. формулу (16,3)]:

$$L_2 = -\frac{1}{16\pi} H_{\mu\nu} H_{\mu\nu} - \frac{1}{8\pi} \Phi_{\mu,\,\mu} \Phi_{\nu,\,\nu}. \qquad (24.3)$$

Лагранжиан взаимодействия может быть составлен как сумма произведений вектора частиц со спином половина $e^- \psi^+ \alpha_\mu \psi$ на вектор электромагнитного поля Φ_μ ($\mathbf{\Phi}$, Φ) и тензора частиц со спином половина $\mu\psi^+ \alpha_{\mu\nu} \psi$ на тензор электромагнитного поля $H_{\mu\nu}$:

$$L' = -e\psi^+ \alpha_\mu \Phi_\mu \psi + \frac{1}{2} \mu\psi^+ \alpha_{\mu\nu} H_{\mu\nu} \psi, \qquad (24,4)$$

где

$$H_{\mu\nu} = \Phi_{\nu,\,\mu} - \Phi_{\mu,\,\nu}.$$

Член, соответствующий произведению скаляра спинорных частиц $\psi^+ \rho_3 \psi$ на скаляр поля, мы можем не учитывать, поскольку скаляр электромагнитного поля $\Phi_{\mu,\,\mu}$ в окончательном результате обращается в нуль.

С помощью формул (12,2), (12,3) и (19,8) лагранжиан взаимодействия (24,4) можно представить в виде

$$L' = -e^- \psi^+ (\Phi - (\boldsymbol{\alpha} \mathbf{\Phi})) \psi + \mu \psi^+ [\rho_3 (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{H}) + \rho_2 (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{E})] \psi. \qquad (24,5)$$

Величина $e^- = -e$ есть заряд электрона, а μ — возможный его собственный магнитный момент.

Как было показано в § 17, электроны в нерелятивистском приближении обладают кинематическим магнитным моментом, равным по абсолютной величине магнетону Бора μ_0, точнее

$$\mu_e = -\mu_0 = -\frac{e\hbar}{2m_0 c},$$

который в релятивистском приближении исчезает. Поэтому в общем случае при лагранжиане взаимодействия (24,5) заряженные частицы в нерелятивистском приближении могут иметь два магнитных момента: кинематический μ_0 и собственный μ.

В частности, для электронов собственный момент равен нулю ($\mu = 0$)[1]), и поэтому лагранжиан взаимодействия принимает вид

$$L' = -e\psi^+ \alpha_\mu \Phi_\mu \psi = e\psi^+ (\Phi - (\boldsymbol{\alpha} \mathbf{\Phi})) \psi. \qquad (24,6)$$

---

[1]) Взаимодействие электрона с электрон-позитронным вакуумом приводит к появлению у электрона (наряду с кинематическим) дополнительного магнитного момента, который по порядку величины равен $-\mu_0 \alpha / 2\pi$ ($\alpha = 1/137{,}0373$). Однако в § 43 будет показано, что этот дополнительный магнитный момент вовсе не следует вводить в первоначальный лагранжиан взаимодействия (24,5), поскольку он автоматически (так же, как и кинематический момент) появляется в нерелятивистском приближении при учете влияния электрон-позитронного вакуума.

Заметим, что наличие магнитного взаимодействия в лагранжиане (24,5) не дает возможности провести регуляризацию при построении теории электрон-позитронного вакуума [см. § 44, п. б)].

Суммарный лагранжиан электронов и электромагнитного поля имеет вид

$$L = -\hbar c\left(\frac{1}{2i}\psi^+\alpha_\mu\psi_\mu - \frac{1}{2i}\psi_\mu^+\alpha_\mu\psi + k_0\psi^+\rho_3\psi\right) - \\ - \frac{1}{16\pi}H_{\mu\nu}H_{\mu\nu} - \frac{1}{8\pi}\Phi_{\mu,\mu}\Phi_{\nu,\nu} - e\psi^+\alpha_\mu\Phi_\mu\psi. \quad (24,7)$$

Варьируя лагранжиан L по функциям ψ^+:

$$\frac{\delta L}{\delta\psi^+} = \frac{\partial L}{\partial\psi^+} - \frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial L}{\partial\psi_\mu^+},$$

получаем уравнение, описывающее движение заряженных частиц в электромагнитном поле:

$$-\hbar c\left(\frac{1}{i}\alpha_\mu\psi_\mu + k_0\rho_3\psi\right) - e\alpha_\mu\Phi_\mu\psi = 0, \quad (24,8)$$

которое в трехмерных обозначениях принимает вид

$$\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t} + e\Phi - \frac{c\hbar}{i}(\boldsymbol{\alpha}\nabla) - e(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\Phi}) - \rho_3 m_0 c^2\right)\psi = 0, \quad (24,9)$$

совпадающий с уравнением (17,16).

Варьируя уравнение (24,7) по функции ψ, мы получим уравнение для комплексно-сопряженной функции ψ^+.

Для того чтобы получить дифференциальное уравнение для потенциалов, мы должны проварьировать лагранжиан по потенциалам:

$$\frac{\delta L}{\delta\Phi_\mu} = \frac{\partial L}{\partial\Phi_\mu} - \frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial L}{\partial\Phi_{\mu,\nu}}.$$

Принимая во внимание соотношения

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial\Phi_\mu} &= -e\psi^+\alpha_\mu\psi, \\ \frac{\partial L}{\partial\Phi_{\mu,\nu}} &= \frac{1}{4\pi}(\Phi_{\nu,\mu} - \Phi_{\mu,\nu}) - \frac{1}{4\pi}\delta_{\mu\nu}\Phi_{\lambda,\lambda}, \end{aligned}\right\} \quad (24,10)$$

находим известное уравнение для потенциалов в присутствии зарядов:

$$\Box\Phi_\mu = 4\pi e\psi^+\alpha_\mu\psi, \quad (24,11)$$

или, в трехмерных обозначениях:

$$\left.\begin{aligned} \Box\,\Phi &= 4\pi e\psi^+\psi, \\ \Box\,\boldsymbol{\Phi} &= 4\pi e\psi^+\boldsymbol{\alpha}\psi. \end{aligned}\right\} \quad (24,12)$$

б) Тензор энергии. Для тензора энергии находим следующее выражение:

$$T_{\mu\nu} = \Phi_{\lambda,\mu}\frac{\partial L}{\partial\Phi_{\lambda,\nu}} + \psi_\mu^+\frac{\partial L}{\partial\psi_\nu^+} + \frac{\partial L}{\partial\psi_\nu}\psi_\mu - L\delta_{\mu\nu}.$$

Поскольку лагранжиан взаимодействия L' не зависит от функций $\Phi_{\lambda,\nu}$, ψ_ν^+ и ψ_ν, а произведение функций от различных полей появляется лишь в последнем члене, для тензора энергии мы будем иметь выражение

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(1)} + T_{\mu\nu}^{(2)} + \delta_{\mu\nu} e\psi^+ \alpha_\lambda \Phi_\lambda \psi, \tag{24,13}$$

где $T_{\mu\nu}^{(1)}$ — компоненты тензора энергии дираковских частиц [см. формулу (22,11)] и $T_{\mu\nu}^{(2)}$ — компоненты тензора энергии электромагнитного поля [см. формулу (16,8)].

Отсюда находим следующее выражение для плотности энергии:

$$T_{44} = -\frac{\hbar c}{2i}\left(\psi^+ \frac{\partial\psi}{c\,\partial t} - \frac{\partial\psi^+}{c\,\partial t}\psi\right) + \frac{1}{8\pi}\left[(\operatorname{rot}\boldsymbol{\Phi})^2 + (\operatorname{div}\boldsymbol{\Phi})^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}}{\partial t}\right)^2 - (\operatorname{grad}\Phi)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)^2\right] - e\psi^+(\Phi - (\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\Phi}))\psi. \tag{24,14}$$

Следовательно, полная энергия обоих полей равна

$$H = \int T_{44}\, d^3x. \tag{24,15}$$

в) Квантование смешанного поля. Квантование смешанного поля (электроны плюс электромагнитное поле) мы можем произвести для следующих двух случаев: 1) поле электронов является неквантованным, электромагнитное поле — квантованным, 2) оба поля являются квантованными.

Первый случай имеет место, когда можно пренебречь как возможностью появления пар, так и влиянием вакуумных членов[1]).

Как известно, переход от классического поля к квантованному сводится к замене классических скобок Пуассона квантовыми. В частности, квантовое уравнение движения имеет вид [см. формулу (7,5)]:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{i}{\hbar}(HF - FH), \tag{24,16}$$

где H является функцией Гамильтона.

Покажем, что трехмерные ($t = t'$) перестановочные соотношения, найденные нами для волновых функций свободных полей, остаются без изменения также для случая смешанных полей.

Для этой цели мы должны доказать, что квантовое уравнение движения (24,16) при подстановке в него функции Гамильтона (24,15) ведет к уравнениям поля (24,8) и (24,12). Докажем это прежде всего для скалярного потенциала Φ. Как видно из формулы (16,19),

---

[1]) Более подробно взаимодействие двух вторично квантованных полей будет рассмотрено нами в главе IV (см. § 42, 43).

четырехмерные перестановочные соотношения для скалярного потенциала имеют вид:

$$[\Phi(\boldsymbol{r}, t), \Phi(\boldsymbol{r}', t')]_- = -\frac{4\pi c\hbar}{i}\Delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}', t-t'), \tag{24,17}$$

где

$$\Delta(\boldsymbol{R}, T) = \frac{1}{8\pi^3}\int e^{i\varkappa\boldsymbol{R}}\frac{\sin c\varkappa T}{\varkappa}d^3\varkappa.$$

При переходе к трехмерным перестановочным соотношениям ($t=t'$) мы должны учесть равенства

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{T\to 0}\Delta(\boldsymbol{R}, T)=0, \qquad \lim_{T\to 0}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial T^2}\Delta(\boldsymbol{R}, T)=0,\\ &\lim_{T\to 0}\frac{\partial\Delta(\boldsymbol{R}, T)}{c\,\partial T}=\delta(\boldsymbol{R}). \end{aligned}\right\} \tag{24,18}$$

Тогда находим следующие перестановочные соотношения для скалярного потенциала:

$$\left.\begin{aligned} &[\Phi, \Phi']_- = [\Phi_t, \Phi'_t]_- = 0,\\ &[\Phi_t, \Phi']_- = -\frac{4\pi c^2\hbar}{i}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),\\ &[\Phi_t, \nabla'\Phi']_- = -\frac{4\pi c^2\hbar}{i}\nabla'\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'), \end{aligned}\right\} \tag{24,19}$$

где

$$\nabla' = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x'} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y'} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z'},$$

$$\Phi = \Phi(\boldsymbol{r}, t); \quad \Phi' = \Phi(\boldsymbol{r}', t); \quad \Phi_t = \frac{\partial\Phi(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t}.$$

Последние квантовые скобки Пуассона (трехмерные) составлены из двух волновых функций, которые могут относиться к различным пространственным координатам, но содержат одно и то же значение времени t.

Волновые функции и их производные следует теперь рассматривать в качестве операторов, действующих на функцию числа частиц, сопоставленных полю, что подробно обсуждалось в предыдущей главе. Оставляя в гамильтониане члены, зависящие лишь от скалярного потенциала, поскольку с остальными функциями потенциал Φ коммутирует, получаем:

$$H' = -\frac{1}{8\pi}\int\left((\nabla'\Phi')^2 + \frac{1}{c^2}\Phi'_t\Phi'_t + 8\pi e\psi'^{+}\psi'\Phi'\right)d^3x', \tag{24,20}$$

откуда с помощью квантового уравнения движения (24,16) находим:

$$\frac{1}{c^2}\Phi_{tt} = -\frac{i}{8\pi\hbar c^2}\int\Big\{\nabla'\Phi'[\nabla'\Phi', \Phi_t]_- + [\nabla'\Phi', \Phi_t]_-\nabla'\Phi' +$$
$$+\frac{1}{c^2}\Phi'_t[\Phi'_t, \Phi_t]_- + \frac{1}{c^2}[\Phi'_t, \Phi_t]_-\Phi'_t +$$
$$+ 8\pi e\psi'^{+}\psi'[\Phi', \Phi_t]_-\Big\}d^3x'.$$

Далее, принимая во внимание перестановочные соотношения (24,19) и учитывая правила интегрирования при наличии под интегралом δ-функции и ее производной, находим:

$$\frac{1}{c^2}\Phi_{tt} = \nabla^2\Phi - 4\pi e\psi^{+}\psi,$$

т. е. потенциал Φ удовлетворяет уравнению Даламбера (24,12):

$$\Box\Phi = 4\pi e\psi^{+}\psi. \tag{24,21}$$

Аналогичным способом можно получить дифференциальное уравнение (24,12) для вектор-потенциала, а с помощью трехмерных перестановочных соотношений для волновых функций ψ^{+} и ψ [см. формулы (23,43)] — волновое уравнение для спинорных частиц (24,9). Таким образом, трехмерные перестановочные соотношения для волновых функций, найденные для свободного поля, сохраняют также свою силу при учете взаимодействия между полями[1]).

§ 25. Исключение продольных составляющих. Закон Кулона

Для того чтобы исследовать уравнение Дирака (вторично не квантованное), описывающее движение нескольких электронов, взаимодействующих лишь с квантованным электромагнитным полем, мы должны для каждого электрона ввести свои пространственные координаты (или радиус-векторы r_s). Вместе с тем, чтобы сохранить релятивистскую инвариантность теории, необходимо придать ей такую формулировку, в которой каждой частице приписывается еще и свое собственное время t_s. Кроме того, мы должны задать пространственно-временные координаты r, t поля. Таким образом, вторично не квантованное уравнение Дирака, описывающее движение ν электронов (заряд $e^- = -e$) в электромагнитном поле, должно иметь вид

$$D\psi = \sum_{s=1}^{\nu}\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t_s} + e\Phi(s) - \frac{c\hbar}{i}(\boldsymbol{\alpha}_s\nabla_s) - e(\boldsymbol{\alpha}_s\boldsymbol{\Phi}(s)) - \rho_{3s}m_0c^2\right)\psi = 0, \tag{25,1}$$

---

[1]) Заметим, что четырехмерные перестановочные соотношения [см., например, (16,19)] имеют место также, когда поле электронов вторично не квантовано (ψ — не оператор).

где

$$\nabla_s = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x_s} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y_s} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z_s}, \qquad \Phi(s) = \Phi(\boldsymbol{r}_s, t_s),$$

$$\boldsymbol{\Phi}(s) = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{r}_s, t_s), \qquad \Phi = \Phi(\boldsymbol{r}, t), \qquad \boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{r}, t).$$

Матрицы α_s, ρ_{3s}, действуют на спиновые функции частицы с индексом s; кроме того, в точке взаимодействия заряда с полем мы приписываем полю координаты и время заряда.

Считая электромагнитное поле квантованным, мы должны включить в волновую функцию ψ не только пространственные $(\boldsymbol{r}_s, t_s)$ и спиновые координаты всех электронов, но также функцию числа частиц электромагнитного поля, которая при отсутствии фотонов имеет вид

$$f(N) = \prod_i \delta_{N_i, 0}.$$

Согласно (16,19) потенциалы удовлетворяют следующим перестановочным соотношениям:

$$\left.\begin{aligned} [\Phi, \Phi(s)]_- &= -\frac{4\pi c\hbar}{i}\Delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_s, t-t_s), \\ [\Phi_n, \Phi_{n'}(s)]_- &= \frac{4\pi c\hbar}{i}\delta_{nn'}\Delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_s, t-t_s), \\ [\Phi, \Phi_n(s)]_- &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (25,2)$$

где перестановочная Δ-функция равна

$$\Delta(\boldsymbol{R}, T) = \frac{1}{8\pi^3}\int e^{i\varkappa \boldsymbol{R}}\frac{\sin c\varkappa T}{\varkappa}d^3\varkappa. \qquad (25,3)$$

Заметим, что при наличии перестановочных соотношений (25,2) на потенциалы не может быть наложено дополнительного условия Лоренца $L\psi = 0$, где

$$L = \frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \operatorname{div}\boldsymbol{\Phi}, \qquad (25,4)$$

поскольку оператор L не коммутирует с оператором Дирака D (см. ниже).

Следуя Ферми[1]), мы можем наложить на оператор L условие менее сильное, чем условие Лоренца:

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \operatorname{div}\boldsymbol{\Phi} - 4\pi\sum_{s=1}^{\nu} e\Delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_s, t-t_s)\right)\psi = 0. \qquad (25,5)$$

Здесь необходимо заметить, что при введении всякого дополнительного условия следует проверить, не является ли оно слишком

---

[1]) E. Fermi, Rev. Mod. Phys. 4, 98 (1932); см. также В. А. Фок, Sow. Phys. 6, 425 (1934).

жестким, т. е. таким, при котором система уравнений не будет совместной. Как известно из квантовой теории, уравнения $U\psi = 0$, $V\psi = 0$ могут иметь общее решение только в том случае, когда операторы U и V коммутируют между собой, т. е. $UV = VU$. Оператор F подобран таким образом, что он коммутирует с оператором Дирака D. В самом деле,

$$\left[\mathrm{D}, \frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \operatorname{div}\boldsymbol{\Phi}\right]_- =$$

$$= \left[\sum_{s=1}^{\nu}[e\Phi(s) - e(\boldsymbol{\alpha}_s\boldsymbol{\Phi}(s))], \left(\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \operatorname{div}\boldsymbol{\Phi}\right)\right]_- =$$

$$= \frac{4\pi c\hbar}{i}\sum_{s=1}^{\nu} e\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + (\boldsymbol{\alpha}_s\nabla)\right)\Delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_s, t - t_s).$$

Точно так же легко показать, что

$$\left[\mathrm{D}, \sum_{s'=1}^{\nu}\Delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_{s'}, t - t_{s'})\right]_- = \left[\sum_{s=1}^{\nu}\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t_s} - \frac{c\hbar}{i}(\boldsymbol{\alpha}_s\nabla_s)\right) \times\right.$$

$$\left.\times\sum_{s'=1}^{\nu}\Delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_{s'}, t - t_{s'})\right]_- = \frac{c\hbar}{i}\sum_{s=1}^{\nu}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + (\boldsymbol{\alpha}_s\nabla)\right)\Delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_s, t - t_s).$$

Отсюда следует, что оператор

$$F = \frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \operatorname{div}\boldsymbol{\Phi} - 4\pi e\sum_{s=1}^{\nu}\Delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_s, t - t_s) \qquad (25{,}6)$$

коммутирует с оператором D и дополнительное уравнение (25,5) совместимо с основным уравнением (25,1).

Заметим, что волновая функция ψ не зависит от координат поля $\boldsymbol{r}$, t, и поэтому в уравнении (25,5) координаты $\boldsymbol{r}$ и t следует рассматривать как параметры, благодаря чему соотношение (25,5) должно иметь место как для потенциалов, так и для их амплитуд Фурье.

Четырехмерные потенциалы мы можем разбить на поперечные $\boldsymbol{A}$ и продольные составляющие $\boldsymbol{\Phi}$ и Φ_0:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= \boldsymbol{\Phi} - \frac{\nabla(\nabla\boldsymbol{\Phi})}{\nabla^2} = \boldsymbol{\Phi} + \frac{\nabla\Phi_0}{\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)}, \\ \Phi &= \Phi, \quad \Phi_0 = -\frac{(\nabla\boldsymbol{\Phi})}{\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)}. \end{aligned}\right\} \qquad (25{,}7)$$

Представляя потенциалы в виде разложения в ряд Фурье, мы можем деление на оператор $\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)$ определить следующим образом:

$$\frac{e^{-ic\varkappa t}}{\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)} = \frac{e^{-ic\varkappa t}}{-i\varkappa}. \tag{25,8}$$

Согласно (25,7) составляющие поля A связаны между собою условием поперечности

$$\operatorname{div} A = 0, \tag{25,9}$$

и поэтому число независимых функций равно двум. Для продольных составляющих мы имеем также две независимые функции Φ и Φ_0.

Из перестановочных соотношений (25,2) следует, что продольные составляющие коммутируют с поперечными:

$$[A_n, \ \Phi(s)]_- = [A_n \Phi_0(s)]_- = 0, \tag{25,10}$$

а между двумя поперечными или двумя продольными составляющими имеют место следующие перестановочные соотношения:

$$\left.\begin{aligned} &[A_n, \ A_{n'}(s)]_- = \frac{4\pi c\hbar}{i}\left(\delta_{nn'} - \frac{\nabla_n \nabla_{n'}}{\nabla^2}\right)\Delta(r - r_s, \ t - t_s), \\ &[\Phi, \ \Phi(s)]_- = -[\Phi_0, \ \Phi_0(s)]_- = -\frac{4\pi c\hbar}{i}\Delta(r - r_s, \ t - t_s), \\ &[\Phi, \ \Phi_0(s)]_- = 0. \end{aligned}\right\} \tag{25,11}$$

Отсюда видно, что перестановочные соотношения для амплитуд поперечного поля совпадают с перестановочными соотношениями (14,18), найденными нами для электромагнитного поля в вакууме.

Отделение продольной части электромагнитного поля от поперечной мы можем сделать также и в самих уравнениях (25,1) и (25,5):

$$D\psi = \left\{\sum_{s=1}^{\nu}\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t_s} + e\Phi(s)\right) - \left(\frac{c\hbar}{i}(\alpha_s \nabla_s) - e\frac{(\alpha_s \nabla_s)\Phi_0(s)}{\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t_s}\right)}\right) - e(\alpha_s A(s)) - \rho_{3s} m_0 c^2\right\}\psi = 0, \tag{25,12}$$

$$\left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\Phi - \Phi_0) - 4\pi\sum_{s=1}^{\nu} e\Delta(r - r_s, t - t_s)\right]\psi = 0. \tag{25,13}$$

Покажем, что мы можем избавиться от продольных составляющих $\Phi(s)$ и $\Phi_0(s)$ в уравнении Дирака (25,12) с помощью калибровочного преобразования. При калибровочном преобразовании $\psi = e^{\chi}\psi'$

волновое уравнение преобразуется по схеме

$$e^{-\chi}\,\mathrm{D}\psi = e^{-\chi}\,\mathrm{D}e^{\chi}\psi' = 0. \tag{25,14}$$

Закон перестановки функции e^{χ} с операторами, которые действуют на величину χ, определяется равенством

$$\mathrm{D}e^{\chi} = e^{\chi}(\mathrm{D} + [\mathrm{D}, \chi]_-). \tag{25,15}$$

Это можно показать для случая, когда перестановочное соотношение между функциями D и χ имеет вид

$$\mathrm{D}\chi - \chi\mathrm{D} = \lambda,$$

причем величина λ является числом, а не оператором. Действительно, отсюда следует:

$$\mathrm{D}\chi^2 - \chi^2\mathrm{D} = (\mathrm{D}\chi - \chi\mathrm{D})\chi + \chi(\mathrm{D}\chi - \chi\mathrm{D}) = 2\chi\lambda.$$

Последняя формула может быть обобщена на любую степень χ:

$$\mathrm{D}\chi^n - \chi^n\mathrm{D} = n\chi^{n-1}\lambda. \tag{25,16}$$

Разлагая выражение e^{χ} в ряд:

$$e^{\chi} = 1 + \chi + \frac{\chi^2}{2!} + \frac{\chi^3}{3!} + \ldots$$

и применяя к каждому члену формулу (25,16), получаем равенство (25,15):

$$\mathrm{D}e^{\chi} - e^{\chi}\mathrm{D} = e^{\chi}[\mathrm{D}, \chi]_-.$$

Выбирая величину χ в виде линейной комбинации функции $\Phi(s)$ и $\Phi_0(s)$:

$$\chi = \sum_{s'=1}^{\nu} [a_{s'}\Phi(s') + b_{s'}\Phi_0(s')],$$

находим с помощью (25,15):

$$-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t_s} e^{\chi} = e^{\chi}\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t_s} - a_s\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\Phi(s)}{\partial t_s} - b_s\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\Phi_0(s)}{\partial t_s}\right),$$

$$e\Phi(s)e^{\chi} = e^{\chi}\left(e\Phi(s) + e\sum_{s'=1}^{\nu}[\Phi(s),\ a_{s'}\Phi(s')]_-\right),$$

т. е.

$$\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t_s} + e\Phi(s)\right)e^{\chi} =$$

$$= e^{\chi}\left[-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t_s} - \left(\frac{\hbar}{i}a_s\frac{\partial\Phi(s)}{\partial t_s} + \frac{\hbar}{i}b_s\frac{\partial\Phi_0(s)}{\partial t_s} - e\Phi(s)\right) + \right.$$

$$\left. + e\sum_{s'=1}^{\nu}[\Phi(s),\ a_{s'}\Phi(s')]_-\right]. \tag{25,17}$$

Аналогичным способом получаем для другого члена, не коммутирующего с функцией χ:

$$\left(-\frac{c\hbar}{i}\nabla_s + e\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t_s}\right)^{-1}\nabla_s\Phi_0(s)\right)e^{\chi} =$$

$$= e^{\chi}\left\{-\frac{\hbar c}{i}\nabla_s - \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t_s}\right)^{-1}\times\right.$$

$$\times\nabla_s\left(\frac{\hbar}{i}a_s\frac{\partial\Phi(s)}{\partial t_s} + \frac{\hbar}{i}b_s\frac{\partial\Phi_0(s)}{\partial t_s} - e\Phi_0(s)\right) +$$

$$\left. + e\sum_{s'=1}^{\nu}\left[\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t_s}\right)^{-1}(\nabla_s\Phi_0(s)),\ b_{s'}\Phi_0(s')\right]_-\right\}. \quad (25,18)$$

Все остальные члены оператора D коммутируют с функцией e^{χ}.

Оператор, входящий в обобщенное условие Лоренца (25,13), преобразуется в данном случае согласно уравнению

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\Phi - \Phi_0)e^{\chi} =$$

$$= e^{\chi}\left\{\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\Phi - \Phi_0) + \sum_{s'=1}^{\nu}\left[\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t},\ a_{s'}\Phi(s')\right]_- -\right.$$

$$\left. - \left[\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi_0}{\partial t},\ b_{s'}\Phi_0(s')\right]_-\right\}. \quad (25,19)$$

Принимая во внимание перестановочные соотношения (25,11), приводим уравнение (25,13) к виду

$$\left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\Phi - \Phi_0) - 4\pi\sum_{s'=1}^{\nu}\left(e + \frac{\hbar c}{i}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(a_{s'} + b_{s'})\right)\times\right.$$

$$\left.\times\Delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{s'},\ t - t_{s'})\right]\psi' = 0. \quad (25,20)$$

Для того чтобы исключить квантованные амплитуды продольного поля из уравнений (25,17) и (25,18), мы должны положить

$$a_{s'} + b_{s'} = \frac{ie}{c\hbar}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t_{s'}}\right)^{-1}. \quad (25,21)$$

Учитывая при этом соотношение

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t_{s'}}\right)^{-1}\Delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{s'},\ t - t_{s'}) = -\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{-1}\Delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{s'},\ t - t_{s'}),$$

найдем:

$$\left(e + \frac{c\hbar}{i}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(a_{s'} + b_{s'})\right)\Delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{s'},\ t - t_{s'}) = 0.$$

Тогда условие Лоренца — Ферми (25,20) сводится к

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\Phi - \Phi_0)\psi' = 0. \quad (25,22)$$

Подставляя сюда вместо Φ_0 выражение (25,7), получим обобщенное на квантовую электродинамику условие Лоренца:

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\operatorname{div}\boldsymbol{\Phi}\right)\psi'=0. \tag{25,23}$$

С помощью равенств (25,21) и (25,22) находим:

$$\left(\frac{\hbar}{i}a_s\frac{\partial\Phi(s)}{\partial t_s}+\frac{\hbar}{i}b_s\frac{\partial\Phi_0(s)}{\partial t_s}-e\Phi(s)\right)\psi'= \\ =\left[\left(\frac{\hbar}{i}(a_s+b_s)\frac{\partial}{\partial t_s}-e\right)\Phi(s)\right]\psi'=0, \tag{25,24}$$

откуда следуют преобразования для обобщенного оператора энергии и обобщенного импульса:

$$\left.\begin{aligned}\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}+e\Phi\right)e^{\chi}&=e^{\chi}\left[-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}+e\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)\frac{\partial U}{c\,\partial t}\right],\\ \left(-\frac{\hbar c}{i}\nabla-e\boldsymbol{\Phi}\right)e^{\chi}&=e^{\chi}\left[-\frac{\hbar c}{i}\nabla-e\left(\boldsymbol{A}+\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)\nabla U\right)\right],\end{aligned}\right\} \tag{25,25}$$

где

$$U=4\pi\sum_{s'=1}^{\nu}e\frac{\Delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_{s'},\,t-t_{s'})}{\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)^2}= \\ =-\frac{1}{2\pi^2}\sum_{s'=1}^{\nu}e\int e^{i\varkappa(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_{s'})}\frac{\sin c\varkappa(t-t_{s'})}{\varkappa^3}\,d^3\varkappa, \tag{25,26}$$

а $\boldsymbol{A}$ является потенциалом поперечного поля, т. е. $\operatorname{div}\boldsymbol{A}=0$.

Заметим, что с помощью одного соотношения (25,21) невозможно однозначно определить значения коэффициентов $a_{s'}$ и $b_{s'}$. Поэтому мы положили:

$$a_{s'}=\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)\frac{ie}{c\hbar}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t_{s'}}\right)^{-1},\quad b_{s'}=\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)\frac{ie}{c\hbar}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t_{s'}}\right)^{-1},$$

где γ является пока что неопределенной постоянной величиной.

Для того чтобы сделать эту задачу однозначной, мы должны на функцию ψ' наложить более сильное условие, чем (25,23), а именно потребовать также

$$\Phi\psi'=0. \tag{25,26а}$$

Тогда (25,23) дает

$$(\operatorname{div}\boldsymbol{\Phi})\psi'=0. \tag{25,26б}$$

Эти условия можно рассматривать как обобщение двух условий (12,23), установленных для свободного электромагнитного поля в вакууме, на случай наличия электронов.

В этом случае мы найдем, что $\gamma = 0$, и преобразования (25,25) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned}\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}+e\Phi\right)e^{\chi}&=e^{\chi}\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{e}{2c}\frac{\partial U}{\partial t}\right),\\ \left(-\frac{\hbar c}{i}\nabla-e\boldsymbol{\Phi}\right)e^{\chi}&=e^{\chi}\left(-\frac{\hbar c}{i}\nabla-eA-\frac{e\nabla U}{2}\right).\end{aligned}\right\}\qquad(25,27)$$

Для того чтобы найти функцию U, нам необходимо прежде всего вычислить интеграл

$$I=\frac{1}{2\pi^2}\int e^{i\varkappa R}\,\frac{\sin c\varkappa T}{\varkappa^3}\,d^3\varkappa.$$

Переходя к полярным координатам, находим:

$$I=\frac{1}{2\pi^2}\int\limits_0^\infty \sin c\varkappa T\,\frac{d\varkappa}{\varkappa}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^\pi d\theta\,\sin\theta\, e^{i\varkappa R\cos\theta}.$$

После элементарных вычислений получим:

$$I=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{\sin c\varkappa T\sin\varkappa R\,d\varkappa}{R\varkappa^2}=$$

$$=\frac{1}{\pi R}\int\limits_0^\infty\left[\cos\varkappa(R-cT)-\cos\varkappa(R+cT)\right]\frac{d\varkappa}{\varkappa^2}.$$

Интегрируя последнее выражение по частям, имеем:

$$I=\frac{1}{\pi R}\int\limits_0^\infty\left[(R+cT)\sin\varkappa(R+cT)-(R-cT)\sin\varkappa(R-cT)\right]\frac{d\varkappa}{\varkappa}.$$

С помощью известного интеграла

$$\int\limits_0^\infty\sin a\varkappa\,\frac{d\varkappa}{\varkappa}=\frac{\pi}{2}\,\frac{|a|}{a},$$

получим выражение для искомой функции U:

$$U=-\sum_{s'=1}^{\nu}e\,\frac{1}{2R_{s'}}\left(|R_{s'}+cT_{s'}|-|R_{s'}-cT_{s'}|\right),\qquad(25,28)$$

где

$$R_{s'}=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_{s'}|,\qquad T_{s'}=t-t_{s'}.$$

Подставляя последнее выражение в формулу (25,27), при $cT_{s'} < R_{s'}$ получим:

$$\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}+e\Phi\right)e^{\chi}=e^{\chi}\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}-\sum_{s'=1}^{\nu}\frac{e^2}{2\,|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_{s'}|}\right), \qquad (25,29)$$

$$\left(-\frac{\hbar c}{i}\nabla-e\boldsymbol{\Phi}\right)e^{\chi}=$$
$$=e^{\chi}\left(-\frac{\hbar c}{i}\nabla-e\boldsymbol{A}-\sum_{s'=1}^{\nu}\frac{e^2(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_{s'})\,c\,(t-t_{s'})}{2\,|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_{s'}|^3}\right). \qquad (25,30)$$

Наконец, мы должны установить соотношение между собственными временами отдельных электронов.

Дирак, Фок и Подольский[1]) показали, что можно получить из инвариантной формулировки квантовой электродинамики [см. уравнение (25,1)] теорию с одним временем, если положить все времена t_s электронов равными времени поля t, т. е. $t_s=t$.

В этом случае

$$\frac{\partial}{\partial t}=\sum_{s=1}^{\nu}\frac{\partial t_s}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t_s}=\sum_{s=1}^{\nu}\frac{\partial}{\partial t_s},$$

а время $T_{s'}=t-t_{s'}$ обращается в нуль, т. е. условие, при котором были вычислены интегралы, будет удовлетворено, а та часть потенциальной энергии продольного поля, которая пропорциональна времени $T_{s'}=t-t_{s'}$, обратится в нуль.

Таким образом, уравнение Дирака (25,1) для системы электронов после исключения квантованных амплитуд продольного поля принимает вид

$$\left\{-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}-V-\right.$$
$$\left.-\sum_{s=1}^{\nu}\left[\left(\boldsymbol{\alpha}_s\left(\frac{c\hbar}{i}\nabla_s+e\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_s,\ t)\right)\right)+\rho_{3s}m_0c^2\right]\right\}\psi=0. \qquad (25,31)$$

Потенциальная энергия взаимодействия V между электронами в этом случае дается известным кулоновским выражением

$$V=\sum_{s=1}^{\nu}\sum_{\substack{s'=1\\ s>s'}}^{\nu}V_{ss'}, \qquad (25,32)$$

где

$$V_{ss'}=\frac{e^2}{|\boldsymbol{r}_s-\boldsymbol{r}_{s'}|}.$$

---

[1]) П. Дирак, В. Фок и Б. Подольский, Sow. Phys. 2, 468 (1932).

Кроме того, к выражению (25,32) мы должны добавить энергию

$$V^{\text{прод}}_{\text{собст}}=\sum_{s=1}^{\nu} V_{ss}, \text{ где } V_{ss}=\frac{e^2}{2\,|\boldsymbol{r}_s-\boldsymbol{r}_s|}=\frac{e^2}{4\pi^2}\int\frac{d^3\varkappa}{\varkappa^2}=\frac{e^2}{\pi}\int_0^\infty d\varkappa, \qquad (25{,}33)$$

соответствующую бесконечной собственной энергии электронов — «продольную собственную энергию». Происхождение бесконечной собственной энергии связано с тем обстоятельством, что сопоставленные полю частицы в указанном формализме мы рассматривали как точечные, и поэтому в квантовой электродинамике естественно должна остаться трудность с бесконечной энергией точечных частиц, которая имеет место также и в классической теории точечных электронов. Это говорит нам прежде всего о том, что квантовая электродинамика на первой стадии своего развития была далека от разрешения вопросов, связанных со строением элементарных частиц.

К проблеме собственной массы мы вернемся в конце нашей книги (см. § 44), а пока бесконечную собственную энергию будем просто отбрасывать.

§ 26. Формула Брейта. Поперечная собственная энергия

В предыдущем параграфе, исключая продольное электромагнитное поле, мы получили кулоновское взаимодействие между зарядами в предположении, что все собственные времена электронов равны друг другу:

$$t_1=t_2=\ldots=t. \qquad (26{,}1)$$

Продольное поле мы предварительно проквантовали и сопоставили ему частицы — псевдофотоны. Кулоновское взаимодействие до некоторой степени можно рассматривать как результат виртуального испускания псевдофотона [1]) одним зарядом с последующим его поглощением другим.

После исключения квантованного продольного поля остается еще взаимодействие зарядов с квантованным поперечным полем, которое не обращается в нуль даже в том случае, если фотоны (частицы, сопоставленные поперечному полю) отсутствуют. Поэтому естественно ожидать, что поперечное поле должно привести к дополнительному взаимодействию, связанному с виртуальным испусканием фотона одним электроном с последующим его поглощением другим.

Поперечное поле не может быть полностью исключено из уравнений для системы электронов, так что проблема электромагнитного взаимодействия в общем случае имеет лишь приближенное решение.

При сравнительно малых скоростях движения электронов ($v_1 \ll c$, $v_2 \ll c$) энергию взаимодействия удобно представить в виде разло-

[1]) Отметим, что псевдофотоны излучаться не могут, так как при отсутствии зарядов продольное электромагнитное поле обращается в нуль.

жения по величине β^2 ($\beta^2 \sim v_1 v_2/c^2$). Тогда первый член разложения, пропорциональный β^0, определяется кулоновским взаимодействием; второй член разложения, пропорциональный β^2 и связанный с полем поперечных фотонов, приводит к так называемой брейтовской части взаимодействия. Такое разложение не годится в релятивистском случае ($\beta^2 \sim 1$). В этом случае энергию связи следует искать в виде разложения по постоянной тонкой структуры α [см. формулу Мёллера (49,11)].

а) Формула Брейта. Найдем второй член разложения, пропорциональный $v_1 v_2/c^2$, для энергии взаимодействия двух зарядов, движущихся со сравнительно малой скоростью.

Оставляя в уравнении Дирака величины порядка $\mathrm{p}/m_0 c$ (p — импульс частицы), находим:

$$\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t} - \mathrm{H}\right)\psi = 0, \tag{26,2}$$

где

$$\mathrm{H} = -e\Phi + \frac{1}{2m_0}\left(\mathrm{p} + \frac{e}{c}A\right)^2 - (\mu H) \tag{26,3}$$

есть гамильтониан частицы, $\mathrm{p} = \frac{\hbar}{i}\nabla$ — оператор импульса, а $\mu = -\frac{e\hbar}{2m_0 c}\sigma$ — кинематический магнитный момент.

Отбрасывая величины, пропорциональные c^{-2}, и учитывая, что для поперечного поля $\operatorname{div} A = 0$, а также пренебрегая магнитным взаимодействием, которое становится заметным лишь на малых расстояниях (порядка $\hbar/m_0 c$), найдем:

$$\mathrm{H} = -e\Phi + \frac{\mathrm{p}^2}{2m_0} + \frac{e}{m_0 c}(A\mathrm{p}). \tag{26,4}$$

Таким образом, для системы двух заряженных частиц мы можем написать следующее уравнение:

$$\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{e^2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|} + e\Phi^{\text{внеш}}(1) + e\Phi^{\text{внеш}}(2) - \right.$$
$$\left. - \frac{\mathrm{p}_1^2}{2m_0} - \frac{\mathrm{p}_2^2}{2m_0} - \frac{e}{m_0 c}(A(1)\mathrm{p}_1) - \frac{e}{m_0 c}(A(2)\mathrm{p}_2)\right)\psi = 0, \tag{26,5}$$

являющееся приближением с точностью до величины $\mathrm{p}/m_0 c$ к уравнению (25,31). Здесь $\Phi^{\text{внеш}}(1)$ и $\Phi^{\text{внеш}}(2)$ — скалярные потенциалы внешних полей, действующих соответственно на первую и вторую заряженные частицы.

При отсутствии внешнего магнитного поля вектор-потенциал A содержит лишь поперечную квантованную часть поля:

$$A = \frac{1}{L^{3/2}}\sum_{\varkappa}\sqrt{\frac{2\pi c\hbar}{\varkappa}}\left(a e^{-ic\varkappa t + i\varkappa r} + a^+ e^{ic\varkappa t - i\varkappa r}\right). \tag{26,6}$$

Между его амплитудами имеют место следующие перестановочные соотношения:

$$a_n a_{n'}^{\prime +} - a_{n'}^{\prime +} a_n = \left(\delta_{nn'} - \frac{\varkappa_n \varkappa_{n'}}{\varkappa^2}\right) \delta_{\varkappa\varkappa'}, \tag{26,7}$$

которые следует, как и обычно, понимать в смысле действия на функцию числа частиц, включенную в волновую функцию ψ.

Согласно формуле (8,15) при отсутствии фотонов функция числа частиц должна иметь вид

$$f(N) = \prod_{l=\pm 1} \prod_{\varkappa'} \delta_{N_l', 0}, \tag{26,8}$$

где величина $l = \pm 1$ характеризует два возможных состояния поляризации электромагнитного поля (см. § 14); амплитуды a и a^+ действуют по законам (8,18) и (8,21) на числа частиц N', зависящие от волнового вектора $\varkappa'$.

Рассматривая члены, пропорциональные $\mathrm{p}/m_0 c$, как возмущение, мы можем уравнение (26,5) представить в виде

$$\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t} - \mathrm{H}\right)\psi = \frac{e}{m_0 c} \sum_{s=1}^{2} (\boldsymbol{A}(s)\,\mathrm{p}_s)\,\psi, \tag{26,9}$$

где

$$\mathrm{H} = \frac{e^2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|} + \sum_{s=1}^{2} \left(\frac{\mathrm{p}_s^2}{2m_0} - e\Phi^{\text{внеш}}(s)\right). \tag{26,10}$$

Будем искать решение уравнения (26,9) по методу теории возмущений:

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 + \psi_2 + \ldots, \tag{26,11}$$

причем для определения волновых функций мы имеем систему приближенных уравнений [1]):

$$\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t} - \mathrm{H}\right)\psi_0 = 0, \tag{26,12}$$

$$\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t} - \mathrm{H}\right)\psi_1 = \sum_{s=1}^{2} U^+(s)\,\psi_0, \tag{26,13}$$

$$\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t} - \mathrm{H}\right)\psi_2 = \sum_{s=1}^{2} U(s)\,\psi_1 \tag{26,14}$$

и т. д.

---

[1]) Этот метод вычисления был предложен Дираком [P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. (A) **136**, 453 (1932)].

Функция взаимодействия частиц с полем имеет вид

$$U(\boldsymbol{r},\ t)=\frac{e}{m_0cL^{3/2}}\sum_{\varkappa}\sqrt{\frac{2\pi c\hbar}{\varkappa}}\,e^{-ic\varkappa t+i\varkappa r}\,(a\mathrm{p}),\tag{26,15}$$

$$U^{+}(\boldsymbol{r},\ t)=\frac{e}{m_0cL^{3/2}}\sum_{\varkappa}\sqrt{\frac{2\pi c\hbar}{\varkappa}}\,e^{ic\varkappa t-i\varkappa r}\,(a^{+}\mathrm{p}),\tag{26,16}$$

а

$$U(s)=U(\boldsymbol{r}_s,\ t).$$

Поскольку действие операторов a на функцию числа частиц соответствует поглощению частицы, то согласно (26,8) при отсутствии в начальный момент фотонов

$$af(N)=0.\tag{26,17}$$

Поэтому в уравнении (26,13) мы оставили лишь члены, пропорциональные оператору порождения частицы a^{+}.

Функция ψ_1 описывает состояние, в котором имеется один фотон. Функция ψ_2 описывает состояние, в котором испущенный фотон поглощается. Поэтому в уравнении (26,14) мы должны оставить члены, пропорциональные оператору поглощения частиц a.

Таким образом, в уравнении

$$\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}-\mathrm{H}\right)\psi_2=V\psi_0\tag{26,18}$$

величину V мы можем рассматривать как дополнительную потенциальную энергию взаимодействия между электронами.

Выразим теперь взаимодействие V между двумя частицами через взаимодействие U между полем и частицей. С этой целью из (26,13) определим функцию ψ_1 и подставим найденное значение в (26,14).

Приближенное решение уравнения (26,13) имеет вид:

$$\psi_1=\sum_{s=1}^{2}\frac{U^{+}(s)}{-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}}\psi_0.\tag{26,19}$$

В самом деле, подставляя (26,19) в левую часть равенства (26,13) находим:

$$\sum_{s=1}^{2}\left(U^{+}(s)\psi_0-\frac{U^{+}(s)}{-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}}\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}-\mathrm{H}\right)\psi_0\right)-$$
$$-\frac{1}{2m_0}\sum_{s=1}^{2}\left(\frac{2\mathrm{p}_s U^{+}(s)\,\mathrm{p}_s}{-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}}+\frac{\mathrm{p}_s^2U^{+}(s)}{-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}}\right)\psi_0=\sum_{s=1}^{2}U^{+}(s)\psi_0.\tag{26,20}$$

Оценим порядок последнего члена левой части равенства по сравнению с первым. С этой целью учтем соотношения

$$\mathbf{p}_s = \frac{\hbar}{i}\nabla_s, \qquad \mathbf{p}_s\psi_0 \sim v_s m_0 \psi_0, \tag{26,21}$$

где v_s — скорость s-й частицы. Дифференцирование по координатам функции U^+ сводится к появлению в разложении Фурье (26,15) множителя $\varkappa$, который в конечном результате в знаменателе увеличивает на единицу степень R (R — расстояние между двумя частицами), т. е.

$$(\nabla_s U^+(s)) \sim \frac{1}{R} U^+(s). \tag{26,22}$$

Кроме того, легко показать, что

$$\frac{p_s U^+(s)}{-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}} \sim U^+(s)\frac{1}{c}.$$

Учитывая последние соотношения, имеем:

$$\frac{p_s U^+(s) p_s}{m_0\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}\right)} \sim \frac{v_s}{c} U^+(s), \tag{26,23}$$

$$\frac{p_s^2 U^+(s)}{2m_0\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}\right)} \sim \frac{\hbar}{m_0 c R} U^+(s). \tag{26,24}$$

Таким образом, пренебрегая в разложении членами порядка β^3, а также принимая расстояние между частицами много бо́льшим комптоновской длины волны ($R \gg \hbar/m_0 c$), мы можем в левой части равенства (26,20) отбросить члены, стоящие во второй сумме.

Подставляя (26,19) в уравнение (26,14), а также принимая во внимание соотношение (26,18), находим следующее приближенное выражение для энергии взаимодействия двух частиц:

$$V_{12} = U(1)\frac{U^+(2)}{-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}} + U(2)\frac{U^+(1)}{-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}}. \tag{26,25}$$

Кроме взаимодействия (26,25), функция V должна содержать энергии самодействия (т. е. собственные энергии) V_{11} и V_{22}, возникновение которых связано с испусканием частицей фотона с последующим его поглощением той же частицей. Однако выражение (26,25) не может быть использовано для определения функций V_{11} и V_{22}, поскольку в этом случае мы должны положить $R = 0$, вследствие чего условие законности приближенного выражения (26,19) ($R \gg \hbar/m_0 c$) не будет выполнено. Поэтому для вычисления энергии самодействия нами будет использован другой метод (см. ниже).

Подставляя в формулу (26,25) разложения для функций U и U^+ и принимая во внимание, что при отсутствии в начальный момент частиц мы имеем следующие значения для квадратичных комбинаций амплитуд электромагнитного поля:

$$a_{n'}^{\prime +} a_n f(N) = 0,$$

$$a_n a_{n'}^{\prime +} f(N) = \left(\delta_{nn'} - \frac{\varkappa_n \varkappa_{n'}}{\varkappa^2}\right) \delta_{\varkappa\varkappa'} f(N),$$

находим:

$$V_{12} = -\frac{2\pi e^2}{L^3 m_0^2 c^2} \sum_{\varkappa} \frac{1}{\varkappa^2} \left[e^{i\varkappa R} (a\mathbf{p}_1)(a^+\mathbf{p}_2) + e^{-i\varkappa R} (a\mathbf{p}_2)(a^+\mathbf{p}_1)\right], \tag{26,26}$$

причем в последнем выражении проведено суммирование по $\varkappa'$. Учитывая, что

$$a_n a_{n'}^+ = \delta_{nn'} - \frac{\varkappa_n \varkappa_{n'}}{\varkappa^2}, \tag{26,27}$$

имеем:

$$(a\mathbf{p}_1)(a^+\mathbf{p}_2) = a_n p_{1n} a_{n'}^+ p_{2n'} = (\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2) - \frac{(\varkappa\mathbf{p}_1)(\varkappa\mathbf{p}_2)}{\varkappa^2},$$

откуда, переходя в выражении (26,26) от ряда Фурье к интегралу, т. е. полагая

$$\frac{1}{L^3} \sum_{\varkappa} \to \frac{1}{8\pi^3} \int d^3\varkappa,$$

находим:

$$V_{12} = -\frac{e^2}{2\pi^2 m_0^2 c^2} \int e^{i\varkappa R} \left((\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2) - \frac{(\varkappa\mathbf{p}_1)(\varkappa\mathbf{p}_2)}{\varkappa^2}\right) \frac{d^3\varkappa}{\varkappa^2}. \tag{26,28}$$

Вводя интеграл

$$I(R) = \int \frac{1}{2\pi^2 \varkappa^4} (1 - e^{i\varkappa R})\, d^3\varkappa, \tag{26,29}$$

мы можем взаимодействие (26,28) представить в виде

$$V_{12} = -\frac{e^2}{m_0^2 c^2} (\nabla^2 I(R) (\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2) - \nabla_n \nabla_{n'} I(R)\, p_{1n} p_{2n'}). \tag{26,30}$$

При вычислении функции $I(R)$ вводим сферические координаты вектора $\varkappa$:

$$I(R) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{d\varkappa}{\varkappa^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta\, (1 - e^{i\varkappa R\cos\theta}).$$

Интегрируя последнее выражение по углам φ и θ, находим:

$$I(R) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty (\varkappa R - \sin \varkappa R) \frac{d\varkappa}{\varkappa^3 R} = \frac{2}{\pi} R \int_0^\infty (x - \sin x) \frac{dx}{x^3}.$$

Интегрируя далее по частям, имеем:

$$\int_0^\infty (x-\sin x)\frac{dx}{x^3}=\frac{1}{2}\int_0^\infty (1-\cos x)\frac{dx}{x^2}=\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{4},$$

откуда

$$I(R)=\frac{R}{2}. \qquad (26,31)$$

Подставляя значение $I(R)$ в (26,30) и принимая во внимание соотношение

$$\nabla_n\nabla_{n'}R=\frac{\delta_{nn'}}{R}-\frac{R_nR_{n'}}{R^3},$$

получим выражение для брейтовской части взаимодействия:

$$V_{12}=-\frac{e^2}{2m_0^2c^2}\left(\frac{(\mathrm{p}_1\mathrm{p}_2)}{R}+\frac{R_nR_{n'}\,\mathrm{p}_{1n}\,\mathrm{p}_{2n'}}{R^3}\right), \qquad (26,32)$$

где $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2$.

Брейтовская поправка к взаимодействию точно соответствует классической релятивистской поправке и определяет взаимодействие между двумя бесспиновыми частицами. При учете же спиновых эффектов, когда $U=e(\boldsymbol{\alpha}A)$, мы с помощью формулы (26,25) находим следующее выражение для энергии взаимодействия между двумя электронами, обусловленного переносом виртуальными фотонами:

$$V=-e^2\frac{(\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_2)R^2+(\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{R})(\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{R})}{2R^3}. \qquad (26,33)$$

Как будет показано ниже, формула (26,33), представляющая собою обобщенное брейтовское взаимодействие, включает в себя не только чисто брейтовскую часть взаимодействия (26,32), но и спиновую часть взаимодействия [см. (50,85)].

б) Собственная поперечная энергия электрона. Для нахождения собственной поперечной энергии $V_{\text{собст}}$ мы можем ограничиться рассмотрением уравнения для одного свободного электрона, взаимодействующего с полем поперечных фотонов:

$$\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\hbar c}{i}(\boldsymbol{\alpha}\nabla)-\rho_3 m_0c^2\right)\psi=e(\boldsymbol{\alpha}A)\psi. \qquad (26,34)$$

Решая последнее уравнение по методу теории возмущений в предположении, что в начальный момент фотоны отсутствуют, имеем:

$$\psi=\psi_0+\psi_1+\psi_2+\ldots,$$

$$\mathrm{D}\,\psi_0=0, \qquad \mathrm{D}\,\psi_1=U^+\psi_0, \qquad \mathrm{D}\,\psi_2=U\psi_1, \qquad (26,35)$$

где

$$U^{+}=\frac{e}{L^{3/2}}\sum_{\varkappa}\sqrt{\frac{2\pi c\hbar}{\varkappa}}(\boldsymbol{\alpha a}^{+})\,e^{ic\varkappa t-i\boldsymbol{\varkappa r}},$$

$$U=\frac{e}{L^{3/2}}\sum_{\varkappa}\sqrt{\frac{2\pi c\hbar}{\varkappa}}(\boldsymbol{\alpha a})\,e^{-ic\varkappa t+i\boldsymbol{\varkappa r}},$$

а D — оператор Дирака:

$$\mathrm{D}=-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\hbar c}{i}(\boldsymbol{\alpha}\nabla)-\rho_3 m_0 c^2. \tag{26,36}$$

Выберем такую систему координат, в которой электрон покоится. Тогда уравнение для ψ_0 принимает вид

$$\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}-\rho_3 m_0 c^2\right)\psi_0=0.$$

Его решение есть

$$\psi_0=\frac{1}{L^{3/2}}\,b e^{-ick_0 t}, \tag{26,37}$$

причем амплитуда b удовлетворяет уравнению

$$(1-\rho_3)\,b=0. \tag{26,38}$$

Отсюда для определения функции ψ_1 имеем уравнение

$$\mathrm{D}\psi_1=\frac{e\sqrt{2\pi c\hbar}}{L^3}\sum_{\varkappa}\frac{(\boldsymbol{\alpha a}^{+})}{\sqrt{\varkappa}}\,b e^{ict(\varkappa-k_0)-i\boldsymbol{\varkappa r}}. \tag{26,39}$$

Определим действие оператора D^{-1} на показательную функцию так, чтобы оператор DD^{-1} был равен единице:

$$\mathrm{DD}^{-1}=1. \tag{26,40}$$

Нетрудно убедиться, что действие оператора D^{-1} будет следующим:

$$\mathrm{D}^{-1}\,b e^{-icKt+i\boldsymbol{kr}}=\frac{K+(\boldsymbol{\alpha k})+\rho_3 k_0}{c\hbar\,(K^2-k^2-k_0^2)}\,b e^{-icKt+i\boldsymbol{kr}}. \tag{26,41}$$

Последнее соотношение легко может быть проверено, если учесть равенства

$$\mathrm{D}e^{-icKt+i\boldsymbol{kr}}\,b'=c\hbar\,(K-(\boldsymbol{\alpha k})-\rho_3 k_0)\,e^{-icKt+i\boldsymbol{kr}}\,b',$$

$$(K-(\boldsymbol{\alpha k})-\rho_3 k_0)(K+(\boldsymbol{\alpha k})+\rho_3 k_0)\,b'=(K^2-k^2-k_0^2)\,b'$$

и вспомнить свойства матриц α_n и ρ_3, изложенные в § 17.

Учитывая равенство (26,41), находим выражение для волновой функции ψ_1:

$$\psi_1=e\sqrt{\frac{2\pi}{c\hbar L^6}}\sum_{\varkappa}\frac{k_0-\varkappa-(\boldsymbol{\alpha\varkappa})+\rho_3 k_0}{((\varkappa-k_0)^2-\varkappa^2-k_0^2)}\cdot\frac{(\boldsymbol{\alpha a}^{+})}{\sqrt{\varkappa}}\,b e^{-ict(k_0-\varkappa)-i\boldsymbol{\varkappa r}}.$$

Для дальнейших вычислений воспользуемся следующими равенствами:

$$\left.\begin{aligned}(\varkappa-k_0)^2-\varkappa^2-k_0^2&=-2\varkappa k_0,\\(k_0+\rho_3 k_0)(\alpha a^+)b&=(\alpha a^+)k_0(1-\rho_3)b=0,\end{aligned}\right\}\qquad(26{,}42)$$

$$(\alpha\varkappa)(\alpha a^+)=(\sigma\varkappa)(\sigma a^+)=(\varkappa a^+)+i(\sigma[(\varkappa a^+]).\qquad(26{,}43)$$

Последнее равенство легко может быть проверено, если вспомнить, что $\sigma_1^2=1$, $\sigma_1\sigma_2=-\sigma_2\sigma_1=i\sigma_3$, и т. д.

Принимая во внимание еще условие поперечности электромагнитного поля $(\varkappa a)=0$, получаем:

$$\psi_1=e\sqrt{\frac{2\pi}{c\hbar L^6}}\sum_{\varkappa}\frac{(\alpha a^+)\varkappa+i(\sigma[\varkappa a^+])}{2k_0\varkappa\sqrt{\varkappa}}be^{-ict(k_0-\varkappa)-i\varkappa r}.\qquad(26{,}44)$$

Подставляя (26,44) в (26,35) и учитывая соотношение (26,43), а также то, что при отсутствии в начальный момент фотонов

$$a_n a_{n'}'^{+}=\left(\delta_{nn'}-\frac{\varkappa_n\varkappa_{n'}}{\varkappa^2}\right)\delta_{\varkappa\varkappa'},\qquad(26{,}45)$$

находим для собственной поперечной энергии следующее выражение:

$$V_{\text{собст}}^{\text{попер}}b=\frac{\pi e^2}{L^3k_0}\sum_{\varkappa}\frac{\varkappa(aa^+)+i(\sigma[aa^+])\varkappa-i\rho_1(\varkappa[aa^+])-(\alpha\varkappa)(aa^+)}{\varkappa^2}b.$$

Из (26,45) следует:

$$(aa^+)=2,\quad [aa^+]=0.$$

Переходя к интегралу:

$$\frac{1}{L^3}\sum_{\varkappa}\to\frac{1}{8\pi^3}\int d^3\varkappa=\frac{1}{8\pi^3}\int_0^\infty\varkappa^2\,d\varkappa\oint d\Omega,$$

а также принимая во внимание, что при интегрировании по телесному углу

$$\oint f(\varkappa)\,d\Omega=4\pi f(\varkappa),$$

$$\oint(\alpha\varkappa)f(\varkappa)\,d\Omega=0,$$

находим для собственной поперечной энергии следующее выражение:

$$V_{\text{собст}}^{\text{попер}}=\frac{e^2\hbar}{\pi m_0c}\int_0^\infty\varkappa\,d\varkappa.\qquad(26{,}46)$$

Таким образом, второе приближение для энергии взаимодействия электрона с полем излучения расходится. Эта поперечная собственная энергия электрона существует независимо от электростатической

(продольной) собственной энергии (25,33)

$$V_{\text{собст}}^{\text{прод}} = \frac{e^2}{\pi} \int_0^\infty dx.$$

В противоположность электростатической собственной энергии, имеющей классическую природу, поперечная собственная энергия представляет собою квантовый эффект. Это можно видеть непосредственно из последних соотношений: собственная электростатическая энергия не зависит от $\hbar$, а поперечная энергия при $\hbar \to 0$, т. е. при переходе к классической теории, исчезает.

Отсутствие сходимости во втором приближении (и выше) является характерной чертой теории вторичного квантования. Таким образом, в квантовой электродинамике появляются новые бесконечности, которые отсутствовали в классической теории. В дальнейших вычислениях, связанных с эффектами второго порядка, мы эту бесконечную энергию будем просто отбрасывать. Более подробно к вопросу о поперечной энергии мы вернемся в гл. IV, § 44 при исследовании ряда проблем, связанных с вопросом собственной массы электрона.

§ 27. Дипольное излучение; коэффициенты Эйнштейна

а) Постановка вопроса в квантовой механике. Согласно квантовой теории излучение и поглощение фотонов атомом связано с переходом электронов из одного энергетического состояния в другое. Для простоты рассмотрим атомы, имеющие только два энергетических состояния a и b $(E_a < E_b)$.

Еще в 1917 г. Эйнштейн показал, что в атоме должны существовать спонтанные и вынужденные переходы электронов. Вероятность спонтанного (самопроизвольного) перехода в единицу времени характеризуется коэффициентом A_{ba}. Спонтанный переход возможен только с верхнего уровня на нижний. При этом испускается квант, частота которого может быть найдена из закона сохранения энергии:

$$h\nu = E_b - E_a; \quad \nu = \frac{E_b - E_a}{h}. \tag{27,1}$$

Вероятность спонтанного излучения A_{ba} связана с соответствующей интенсивностью излучения W_{ba} соотношением[1])

$$W_{ba} = h\nu A_{ba} N_b, \tag{27,2}$$

---

[1]) При $h \to 0$ формула (27,2) должна переходить в классическую формулу, определяющую количество энергии, которую излучает электрон в среднем в единицу времени:

$$\lim_{h\to 0} W_{ba} = W = \frac{2}{3}\frac{e^2 w^2}{c^3},$$

где w — ускорение электрона.

где N_b — число атомов в состоянии b, а $h\nu$ является энергией, которую теряет атом при переходе из одного энергетического состояния в другое.

Далее, под действием излучения возможны вынужденные (индуцированные) переходы как $a \to b$ (с поглощением фотона), так и $b \to a$ (с испусканием фотона).

Вероятность вынужденного излучения, отнесенная к единице времени и единице спектральной плотности излучения, называется коэффициентом вынужденного излучения и обозначается через B.

Первоначально связь между этими коэффициентами была установлена из рассмотрения статистического равновесия атомов с излучением (формула Планка). Число атомов в состояниях a и b при температуре T пропорционально соответственно экспонентам $e^{-E_a/kT}$ и $e^{-E_b/kT}$, где k — постоянная Больцмана. Приравнивая число переходов $b \to a$ в единицу времени числу переходов $a \to b$, мы получаем условие статистического равновесия:

$$(A_{ba} + \rho_\nu B_{ba})\, e^{-\frac{E_b}{kT}} = \rho_\nu B_{ab} e^{-\frac{E_a}{kT}},$$

где $\rho_\nu B_{ba}$ и $\rho_\nu B_{ab}$ — вероятности вынужденных переходов (ρ_ν — плотность излучения), откуда находим:

$$\rho_\nu = \frac{\dfrac{A_{ba}}{B_{ba}}}{\dfrac{B_{ab}}{B_{ba}} e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}, \qquad (27,3)$$

причем

$$\nu = \frac{E_b - E_a}{h}.$$

Как известно, формула Планка имеет вид

$$\rho_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3\left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1\right)}. \qquad (27,4)$$

Сравнивая две последние формулы, Эйнштейн нашел соотношение между коэффициентами A и B:

$$A_{ba} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} B_{ba}, \qquad (27,5)$$

причем он считал $B_{ba} = B_{ab}$, что было в дальнейшем доказано (см. ниже).

Вероятность вынужденного перехода B может быть вычислена с помощью обычных методов квантовой механики без квантовой теории излучения, если рассматривать электромагнитное поле как

возмущение, приводящее к вынужденным переходам. Что же касается энергии возмущения, заставляющей атомы спонтанно переходить из одного энергетического состояния в другое, то квантовая механика в начале своего развития не могла объяснить ее происхождения; поэтому для определения коэффициента A приходилось вводить ряд необоснованных предположений.

б) Постановка вопроса в квантовой электродинамике. Спонтанное излучение получило удовлетворительное объяснение только в квантовой электродинамике. Согласно последней электроны и поле излучения образуют две квантовомеханические системы, взаимодействие между которыми не исчезает даже в том случае, когда в начальный момент фотоны отсутствуют. Это взаимодействие обусловливает спонтанные переходы невозмущенной системы с последующим испусканием фотонов.

Для нахождения коэффициентов A и B прежде всего запишем уравнение Дирака, учитывающее движение электрона в квантованном электромагнитном поле:

$$\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}-\mathrm{H}\right)\psi(N')=\left(U+U^{+}\right)\psi(N), \tag{27,6}$$

где гамильтониан H связан с потенциальной энергией V электрона в атоме соотношением

$$\mathrm{H}=\frac{\hbar c}{i}(\boldsymbol{\alpha}\nabla)+\rho_3 m_0 c^2+V,$$

а функция взаимодействия электронов атома с полем фотонов дается выражениями

$$\left.\begin{aligned}U&=\frac{e}{L^{3/2}}\sum_{\boldsymbol{\varkappa}}\sqrt{\frac{2\pi c\hbar}{\varkappa}}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{a})\,e^{-ic\varkappa t+i\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{r}},\\ U^{+}&=\frac{e}{L^{3/2}}\sum_{\boldsymbol{\varkappa}}\sqrt{\frac{2\pi c\hbar}{\varkappa}}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{a}^{+})\,e^{ic\varkappa t-i\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{r}}.\end{aligned}\right\} \tag{27,7}$$

Кроме того, следует заметить, что функция ψ зависит не только от числа фотонов N, но также и от координат $\boldsymbol{r}$ и t. Амплитуды $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{a}^{+}$ действуют на функцию числа частиц $f(N)$, которая включена в волновую функцию $\psi(N)$ $(\psi(N)=f(N)\psi)$, причем действие амплитуд $\boldsymbol{a}^{+}$ и $\boldsymbol{a}$ приводит соответственно к появлению и поглощению частицы.

Уравнение (27,6) эквивалентно системе следующих двух уравнений:

$$\left.\begin{aligned}\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}-\mathrm{H}\right)\psi(N+1)&=U^{+}\psi(N),\\ \left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}-\mathrm{H}\right)\psi(N)&=U\psi(N+1),\end{aligned}\right\} \tag{27,8}$$

где N — общее число фотонов. Отсюда видно, что при действии оператора U^+ на функцию числа фотонов общее число частиц увеличивается на единицу, при действии оператора U — уменьшается на единицу.

Перестановочные соотношения для амплитуд a и a^+ имеют вид:

$$a_s a'^+_{s'} - a'^+_{s'} a_s = \left(\delta_{ss'} - \frac{\varkappa_s \varkappa_{s'}}{\varkappa^2}\right) \delta_{\varkappa\varkappa'}, \tag{27,9}$$

т. е. квадратичные комбинации амплитуд имеют следующие собственные значения:

$$\left. \begin{aligned} a_s a'^+_{s'} &= \left(\delta_{ss'} - \frac{\varkappa_s \varkappa_{s'}}{\varkappa^2}\right)(N+1)\,\delta_{\varkappa\varkappa'}, \\ a'^+_{s'} a_s &= \left(\delta_{ss'} - \frac{\varkappa_s \varkappa_{s'}}{\varkappa^2}\right) N \delta_{\varkappa\varkappa'}, \end{aligned} \right\} \tag{27,10}$$

где N — число частиц, обладающих импульсом $\hbar\varkappa$, усредненных по двум возможным состояниям поляризации. В частности, если в состоянии $\varkappa$ частицы отсутствуют, то $N = 0$. При наличии же одной частицы мы будем иметь в среднем

$$N = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}. \tag{27,11}$$

Решение основного уравнения

$$\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t} - \mathrm{H}\right)\psi = 0 \tag{27,12}$$

представим в виде

$$\psi = e^{-\frac{iE_s t}{\hbar}} \psi_s, \tag{27,13}$$

причем

$$(E_s - \mathrm{H})\,\psi_s = 0, \tag{27,14}$$

а функции ψ_s удовлетворяют условиям ортонормированности

$$\int \psi^+_{s'} \psi_s \, d^3x = \delta_{ss'}. \tag{27,15}$$

В нашем случае при наличии двух квантовых состояний b и a $(E_b > E_a)$ решение системы (27,8) будем искать в виде

$$\left. \begin{aligned} \psi(N) &= C_b(t)\, e^{-\frac{iE_b t}{\hbar}} \psi_b f(N), \\ \psi(N+1) &= C_a(t)\, e^{-\frac{iE_a t}{\hbar}} \psi_a f(N+1), \end{aligned} \right\} \tag{27,16}$$

причем величины $|C_b|^2$ и $|C_a|^2$ характеризуют вероятность нахождения частицы соответственно в состояниях b и a.

Подставляя (27,16) и (27,8) и принимая во внимание действие операторов U и U^+ на функцию $f(N)$:

$$U^+f(N)\to f(N+1),\quad Uf(N+1)\to f(N),$$

получим следующие уравнения для определения коэффициентов C_a и C_b:

$$\left.\begin{aligned}-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial C_a}{\partial t}e^{-\frac{iE_at}{\hbar}}\psi_a=U^+C_b\psi_b e^{-\frac{iE_bt}{\hbar}},\\ -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial C_b}{\partial t}e^{-\frac{iE_bt}{\hbar}}\psi_b=UC_a\psi_a e^{-\frac{iE_at}{\hbar}},\end{aligned}\right\}\tag{27,17}$$

причем мы опустили функцию числа частиц, поскольку ее влияние будет полностью учтено перестановочными соотношениями (27,10).

Умножая последние уравнения соответственно на $e^{\frac{iE_at}{\hbar}}\psi_a^+$ и $e^{\frac{iE_bt}{\hbar}}\psi_b^+$ и интегрируя по всему пространству, получаем:

$$\dot{C}_a=-\frac{i}{\hbar}C_be^{-ic\varkappa_{ba}t}\int\psi_a^+U^+\psi_b\,d^3x,\tag{27,18}$$

$$\dot{C}_b=-\frac{i}{\hbar}C_ae^{ic\varkappa_{ba}t}\int\psi_b^+U\psi_a\,d^3x,\tag{27,19}$$

где

$$\varkappa_{ba}=\frac{E_b-E_a}{c\hbar}=\frac{2\pi\nu}{c}>0.\tag{27,20}$$

Уравнения (27,18) и (27,19) мы должны решать при определенных условиях, которые зависят от начального состояния атома. Прежде всего рассмотрим переходы с излучением, т. е. переходы из состояния b в состояние a ($b\to a$). Тогда мы должны предположить, что при $t=0$ электрон с достоверностью находится в состоянии b, в то время как состояние a не занято электроном:

$$C_b(0)=1\ \text{и}\ C_a(0)=0.\tag{27,21}$$

Решим систему уравнений (27,18) и (27,19) по методу теории возмущений, рассматривая U и U^+ как возмущение.

Согласно (27,18) коэффициент C_a будет пропорционален возмущению U. Поэтому, ограничиваясь членами первого порядка малости, мы можем правую часть соотношения (27,19) положить равной нулю. Тогда находим, что в течение всего процесса излучения коэффициент C_b останется равным единице:

$$C_b(t)=C_b(0)=1.\tag{27,22}$$

Этот метод рещения задачи носит название метода теории возмущений. К сожалению, за редким исключением, точная математическая теория квантовых процессов, как правило, является

невозможной, поэтому при рассмотрении конкретных задач приходится пользоваться приближенными методами. С помощью метода теории возмущений мы ищем, по существу, решение в виде ряда, причем малым параметром разложения чаще всего является постоянная тонкой структуры.

Однако не всегда теория возмущения приводит к цели. Например, при исследовании явлений, связанных с условиями резонанса, или рассеяния при больших энергиях, приближенные значения для эффективных сечений расходятся. Поэтому при исследовании подобных явлений мы должны пользоваться более точными способами решения уравнений (см. § 30 и 35).

Ограничиваясь в этом параграфе приближенным методом теории возмущений, мы найдем следующее выражение для коэффициента C_a, если в формулу (27,18) вместо U^+ подставим разложение (27,7):

$$C_a = -\frac{ei}{\hbar L^{3/2}} \sum_{\varkappa} \sqrt{\frac{2\pi c\hbar}{\varkappa}} (\alpha_{ab} a^+) \int_0^t e^{-ict(\varkappa_{ba}-\varkappa)}\, dt, \qquad (27,23)$$

причем матричный элемент α_{ab} имеет вид

$$\alpha_{ab} = \int \psi_a^+ e^{-i\varkappa r} \alpha \psi_b\, d^3x. \qquad (27,24)$$

Как известно, вероятность пребывания электрона в состоянии a равна $C_a^+ C_a$. Поэтому вероятность перехода $b \to a$ в единицу времени определяется формулой

$$w_{ba} = \frac{\partial}{\partial t} C_a^+ C_a = \frac{e^2 c}{4\pi^2 \hbar} \int (N+1) \frac{d^3\varkappa}{\varkappa} \times$$
$$\times \left((\alpha_{ab}^+ \alpha_{ab}) - \frac{(\alpha_{ab}^+ \varkappa)(\alpha_{ab} \varkappa)}{\varkappa^2} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left| \int_0^t e^{-ict(\varkappa_{ba}-\varkappa)}\, dt \right|^2. \qquad (27,25)$$

В этой формуле мы сделали переход к интегралу Фурье $\left(\frac{1}{L^3} \sum_{\varkappa} \to \frac{1}{8\pi^3} \int d^3\varkappa\right)$ и использовали равенство

$$(\alpha_{ab}^+ a)(\alpha_{ab} a^+) = \left[(\alpha_{ab}^+ \alpha_{ab}) - \frac{(\alpha_{ab}^+ \varkappa)(\alpha_{ab} \varkappa)}{\varkappa^2} \right] (N+1). \qquad (27,26)$$

Для дальнейших вычислений воспользуемся равенством

$$\frac{\partial}{\partial t} \left| \int_0^t e^{-ict(\varkappa_{ba}-\varkappa)}\, dt \right|^2 = \frac{2\pi}{c} \delta(\varkappa_{ba} - \varkappa), \qquad (27,27)$$

которое имеет место для достаточно больших значений времени t. В самом деле, легко показать, что

$$\frac{\partial}{\partial t}\left|\int_0^t e^{-ict(\varkappa_{ab}-\varkappa)}\,dt\right|^2 = \frac{2\sin ct(\varkappa-\varkappa_{ba})}{c(\varkappa-\varkappa_{ba})}, \quad (27,28)$$

а из формулы Дирихле ($\alpha > 0$)

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} f(\varkappa)\frac{\sin ct\varkappa}{\varkappa}\,d\varkappa = f(0)$$

следует равенство (28,27)

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\sin ct\varkappa}{\varkappa} = \pi\delta(\varkappa).$$

Равенство (27,27) приводит к закону сохранения энергии. Действительно, благодаря наличию δ-функции производится замена энергии $c\hbar\varkappa$ излучаемого фотона на энергию $c\hbar\varkappa_{ba}$, которую теряет атом.

в) Область применения квантовой теории. Как видно из равенства (27,27), острый максимум для энергии излучаемого фотона ($\varkappa = \varkappa_{ba}$) имеет место лишь при $t\to\infty$. Для конечных же значений t величина $\varkappa$ будет «размазанной», поскольку функция (27,28) практически отлична от нуля для всех $\varkappa$, удовлетворяющих соотношению

$$ct(\varkappa-\varkappa_{ba}) \sim 2\pi.$$

Принимая во внимание, что величина $t = t - 0 = \Delta t$ есть время, которое прошло после начала процесса, а величина $c\hbar(\varkappa-\varkappa_{ba}) \sim \Delta E$ представляет собой «размазывание» энергии фотонов, мы находим связь между этими величинами

$$\Delta t\,\Delta E \sim h. \quad (27,29)$$

Неопределенность с «размазыванием» энергии является весьма характерной для любого волнового процесса и представляет собой известное из классической оптики выражение для уширения спектральных линий, связанное с конечным значением длительности излучения.

В самом деле, полагая $\Delta E/\hbar = \Delta\omega$, находим

$$\Delta t\,\Delta\omega \sim 2\pi.$$

Последнее выражение определяет связь между шириной спектральной линии $\Delta\omega$ и длительностью Δt излучения. Соотношение (27,29) называется четвертым соотношением неопределенностей. Остальные три соотношения неопределенностей, полученные Гейзенбергом:

$$\Delta p_x \Delta x \sim h \text{ и т. д.} \quad (27,29а)$$

следует рассматривать также, как проявление волновых свойств частиц[1]). Соотношение (27,29а) показывает, что чем точнее задана координата (размазанность координаты равна Δx), тем менее точно мы можем вычислить импульс частицы ($\Delta p \sim \hbar/\Delta x$), и наоборот.

Открытие соотношения неопределенностей (т. е. волновых свойств частиц) представляет собою исторический момент в развитии теории движения элементарных частиц. Однако мы не можем согласиться с попытками интерпретировать физический смысл соотношения неопределенностей в духе так называемого принципа дополнительности.

Согласно принципу дополнительности должны существовать два класса экспериментальных установок: один класс допускает измерение одних переменных (например, импульса и энергии частицы), а другой класс — величин, образующих с первыми пару канонических переменных (т. е. в даниом случае пространственно-временных координат). Чем точнее мы измеряем величины одним классом установок, тем большие нарушения мы вносим в величины, которые могут быть измерены другим классом.

Здесь следует заметить, что по классической теории эксперимент также нарушает состояние системы. Однако там это нарушение

---

[1]) Волновой характер происхождения соотиошеиия (27,29а) легко показать следующим образом. Допустим, мы имеем гармоническую функцию, ограниченную участком Δx:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < -\Delta x/2, \\ e^{ik_0 x} & \text{при} \quad -\Delta x/2 < x < \Delta x/2, \\ 0 & \text{при} \quad x > \Delta x/2. \end{cases}$$

Разложим функцию $f(x)$ в интеграл Фурье:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} f(k)\, dk,$$

т. е. представим ее как результат наложения бесконечного числа неограниченных волн со всевозможиыми волновыми числами. Амплитуда $f(k)$ равна

$$f(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ikx}\, dx = \frac{\sin (k - k_0) \frac{\Delta x}{2}}{\pi (k - k_0)}.$$

Отсюда видно, что амплитуда имеет значеиие, практически отличное от нуля лишь вблизи резонансной области $k \sim k_0$, когда $\Delta k\, \Delta x/2 \leqslant \pi$, где $\Delta k = |k - k_0|$. Далее, принимая во внимаиие, что $k = p_x/\hbar$, получаем соотношение (27,29а). Соотиошеиие неопределеииостей может быть получено строго на основе уравнения Шредингера. Тогда оно принимает вид

$$\overline{(\Delta x)^2}\, \overline{(\Delta p_x)^2} \geqslant \frac{\hbar^2}{4}.$$

можно принципиально учесть с любой точностью. Согласно же принципу дополнительности в микромире должна быть совершенно другая ситуация, а именно, вносимое экспериментальной установкой нарушение должно иметь определенную нижнюю границу, перейти через которую принципиально невозможно. В качестве конкретного примера приведем анализ Гейзенберга[1]) одного мысленного эксперимента: для того чтобы определить положение электрона под микроскопом, мы освещаем его светом длиной волны λ; если электрон движется на таком расстоянии от объектива микроскопа, что угол, образуемый исходящим от электрона рассеянным пучком, равен ε, то согласно известным законам оптики, координату его можно измерить с точностью до величины

$$\Delta x \sim \frac{\lambda}{\sin \varepsilon}.$$

Отсюда видно, что для более точного определения координаты электрон следует освещать светом малой длины волны. Однако чем меньше длина волны, тем больший импульс получит электрон при освещении.

Импульс же электрона (канонически сопряженную величину с координатой) можно определить с точностью до значения

$$\Delta p \sim \frac{\hbar}{\lambda} \sin \varepsilon.$$

Таким образом, с точки зрения принципа дополнительности приборы первого класса (т. е. для определения импульса) должны быть построены с $\lambda \to \infty$, а второго класса (т. е. для определения координаты) — с $\lambda \to 0$.

Отсюда последователи принципа дополнительности приходят к выводу, что должен существовать некий принципиальный предел наших познаний микромира, связанный с неизбежным влиянием на наблюдаемый объект измерительного прибора; тем самым они вольно или невольно становятся на позитивистские позиции.

Квантовая же механика должна прежде всего отражать объективные закономерности микромира, которые не должны зависеть от вида приборов, с помощью которых производятся измерения.

Следует также учитывать, что наши представления о внешнем мире складываются не только на основе непосредственных показаний приборов. Человек способен обобщать результаты своих наблюдений путем всестороннего изучения явлений, путем установления взаимосвязи между различными явлениями, открывая тем самым общие закономерности, присущие многим явлениям. Поэтому различные свойства внешнего мира мы можем познавать также

---

[1]) В. Гейзенберг, Физические принципы квантовой теории, М.—Л., 1932, стр. 21.

с помощью всестороннего анализа ряда косвенных экспериментов. Как известно, многие закономерности, связанные с атомами, были открыты еще задолго до непосредственного обнаружения самих атомов[1]).

Перейдем к физическому анализу проявления волновых свойств элементарных частиц. Одна из первых интерпретаций корпускулярно-волнового дуализма сводилась к попытке рассматривать частицу как образование из волны (гипотеза размазанного электрона. предложенная Шредингером). Теоретически возможно с помощью группы волн образовать частицу (точнее, волновой пакет) с размерами порядка радиуса электрона. Однако такая частица будет неустойчива; волновой пакет быстро расползется. Кроме того, невозможно объяснить явление дифракции электронов, если монохроматическую волну, описывающую движение многих электронов, заменить множеством волновых пакетов.

В настоящее время принята другая, а именно статистическая интерпретация волновой функции, предложенная Борном. Согласно последней, величина $\psi^+\psi$ описывает плотность вероятности нахождения электрона в различных точках пространства. Волновые свойства элементарных частиц особенно ярко должны проявляться при наличии многих независимых частиц, находящихся в одинаковом квантовом состоянии (квантовый ансамбль), когда согласно закону больших чисел отклонение реальных величин от их математического ожидания ничтожно мало.

Типичную волновую картину мы получим при рассмотрении, например, дифракции электронов, которая наблюдается при прохождении пучка электронов через дифракционную систему. В настоящее время создана электронная оптика, позволяющая исследовать волновые свойства пучков электронов. С помощью электронной оптики объясняются не только интерференционные свойства пучка электронов, но и производятся расчеты, связанные с работой электронного микроскопа, построенного на электрических и магнитных линзах.

Л. Биберман, Н. Сушкин и В. Фабрикант[2]) обобщили, по существу, опыты С. И. Вавилова[3]) с квантовыми флуктуациями света на опыты с дифракцией поочередно летящих электронов. Они показали, что когда отдельный электрон проходит через дифракционную систему, он дает на экране не дифракционную картину, а изоб-

---

[1]) Кстати сказать, Мах и Оствальд еще в начале XX века, исходя из принципа «наблюдаемости», пытались доказать, что атомы не существуют, поскольку им непосредственно ничего не соответствует в общем «комплексе ощущений». Ошибочность этих взглядов была полностью доказана вскоре же после их появления.

[2]) Л. Биберман, Н. Сушкин и В. Фабрикант, ДАН **66**, 185 (1949).

[3]) С. И. Вавилов, Микроструктура света, 1950, § 2.

ражение точки. Однако, если вслед за одним электроном пропустить и другие, то при достаточной продолжительности опыта эти одиночные точки образуют типичную для волновой теории дифракционную картину. Эти опыты с полной убедительностью говорят о том, что волновые свойства не связаны с одновременным наличием большого числа частиц и могут наблюдаться в результате многократного повторения опытов с одиночными частицами. Поэтому волновая механика применима также и для исследования движения отдельного электрона. Однако в последнем случае она позволяет вычислить лишь вероятность той или иной величины. Только в том случае, когда эта вероятность имеет острый максимум, соответствующая величина может быть вычислена сравнительно точно.

Аналогичную ситуацию мы имеем при исследовании природы света. Как указывает в цитируемой монографии С. И. Вавилов, при малых интенсивностях, наряду с частотой и поляризационными свойствами мы должны наблюдать также и квантовые флуктуации.

Вероятностный характер квантовой механики в применении к отдельному электрону нельзя уже объяснить с помощью введения квантовых ансамблей. Нам кажется, что его можно обосновать, выходя лишь за рамки существующей теории. В этом направлении у нас и за рубежом сделаны пока что лишь отдельные попытки[1], одну из которых мы рассмотрим в следующем параграфе [см. § 28, п. и)].

Последователи же принципа дополнительности, вводя нижний предел возможности познания микромира, считают, что не следует делать никаких попыток для понимания вероятностного характера волновой теории. Нейман даже пытался[2]) доказать теорему, что средние величины, вычисленные по законам квантовой механики, не могут быть получены, как в других статистических теориях, в результате усреднения по какому-то распределению скрытых параметров. Здесь мы заметим, что эта теорема Неймана была доказана для весьма узкого класса «скрытых» параметров и поэтому не может претендовать на общность.

В связи с развитием принципа дополнительности появились необоснованные выводы о том, что в окончательной теории микромира детерминизм обязательно должен отсутствовать. Эти выводы связаны также с метафизическим пониманием детерминизма, с его односторонней «механистичностью», когда якобы с любой степенью точности можно предсказать движение материальных тел.

Попытки абсолютизировать выводы квантовой механики напоминают попытки, которые были в свое время сделаны механистами по абсолютизации законов классической механики. После

---

[1]) См., например, сб. переводов «Вопросы причинности в квантовой механике», ИЛ, 1955.

[2]) J. Neumann, Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Berlin, 1932.

открытий новых физических явлений, не укладывающихся в рамки классической механики и повлекших за собою открытие теории относительности Эйнштейна (начало XX века) и квантовой теории, последователи механистического мировоззрения вообще стали считать, что наступил конец материализма.

В. И. Ленин самым решительным образом возражал против подобного метафизического понимания основных законов природы. В 1908 г. он писал: «...законы вполне познаваемы для человека, но никогда не могут быть им познаны до конца»[1]). Дальнейшее развитие физики показало, что с помощью законов классической механики можно описать далеко не все явления. Классическая механика позволяет, например, с большой точностью предвычислять движения планет, но в то же время ее «точные» расчеты совершенно неприменимы для исследования движения электронов в атоме.

Теория относительности и квантовая механика позволяют сделать следующий шаг на пути познания законов движения частиц. Первая из них дает возможность изучать движения сверхбыстрых электронов ($v \sim c$), а вторая—движения электронов в атоме, когда дебройлевская длина волны ($\lambda \sim \hbar/m_0 v$) сравнима с размерами системы, т. е., в данном случае, с размерами атома. Мы вновь повторим ошибки механистов, если будем считать, что эти новые теории являются последним этапом познания закономерностей микромира.

Согласно ленинской теории отражения «мир есть закономерное движение, и наше познание, будучи высшим продуктом природы, в состоянии только отражать эту закономерность»[2]). Поэтому любая теория может дать познание объекта лишь приблизительно верно, и это никоим образом не противоречит детерминизму, поскольку с помощью существующих или будущих более совершенных теорий мы бесспорно сумеем правильно и сколь угодно глубоко познать любые отдельные формы строения материи и ее движения, но до конца познать все многообразие этих форм и их взаимосвязей нам никогда не удастся. Поэтому мы не можем согласиться не только с последователями принципа дополнительности, которые выступают против какой-либо возможности объяснения статистического характера волновой механики, но и с неомеханистами, которые пытаются объяснить все окружающие явления с помощью квантовой теории.

Квантовая механика является теорией простейших движений. Как указал Энгельс[3]), в более высших формах движения (химических, биологических и т. д.) наряду с простейшими должны содер-

---

[1]) В. И. Ленин, Материализм и эмпириокритицизм, Госполитиздат, 1951 г., стр. 173.

[2]) Там же, стр. 152.

[3]) Ф. Энгельс, Диалектика природы, Госполитиздат, 1950, стр. 197.

жаться еще и свои специфические закономерности. Более того, даже многие физические явления далеко не всегда могут быть сведены только к элементарным движениям частиц. Как известно, системе многих взаимодействующих частиц (например, совокупности электронов в кристаллической решетке) свойственны температура и необратимость процессов, что никоим образом не может быть получено лишь из уравнений движения отдельных частиц; эти уравнения являются обратимыми, и в них не заложено понятие температуры. Движение системы взаимодействующих частиц описывается с помощью введения также классической или квантовой статистики; последние хотя и находятся в согласии с законами классической или квантовой теории движения отдельной частицы, но не могут быть из них полностью получены.

г) Вычисление коэффициентов Эйнштейна. Подставляя (27,27) в равенство (27,25), найдем после интегрирования по $\varkappa$ следующее выражение для вероятности излучения:

$$w_{ba} = \frac{e^2\varkappa_{ba}}{2\pi\hbar}(N+1)\oint\left((\boldsymbol{\alpha}_{ab}^{+}\boldsymbol{\alpha}_{ab}) - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_{ab}^{+}\boldsymbol{\varkappa})(\boldsymbol{\alpha}_{ab}\boldsymbol{\varkappa})}{\varkappa^2}\right)d\Omega, \quad (27,30)$$

где $\varkappa_{ba} = 2\pi\nu/c$, а $d\Omega$ — элементарный телесный угол в направлении вектора $\boldsymbol{\varkappa}$.

Для атомов длина волны испускаемого света составляет $\lambda = 2\pi/\varkappa \sim 10^{-5}$ *см*, а размеры атома имеют порядок величины $r \sim 10^{-8}$ *см*. Поэтому величина $\varkappa r = 2\pi r/\lambda \ll 1$.

В этом случае в матричном элементе

$$\boldsymbol{\alpha}_{ab} = \int \psi_a^{+}\boldsymbol{\alpha}e^{-i\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{r}}\psi_b\, d^3x$$

величину $e^{-i\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{r}}$ мы можем разложить в ряд ($r\varkappa \approx r/\lambda \ll 1$):

$$e^{-i\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{r}} = 1 - i(\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{r}) + \frac{(i(\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{r}))^2}{2!} + \ldots$$

Ограничиваясь в последнем разложении первым членом, для матричного элемента получим:

$$\boldsymbol{\alpha}_{ab}^{0} = \int \psi_a^{+}\boldsymbol{\alpha}\psi_b\, d^3x.$$

Это выражение характеризует дипольное излучение. Отброшенные члены будут много меньше основного.

Предполагая, что число фотонов N не зависит от углов θ и φ (изотропное излучение), найдем следующее выражение для вероятности дипольного излучения:

$$w_{ba} = \frac{4e^2\varkappa_{ba}}{3\hbar}(N+1)\,|\boldsymbol{\alpha}_{ab}^{0}|^2. \quad (27,31)$$

Вероятность дипольного излучения складывается из двух частей: из части, не зависящей от первоначальной плотности фотонов

(спонтанное излучение), и из части, пропорциональной плотности фотонов (вынужденное излучение), т. е.

$$w_{ba} = \rho_\nu B_{ba} + A_{ba}.$$

Для того чтобы найти вероятность спонтанного излучения, мы должны положить в формуле (27,31) $N = 0$. Тогда имеем:

$$A_{ba} = \frac{4e^2 \varkappa_{ba}}{3\hbar} |\boldsymbol{\alpha}_{ab}^0|^2. \tag{27,32}$$

В нерелятивистском приближении матричный элемент $\boldsymbol{\alpha}_{ab}^0$ мы можем записать в виде ($\mathbf{p} = m_0 c \boldsymbol{\alpha}$):

$$\boldsymbol{\alpha}_{ab}^0 = \frac{1}{m_0 c} \int \psi_a^+ \mathbf{p} \psi_b \, d^3x,$$

где оператор импульса имеет вид

$$p_x = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \text{ и т. д.}$$

Согласно теореме Эренфеста [см. ниже (50,46)]

$$\int \psi_a^+ p_x \psi_b \, d^3x = -2\pi i \nu m_0 x_{ab},$$

причем матричный элемент x_{ab} имеет вид

$$x_{ab} = \int \psi_a^+ x \psi_b \, d^3x.$$

Отсюда для вероятности спонтанного излучения находим:

$$A_{ba} = \frac{64\pi^4 e^2 \nu^3}{3c^3 h} (|x_{ab}|^2 + |y_{ab}|^2 + |z_{ab}|^2). \tag{27,33}$$

Соответствующее выражение для интенсивности излучения может быть получено с помощью формулы (27,2).

Как видно из формул (27,31) и (27,32), вероятность вынужденного излучения при переходе с верхнего энергетического уровня на нижний ($b \to a$) определяется формулой

$$B_{ba} = A_{ba} \frac{N}{\rho_\nu}. \tag{27,34}$$

Для ее использования необходимо установить соотношение между величинами N и ρ_ν. С одной стороны, плотность энергии излучения u связана со спектральной плотностью ρ_ν формулой

$$u = \int_0^\infty \rho_\nu \, d\nu,$$

а, с другой стороны, равна отношению общей энергии частиц $\sum_{\varkappa} c\hbar\varkappa 2N$ (множитель 2 соответствует двум возможным значениям

поляризации) к объему L^3:

$$u = \sum_{\varkappa} \frac{c\hbar\varkappa 2N}{L^3} = \frac{2c\hbar}{8\pi^3} \int_0^\infty \varkappa^3 \, d\varkappa \oint N \, d\omega;$$

последнее выражение для изотропного излучения принимает вид:

$$u = \int_0^\infty \frac{8\pi\nu^3 h}{c^3} N \, d\nu.$$

Сравнивая между собою эти два выражения для u, находим:

$$\rho_\nu = \frac{8\pi\nu^3 h}{c^3} N, \tag{27,35}$$

откуда согласно (27,34)

$$B_{ba} = \frac{c^3}{8\pi\nu^3 h} A_{ba} = \frac{8\pi^3 e^2}{3h^2} (|x_{ab}|^2 + |y_{ab}|^2 + |z_{ab}|^2). \tag{27,36}$$

Определим теперь вероятности перехода с нижнего энергетического уровня на верхний ($a \to b$), т. е. перехода, связанного с поглощением света. В этом случае мы должны решить систему уравнений (27,18) и (27,19) при других начальных условиях, а именно:

$$C_a(0) = 1, \quad C_b(0) = 0. \tag{27,37}$$

Используя вновь метод теории возмущений, получаем вместо уравнений (27,22) и (27,23):

$$C_a(t) = 1, \tag{27,38}$$

$$C_b(t) = -\frac{ei}{\hbar L^{3/2}} \sum_{\varkappa} \sqrt{\frac{2\pi c\hbar}{\varkappa}} (\boldsymbol{\alpha}_{ba} \mathbf{a}) \int_0^t e^{ict(\varkappa_{ba} - \varkappa)} \, dt. \tag{27,39}$$

Тогда для вероятности перехода мы получаем выражение

$$w_{ab} = \frac{e^2 (2\pi)^2}{L^3 \hbar} \sum_{\varkappa} \frac{N(\boldsymbol{\varkappa})}{\varkappa} \left((\boldsymbol{\alpha}_{ba}^{+} \boldsymbol{\alpha}_{ba}) - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_{ba}^{+} \boldsymbol{\varkappa})(\boldsymbol{\alpha}_{ba} \boldsymbol{\varkappa})}{\varkappa^2} \right) \delta(\varkappa_{ba} - \varkappa). \tag{27,40}$$

Переходя, далее, к непрерывному спектру, находим в случае изотропного излучения $[N(\boldsymbol{\varkappa}) = N(\varkappa)]$ следующее выражение для вероятности дипольного перехода:

$$w_{ab} = \frac{4e^2 \varkappa_{ba} N}{3\hbar} |\boldsymbol{\alpha}_{ba}^0|^2. \tag{27,41}$$

Сравнивая между собою формулы (27,41) и (27,31) и принимая во внимание, что

$$|\boldsymbol{\alpha}_{ab}^0|^2 = |\boldsymbol{\alpha}_{ba}^0|^2,$$

мы заключаем, что вероятность вынужденного перехода $a \to b$ будет равна вероятности вынужденного перехода $b \to a$, т. е.

$$B_{ab} = B_{ba}. \qquad (27,42)$$

Подставляя соотношения для коэффициентов (27,36) и (27,42) в формулу (27,3), мы находим формулу Планка (27,4). В этом выводе отсутствуют внутренние противоречия, содержавшиеся в полуклассических выводах. Кроме того, мы видим, что перестановочные соотношения для амплитуд фотонного поля ведут в случае статистического равновесия к формуле Планка, т. е. к функции распределения Бозе — Эйнштейна для фотонов.

§ 28. Теория «светящегося» электрона

а) Основные особенности излучения «светящегося» электрона. При движении электрона в магнитном поле в ультрарелятивистском случае обнаруживается ряд специфических особенностей. Одна из них сводится к тому, что интенсивность излучения становится настолько большой, что электрон, движущийся в циклических ускорительных установках при $E \sim 100$ *Мэв* [E достигает нескольких процентов критической энергии $E_0 = m_0c^2 (R^2/r_0cT)^{1/3}$, R — радиус орбиты, $r_0 = e^2/m_0c^2$ — радиус электрона, T — время ускорения], вследствие потери энергии начинает сбиваться с устойчивой орбиты [1]). Чтобы удержать электроны в режиме ускорения при сравнительно больших энергиях, необходимо использовать не бетатронный принцип ускорения, а синхротронный, в котором благодаря принципу автофазировки Векслера — Макмиллана учитывается не только релятивистское увеличение массы, но и компенсируются потери энергии на излучение.

Другой особенностью излучения релятивистского электрона является тот факт, что максимум интенсивности излучения приходится не на основной тон, как в нерелятивистском случае, а на высокие гармоники, имеющие порядок [2])

$$\nu_{\text{макс}} \sim \left(\frac{E}{m_0c^2}\right)^3. \qquad (28,1)$$

Вследствие этого вращающийся по окружности электрон начинает испускать коротковолновое излучение, доходящее уже при сравнительно низких энергиях ($E \sim 50$ *Мэв*) до области видимого света, так что излучающий электрон можно назвать «светящимся». В связи с этим интересно отметить, что впервые появилась возможность фактически увидеть электрон, движущийся в вакууме.

---

[1]) Теоретически это явление было предсказано Д. Д. Иваненко и И. Я. Померанчуком [Phys. Rev. 65, 343 (1944); ДАН СССР 44, 343 (1944)].

[2]) Л. А. Арцимович и И. Я. Померанчук, J. Phys. USSR 9, 267 (1945).

Третьей особенностью движения «светящегося» электрона является сильное влияние квантовых флуктуаций излучения на радиальные колебания в области энергий

$$E > m_0c^2\left(\frac{m_0cR}{\hbar}\right)^{1/5}. \qquad (28,2)$$

При энергиях порядка 1 *Бэв* эти колебания могут даже отразиться на работе циклических электронных ускорителей.

Теория «светящегося» электрона может найти применение не только при исследовании движения ультрарелятивистского электрона в циклических ускорителях, но и при движении электронов в магнитном поле Земли, Солнца и т. д. Например, нетепловое радиоизлучение Галактики, по-видимому, представляет собою излучение релятивистских электронов в межзвездных магнитных полях.

б) Движение ультрарелятивистского электрона в постоянном и однородном магнитном поле по квантовой теории[1]). Исследуем прежде всего движение ультрарелятивистского электрона в постоянном и однородном магнитном поле. Эта задача может быть строго решена с помощью уравнений Дирака в случае постоянного и однородного магнитного поля.

В цилиндрической системе координат

$$\left(r = \sqrt{x^2+y^2},\ z,\ \varphi = \operatorname{arctg} y/x\right),$$

когда магнитное поле направлено по оси z ($H_z = H$, $H_x = H_y = 0$), составляющие вектор-потенциала A равны

$$A_x = -\frac{1}{2}yH, \quad A_y = \frac{1}{2}xH, \quad A_z = 0. \qquad (28,3)$$

Тогда уравнение Дирака принимает вид

$$\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t} - c(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{P}) - \rho_3 m_0c^2\right)\psi = 0, \qquad (28,4)$$

где обобщенный импульс $\mathbf{P}$ равен

$$\mathbf{P} = \frac{\hbar}{i}\nabla + \frac{e}{c}A.$$

Отсюда легко найти:

$$\left.\begin{aligned} P_x \pm iP_y &= \frac{\hbar}{i}e^{\pm i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial r} \pm \frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi} \mp \gamma r\right),\\ P_z &= \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial z}, \qquad \gamma = \frac{eH}{2c\hbar}. \end{aligned}\right\} \qquad (28,5)$$

[1]) А. А. Соколов, Н. П. Клепиков и И. М. Тернов, ЖЭТФ **23**, 632 (1952); **24**, 249 (1953); А. А. Соколов и И. М. Тернов, ЖЭТФ **25**, 698 (1953); Н. Клепиков, ЖЭТФ **26**, 19 (1954); А. Соколов, Suppl. Nuovo Cim. **3**, 743 (1956); А. А. Соколов и А. Н. Матвеев, ЖЭТФ **30**, 126 (1956).

Решение для компонент волновой функции

$$\psi=\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix}$$

будем искать в виде

$$\left.\begin{aligned}\psi_{1,3}&=\frac{e^{ikz}}{\sqrt{L}}\frac{e^{i(l-1)\varphi}}{\sqrt{2\pi}}f_{1,3}(r)\,e^{-icKt},\\ \psi_{2,4}&=\frac{e^{ikz}}{\sqrt{L}}\frac{e^{il\varphi}}{\sqrt{2\pi}}f_{2,4}(r)\,e^{-icKt},\end{aligned}\right\}\tag{28,6}$$

где $k=2\pi\mu/L$ ($\mu=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \ldots$), L — длина периодичности, которую мы в окончательном результате будем стремить к бесконечности.

Подставляя (28,6) в (28,4), найдем уравнения для определения функций $f_\mu(r)$:

$$\left.\begin{aligned}(K\mp k_0)f_{1,3}-\frac{1}{i}\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{l}{r}+\gamma r\right)f_{4,2}-kf_{3,1}&=0,\\ (K\mp k_0)f_{2,4}-\frac{1}{i}\left(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{l-1}{r}-\gamma r\right)f_{3,1}+kf_{4,2}&=0,\end{aligned}\right\}\tag{28,7}$$

причем верхние знаки соответствуют первым индексам у функции f, а нижние — вторым.

Вводя новый аргумент $\rho=\gamma r^2$, найдем, что радиальные функции f будут удовлетворять уравнениям

$$\left.\begin{aligned}\left\{\rho\frac{d^2}{d\rho^2}+\frac{d}{d\rho}+\lambda_{1,3}-\frac{\rho}{4}-\frac{(l-1)^2}{4\rho}\right\}f_{1,3}&=0,\\ \left\{\rho\frac{d^2}{d\rho^2}+\frac{d}{d\rho}+\lambda_{2,4}-\frac{\rho}{4}-\frac{l^2}{4\rho}\right\}f_{2,4}&=0,\end{aligned}\right\}\tag{28,8}$$

где

$$\left.\begin{aligned}\lambda_{1,3}&=\frac{K^2-k_0^2-k^2}{4\gamma}-\frac{l}{2},\\ \lambda_{2,4}&=\frac{K^2-k_0^2-k^2}{4\gamma}-\frac{l-1}{2}.\end{aligned}\right\}\tag{28,9}$$

Собственные значения λ уравнений (28,8) равны

$$\left.\begin{aligned}\lambda_{1,3}&=\frac{l}{2}+s_{1,3},\\ \lambda_{2,4}&=\frac{l+1}{2}+s_{2,4}.\end{aligned}\right\}\tag{28,10}$$

Отсюда видно, что оба уравнения (28,8) будут иметь одно и тоже значение для энергии $E=c\hbar K$, если мы положим $s_{1,3}=s_{2,4}=s$,

где $s=0, 1, 2, 3, \ldots$ является радиальным квантовым числом. Тогда получаем

$$K=\sqrt{k^2+k_0^2+4\gamma n}. \tag{28,11}$$

Здесь главное квантовое число $n=l+s=0, 1, 2, 3, \ldots$

Решения для радиальных волновых функций будут выражены через функции $I_{n,s}(\rho)$, связанные с обобщенными полиномами Лагерра соотношением

$$I_{n,s}(\rho)=\frac{1}{\sqrt{n!s!}}e^{-\frac{\rho}{2}}\rho^{\frac{n-s}{2}}Q_s^{n-s}(\rho), \tag{28,12}$$

где обобщенный полином Лагерра[1])

$$Q_s^l(\rho)=(-1)^s\sum_{j=0}^{s}(-1)^j\frac{s!(s+l)!\rho^{s-j}}{j!(s-j)!(s+l-j)!}. \tag{28,13}$$

Радиальные функции $f_\mu(r)$ могут быть линейно связаны с функциями $I_{n,s}(\rho)$ с помощью равенства (28,8). Однако, чтобы найти соотношения между коэффициентами при различных волновых функциях, мы должны воспользоваться уравнениями первого порядка (28,7).

Окончательное решение имеет вид

$$f_{1,2,3,4}=\sqrt{\frac{\gamma}{1+\frac{k_0}{K}}}\left\{\begin{array}{l} C_1\left(1+\frac{k_0}{K}\right)I_{n-1,s}(\rho), \\ iC_2\left(1+\frac{k_0}{K}\right)I_{n,s}(\rho), \\ \left(\frac{\sqrt{4\gamma n}}{K}C_2+\frac{k}{K}C_1\right)I_{n-1,s}(\rho), \\ i\left(\frac{\sqrt{4\gamma n}}{K}C_1-\frac{k}{K}C_2\right)I_{n,s}(\rho). \end{array}\right. \tag{28,14}$$

Наличие двух независимых коэффициентов C_1 и C_2 связано с двумя возможными ориентациями спина электрона. Мы подобрали коэффициенты при $I_{n,s}$ таким образом, чтобы нормировка волновой функции f имела вид

$$\int_0^\infty r\,dr\sum_{\mu=1}^{4}f_\mu^2=\frac{1}{2\gamma}\int_0^\infty d\rho\sum_{\mu=1}^{4}f_\mu^2=|C_1|^2+|C_2|^2. \tag{28,15}$$

Отсюда следует, что в случае отсутствия поляризации электронов мы должны положить

$$|C_1|^2=|C_2|^2=\frac{1}{2}, \quad C_1^+C_2=C_2^+C_1=0. \tag{28,16}$$

---

[1]) С полиномами Лагерра связаны также радиальные функции проблемы Кеплера [см. (46,42) и (46,43)].

Заметим, что квантовые числа s и n могут принимать целые положительные значения, включая нуль. Квантовое же число $l=n-s$ будет изменяться от $-\infty$ до n. Физический смысл решений с отрицательными значениями l мы выясним ниже. Здесь же заметим, что обобщенные полиномы Лагерра с отрицательными l связаны с обобщенными полиномами Лагерра с положительными l при помощи соотношения

$$(-1)^l \rho^{-l} Q_{s+l}^{-l}(\rho) = Q_s^l(\rho). \qquad (28,17)$$

Выясним геометрический смысл квантовых чисел n (главного) и s (радиального). Для этого определим среднее значение квадрата радиуса [см. (28,14) и (28,16)]:

$$\overline{r^2} = \int_0^\infty r^2 \sum_{\mu=1}^4 f_\mu^2 r\, dr = \frac{n}{\gamma}\left(1 + \frac{s+{}^1/_2}{n}\right) \qquad (28,18)$$

и среднее значение квадратичной флуктуации радиуса

$$\xi^2 = \int_0^\infty (r-\bar{r})^2 \sum_{\mu=1}^4 f_\mu^2 r\, dr = \overline{r^2} - (\bar{r})^2, \qquad (28,19)$$

где

$$\bar{r} = \int_0^\infty r \sum_{\mu=1}^4 f_\mu^2 r\, dr \cong \sqrt{\frac{n}{\gamma}}\left(1 + \frac{s+{}^1/_2}{4n}\right).$$

Отсюда находим:

$$\xi^2 \cong \frac{s+{}^1/_2}{2\gamma}. \qquad (28,20)$$

Строго говоря, в случае плоского движения вращающийся в постоянном и однородном магнитном поле электрон должен двигаться всегда по круговой орбите, радиус которой зависит только от энергии электрона. Круговую орбиту мы получим при $s=0$ (отсутствует квадратичная флуктуация радиуса). Однако центр орбиты не является фиксированным. Поэтому некруговую орбиту $s \gg 1$ мы можем рассматривать как наложение круговых орбит с одним и тем же значением радиуса, но обладающих различными центрами, отстоящими от начала координат на одном и том же расстоянии.

Пренебрегая спиновыми эффектами, мы найдем, что проекции момента импульса на ось z по квантовой и классической теориям соответственно равны:

$$M_z^{\text{кв}} \cong \hbar l = \hbar(n-s), \qquad (28,21)$$

$$M_z^{\text{кл}} = \frac{1}{2\pi}\oint d\varphi \left[r\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{e}{c}A\right)\right]_z = \frac{eH}{2c}(R^2 - a^2), \qquad (28,22)$$

где R — радиус истинной круговой орбиты, a — расстояние от центра орбиты до начала координат.

Сопоставляя формулы (28,22) и (28,21), получим:

$$R=\sqrt{\frac{n}{\gamma}}, \quad a=\sqrt{\frac{s}{\gamma}}. \tag{28,23}$$

Величины R и a мы можем трактовать соответственно как радиус истинной круговой орбиты и амплитуду радиальных колебаний.

Отсюда видно, что радиус равновесной орбиты R и квадратичная флуктуация радиуса ξ^2 равны

$$\overline{r^2}=R^2+a^2, \tag{28,24}$$

$$\xi^2=\frac{a^2}{2}. \tag{28,25}$$

Отсюда следует, что при $l=n-s>0$ начало координат будет лежать внутри круговой орбиты ($R>a$), а при $l=n-s<0$ — вне ее ($R<a$).

в) Спонтанные переходы. Вычислим частоту и интенсивность излучения при переходе электрона из начального состояния n, s, $k=0$ (плоское движение) в состояние $n'=n-\nu$, s', k'.

Частота излучения будет определяться выражением

$$\omega=c\varkappa=c(K-K')=c\left(\sqrt{k_0^2+4\gamma n}-\sqrt{k_0^2+k'^2+4\gamma(n-\nu)}\right), \tag{28,26}$$

а для интенсивности излучения мы будем иметь [см. (27,30)]:

$$W=\sum_{\nu,\nu'} W_{nn'ss'}=\sum_{\nu\nu'}\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta\, W(\nu,\nu',\theta), \tag{28,27}$$

причем спектральное угловое распределение определяется выражением

$$W(\nu,\nu',\theta)=ce^2\frac{\varkappa^2}{1+\frac{\partial K'}{\partial\varkappa}}S, \tag{28,28}$$

где

$$S=(\bar{\boldsymbol{\alpha}}^+\boldsymbol{a})(\bar{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{a}^+), \quad \nu=n-n', \quad \nu'=s-s', \tag{28,29}$$

а матричный элемент

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}}=\int \psi^+_{n's'k'}\, e^{-i\boldsymbol{\varkappa r}}\boldsymbol{\alpha}\psi_{ns0}\, d^3x. \tag{28,30}$$

Если при рассмотрении спонтанных переходов мы не изучаем поляризационных эффектов, то амплитуды вектор-потенциала следует подчинить перестановочным соотношениям:

$$a'^+_{s'}a_s=0, \quad a_s a'^+_{s'}=\left(\delta_{ss'}-\varkappa^0_s\varkappa^0_{s'}\right)\delta_{\varkappa\varkappa'}. \tag{28,31}$$

В этом случае для величины S находим выражение

$$S = (\bar{\alpha}^+\bar{\alpha}) - (\varkappa^0\bar{\alpha}^+)(\varkappa^0\bar{\alpha}), \qquad (28,32)$$

где

$$\varkappa^0 = \frac{\varkappa}{\varkappa}.$$

При исследовании поляризационных эффектов мы должны найти интенсивности излучения, соответствующие двум линейным и двум круговым состояниям поляризации. Для линейной поляризации амплитуду вектор-потенциала поля фотонов следует разбить на две взаимно перпендикулярные составляющие (см. § 14):

$$a = \beta_2 g_2 + \beta_3 g_3 = a_2 + a_3, \qquad (28,33)$$

где

$$\beta_2 = \frac{[\varkappa^0 j]}{\sqrt{1-(\varkappa^0 j)^2}}, \quad \beta_3 = \frac{\varkappa^0(\varkappa^0 j) - j}{\sqrt{1-(\varkappa^0 j)^2}}, \qquad (28,34)$$

$$g_s g_{s'}' = \delta_{ss'} \quad (s,\ s' = 2,\ 3).$$

Единичный вектор j следует направить по какому-либо выделенному направлению. В нашем случае в качестве этого направления проще всего принять ось z ($j \parallel z$), по которой направлено внешнее магнитное поле H.

Тогда для величин S_2 и S_3 мы найдем значения:

$$S_2 = (\bar{\alpha}^+ a_2)(\bar{\alpha} a_2^+) = \bar{\alpha}_x^+\bar{\alpha}_x\left(1 - \frac{\varkappa_x^2}{\varkappa_x^2+\varkappa_y^2}\right) + \bar{\alpha}_y^+\bar{\alpha}_y\left(1 - \frac{\varkappa_y^2}{\varkappa_x^2+\varkappa_y^2}\right) - (\bar{\alpha}_x^+\bar{\alpha}_y + \bar{\alpha}_y^+\bar{\alpha}_x)\frac{\varkappa_x\varkappa_y}{\varkappa_x^2+\varkappa_y^2}, \qquad (28,35)$$

$$S_3 = (\bar{\alpha}^+ a_3)(\bar{\alpha} a_3^+) = \bar{\alpha}_z^+\bar{\alpha}_z\left(1 - \frac{\varkappa_z^2}{\varkappa_x^2+\varkappa_y^2}\right) - (\bar{\alpha}^+\varkappa)(\bar{\alpha}\varkappa)\left(\frac{1}{\varkappa^2} - \frac{1}{\varkappa_x^2+\varkappa_y^2}\right) - (\bar{\alpha}_z^+\bar{\alpha}_x + \bar{\alpha}_x^+\bar{\alpha}_z)\frac{\varkappa_z\varkappa_x}{\varkappa_x^2+\varkappa_y^2} - (\bar{\alpha}_z^+\bar{\alpha}_y + \bar{\alpha}_y^+\bar{\alpha}_z)\frac{\varkappa_z\varkappa_y}{\varkappa_x^2+\varkappa_y^2}. \qquad (28,36)$$

Как и следовало ожидать,

$$S = S_2 + S_3. \qquad (28,37)$$

При исследовании круговой поляризации вектор-потенциал поля фотонов следует разбить на две составляющие другим способом:

$$a = \beta_1 g_1 + \beta_{-1} g_{-1} = \sum_{l=\pm 1} \beta_l g_l, \qquad (28,38)$$

где $g_l g_{l'}^{+} = \delta_{ll'}$, а β_1 и β_{-1} связаны с β_2 и β_3 соотношением

$$\beta_l = \frac{1}{\sqrt{2}}(\beta_2 + il\beta_3). \tag{28,39}$$

При исследовании круговой поляризации для величины S_l находим два значения[1]):

$$S_l = (\bar{\alpha}^+ a_l)(\bar{\alpha} a_l^+) = \frac{1}{2}(\bar{\alpha}^+\bar{\alpha}) - \frac{1}{2}(\bar{\alpha}^+\varkappa^0)(\bar{\alpha}\varkappa^0) + l\frac{i}{2}(\varkappa^0[\bar{\alpha}^+\bar{\alpha}]). \tag{28,40}$$

Отсюда видно, что круговая поляризация, т. е. величина S_l, не зависит от направления вектора j.

Как известно, в классическом случае поляризация характеризуется соотношением между квадратами амплитуд двух взаимно-перпендикулярных колебаний (в квантовом случае их можно считать пропорциональными W_2 и W_3) и фазой δ между этими колебаниями. В квантовом случае фаза δ может быть найдена, когда наряду с линейной поляризацией мы будем знать еще и круговую:

$$\sin\delta = \frac{W_{-1} - W_1}{2\sqrt{W_2 W_3}}. \tag{28,41}$$

Для неполяризованного излучения фаза δ может принимать всевозможные значения и поэтому в среднем она должна обращаться в нуль. Таким образом, для неполяризованного излучения мы имеем

$$W_2 = W_3 = W_{-1} = W_1 = \frac{1}{2}W. \tag{28,42}$$

В случае линейной поляризации

$$W_2 = W, \quad W_3 = 0 \tag{28,43}$$

или

$$W_3 = W, \quad W_2 = 0. \tag{28,43a}$$

Если излучение обладает круговой поляризацией, то

$$W_{-1} = W, \quad W_1 = 0 \tag{28,44}$$

или

$$W_1 = W, \quad W_{-1} = 0. \tag{28,44a}$$

Заметим также, что в данной задаче мы не можем ограничиться рассмотрением дипольного излучения ($e^{-i\varkappa r} \sim 1$), поскольку максимум излучения приходится на высокие гармоники. Поэтому матричный элемент (28,30) должен быть вычислен нами точно.

---

[1]) Как видно из формулы (14,16), вектор поляризации $\boldsymbol{S}$ при $l = 1$ будет направлен по движению фотона (правый винт). Эту круговую поляризацию мы будем называть правой. В другом случае, когда $l = -1$, мы будем иметь левую поляризацию, так как вектор $\boldsymbol{S}$ будет направлен против движения фотона (левый винт).

В классической оптике (см., например, М. Борн, Оптика, Харьков, 1937, стр. 37), наоборот, поляризация, соответствующая $l = 1$, называется левой, а $l = -1$ — правой.

Введем сферические координаты для волнового вектора излучаемого фотона $\boldsymbol{\varkappa}$ $\left(\varkappa=\sqrt{\varkappa_x^2+\varkappa_y^2+\varkappa_z^2},\ \theta,\ \varphi'\right)$ и цилиндрические координаты для радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ $\left(r=\sqrt{x^2+y^2},\ z,\ \varphi\right)$. Не нарушая общности выводов, мы можем положить

$$\varphi'=\frac{\pi}{2}. \tag{28,45}$$

Тогда при вычислении матричных элементов мы должны учесть соотношения:

$$\frac{1}{L}\int\limits_{-L/2}^{L/2} dz\, e^{-iz(\varkappa\cos\theta+k')}=\delta_{k',\,-\varkappa\cos\theta}, \tag{28,46}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\, e^{-i\varkappa r\sin\theta\sin\varphi+i(l-l')\varphi}=J_{l-l'}(\varkappa r\sin\theta), \tag{28,47}$$

$$\int\limits_0^\infty I_{n',s'}(\rho)\, I_{n,s}(\rho)\, J_{l-l'}\left(\frac{\varkappa\sin\theta}{\sqrt{\gamma}}\sqrt{\rho}\right)d\rho=I_{n,n'}(x)\, I_{s,s'}(x)\,^{1)}, \tag{28,48}$$

где функции $I_{n,n'}$, $I_{s,s'}$, зависящие от x, определяются равенством (28,12), а величина x равна:

$$x=\frac{\varkappa^2\sin^2\theta}{4\gamma}. \tag{28,49}$$

Из формулы (28,46) следует, что $k'=-\varkappa\cos\theta$. Подставляя это значение для k' в формулу (28,26), мы получим:

$$\varkappa=\frac{K}{\sin^2\theta}\left(1-\sqrt{1-\frac{\nu}{n}\beta^2\sin^2\theta}\right), \tag{28,50}$$

---

[1]) Для того чтобы раскрыть этот интеграл, мы должны вместо полинома Лагерра $Q_{s'}$, который входит сомножителем в функцию $I_{n',s'}(\rho)$ [см. (28,12)], подставить его значение

$$Q_{s'}^{l'}=\rho^{-l'}e^{\rho}\frac{d^{s'}}{d\rho^{s'}}\left(\rho^{s'+l'}e^{-\rho}\right).$$

Затем, раскрывая по частям интеграл s' раз и учитывая соотношения:

$$\frac{d^k}{d\rho^k}Q_s^l(\rho)=(-1)^k\frac{s!}{(s-k)!}Q_{s-k}^{l+k}(\rho),$$

$$\frac{d^{s'-k}}{d\rho^{s'-k}}\rho^{\frac{l-l'}{2}}J_{l-l'}(a\sqrt{\rho})=\left(\frac{a}{2}\right)^{s'-k}\rho^{\frac{l-l'-s'+k}{2}}J_{l-l'-s'+k'}(a\sqrt{\rho}),$$

$$\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{\nu+\alpha/2}J_\alpha(2\sqrt{z}\sqrt{t})\,dt=e^{-z}z^{\alpha/2}Q_\nu^\alpha(z),$$

мы докажем результат (28,48). [См. А. А. Соколов и И. М. Тернов, ЖЭТФ 25, 698 (1953).]

где $\beta = \sqrt{\frac{K^2 - k_0^2}{K^2}} = \frac{v}{c}$, а v — скорость движения электрона. Отсюда приближенно находим:

$$x \cong \frac{\nu\beta}{R}\left(1 + \frac{\nu}{4n}\beta^2 \sin^2\theta\right). \qquad (28,51)$$

Подставляя (28,50) в (28,49), получаем:

$$x = \frac{n}{\beta^2 \sin^2\theta}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\nu}{n}\beta^2 \sin^2\theta}\right)^2 \cong \frac{\nu^2\beta^2 \sin^2\theta}{4n}, \qquad (28,52)$$

где $\nu = n - n'$ — номер излучаемой гармоники.

Тогда при вычислении матричных элементов, усредняя по начальным спиновым состояниям [см. (28,16)] и суммируя по конечным:

$$C_1'^+C_1' = C_2'^+C_2' = 1, \quad C_1'^+C_2' = C_2'^+C_1' = 0, \qquad (28,53)$$

получаем:

$$|\overline{\alpha}_x|^2 = \frac{I_{ss'}^2}{2}\left\{\frac{KK' - k_0^2}{2KK'}\left(I_{n,n'-1}^2 + I_{n-1,n'}^2\right) - \frac{4\gamma\sqrt{nn'}}{KK'} I_{n,n'-1}I_{n-1,n'}\right\}. \qquad (28,54)$$

Оставляя в дальнейших формулах прежде всего основные величины (не зависящие от $\hbar$), а также величины, пропорциональные $\hbar$, т. е. $x \sim \nu^2/n$ и ν/n, мы имеем:

$$\frac{KK' - k_0^2}{KK'} \cong \frac{4\gamma\sqrt{nn'}}{KK'} \cong \beta^2, \qquad \frac{1}{1 + \frac{\partial K'}{\partial x}} \cong 1.$$

Поэтому

$$|\overline{\alpha}_x|^2 = \frac{I_{ss'}^2}{4}\beta^2 (I_{n-1,n'} - I_{n,n'-1})^2. \qquad (28,55)$$

Аналогичным путем мы находим:

$$\left.\begin{aligned} |\overline{\alpha}_y|^2 &= \frac{\beta^2 I_{ss'}^2}{4}(I_{n-1,n'} + I_{n,n'-1})^2, \\ \overline{\alpha_y^+}\overline{\alpha}_z + \overline{\alpha_z^+}\overline{\alpha}_y &= -\frac{\nu\beta^3\cos\theta I_{ss'}^2}{4n}(I_{nn'}I_{n-1,n'} + I_{n-1,n'-1}I_{n,n'-1}), \\ \overline{\alpha_x^+}\overline{\alpha}_y &= -\overline{\alpha_y^+}\overline{\alpha}_x = \frac{i\beta^2 I_{ss'}^2}{4}(I_{n-1,n'} + I_{n,n'-1})(I_{n-1,n'} - I_{n,n'-1}), \end{aligned}\right\} \qquad (28,56)$$

$$\left.\begin{aligned} |\overline{\alpha}_z|^2 &= \frac{\beta^2 I_{ss'}^2}{4}(I_{n,n'} - I_{n-1,n'-1})^2, \\ \overline{\alpha_x^+}\overline{\alpha}_z &= \overline{\alpha_z^+}\overline{\alpha}_x = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (28,56a)$$

г) Исследование излучения «светящегося» электрона в классическом приближении с учетом поляризационных эффектов. При переходе к классическому приближению ($\hbar \to 0$) мы воспользуемся предельной формулой, связывающей обобщенные полиномы Лагерра с функцией Бесселя [1]):

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ \nu, z \neq \infty}} I_{n, n-\nu}\left(\frac{z^2}{4n}\right) = J_\nu(z). \tag{28,57}$$

Кроме того, используем рекуррентные соотношения для функций Бесселя

$$\left.\begin{aligned} J_{\nu+1}(z) + J_{\nu-1}(z) &= \frac{2\nu}{z} J_\nu(z), \\ J_{\nu+1}(z) - J_{\nu-1}(z) &= 2J'_\nu(z). \end{aligned}\right\} \tag{28,58}$$

Примем во внимание, что в классическом приближении

$$x \sim \frac{\nu^2}{n} \to 0, \tag{28,59}$$

а

$$I^2_{ss'}(0) = \delta_{ss'}. \tag{28,60}$$

Отсюда следует, что в классическом приближении радиальное квантовое число s даже при наличии излучения должно оставаться величиной постоянной. Поэтому отличными от нуля будут следующие три значения для матричных элементов:

$$\left.\begin{aligned} |\overline{\alpha}_x|^2 = \beta^2 J'^2_\nu(\nu\beta \sin\theta), \quad |\overline{\alpha}_y|^2 = \sin^{-2}\theta J^2_\nu(\nu\beta\sin\theta), \\ \overline{\alpha^+_x}\,\overline{\alpha}_y = -\overline{\alpha^+_y}\,\overline{\alpha}_x = \frac{i\beta}{\sin\theta} J_\nu(\nu\beta\sin\theta)\, J'_\nu(\nu\beta\sin\theta). \end{aligned}\right\} \tag{28,61}$$

Учитывая, что при условии (28,45)

$$\varkappa_x = 0, \quad \varkappa_y = \varkappa\cos\theta, \quad \varkappa_z = \varkappa\sin\theta, \tag{28,62}$$

мы найдем с помощью соотношений (28,27), (28,35), (28,36) и (28,40) для интенсивности излучения, характеризующей не только спектральное и угловое распределение, но и поляризационные эффекты, следующее выражение [2]):

$$W(\nu, \theta, l_i) = \frac{e^2\beta^2 c}{R^2}\nu^2 \left\{\beta l_2 J'_\nu(\nu\beta\sin\theta) - l_3 \operatorname{ctg}\theta J_\nu(\nu\beta\sin\theta)\right\}^2. \tag{28,63}$$

---

[1]) А. А. Соколов, А. Н. Матвеев и И. М. Тернов, ДАН СССР 102, 65 (1955).

[2]) А. А. Соколов и И. М. Тернов, ЖЭТФ 31, 473 (1956).

Как известно, в ультрарелятивистском случае волновой вектор $\varkappa$ направлен почти по движению электрона, т. е. по касательной к окружности (рис. 1).

Для вычисления интенсивности линейно-поляризованного луча, вектор поляризации которого (за направление вектора поляризации

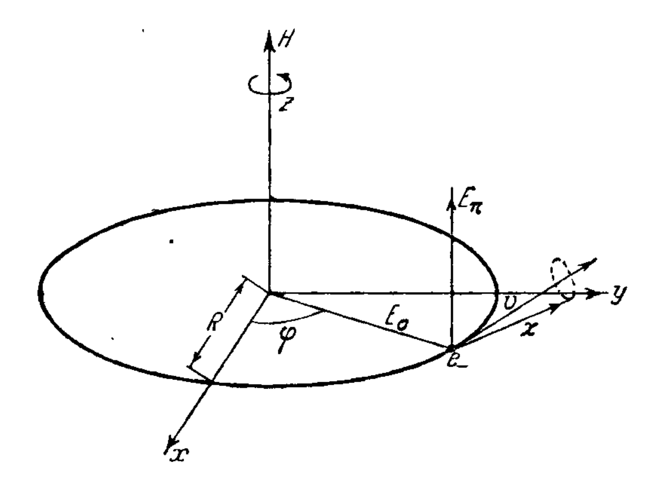


Рис. 1. Движение и излучение релятивистского электрона в магнитном поле.

мы принимаем вектор электрического поля излучения) лежит в плоскости орбиты и направлен по радиусу к центру (σ-составляющая), мы должны положить:

$$l_2 = 1, \quad l_3 = 0. \tag{28,64}$$

Для интенсивности W_3 линейно-поляризованного луча, вектор поляризации которого направлен почти по оси z (π-составляющая), мы будем иметь:

$$l_2 = 0, \quad l_3 = 1. \tag{28,65}$$

При вычислении интенсивности излучения, поляризованного по кругу, мы должны положить:

для правой поляризации (интенсивность W_1)

$$l_2 = l_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{28,66}$$

и для левой (интенсивность W_{-1})

$$l_2 = -l_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{28,67}$$

Из формулы (28,63) видно, что при заданной гармонике ν под произвольным углом θ будет распространяться свет, поляризованный по эллипсу. Отношение квадратов амплитуд, характеризующих

линейную поляризацию, будет равно:

$$\frac{a_3^2}{a_2^2}=\frac{W_3(\nu,\theta)}{W_2(\nu,\theta)}=\frac{\operatorname{ctg}^2\theta J_\nu^2(\nu\beta\sin\theta)}{\beta^2 J_\nu'^2(\nu\beta\sin\theta)}, \qquad (28,68)$$

а для фазы δ по формуле (28,41) находим значение

$$\delta=\arcsin\frac{\cos\theta}{|\cos\theta|}=\pm\frac{\pi}{2}. \qquad (28,69)$$

Из последней формулы видно, что при $\theta=\pi/2$ (т. е. в плоскости вращения электрона) излучение становится линейно-поляризованным, так как $W_3=0$. При $0<\theta<\pi/2$, т. е. по направлению, составляющему острый угол с магнитным полем, будет излучаться свет с эллиптической поляризацией, обладающей левым вращением, а при $\pi/2<\theta<\pi$ — правым. По мере увеличения $|\cos\theta|$ эллиптическая поляризация начинает переходить в круговую. Для нерелятивистского случая ($\beta\ll 1$), когда почти вся интенсивность излучения приходится на основной тон ($\nu=1$), мы будем иметь

$$\left.\begin{aligned} J_1(\beta\sin\theta)&\cong\frac{1}{2}\beta\sin\theta,\\ J_1'(\beta\sin\theta)&\cong\frac{1}{2}.\end{aligned}\right\} \qquad (28,70)$$

Поэтому отношение (28,68) переходит в

$$\frac{W_3(\theta)}{W_2(\theta)}=\cos^2\theta. \qquad (28,71)$$

Отсюда видно, что по направлению магнитного поля ($\theta=0$) должен распространяться луч, обладающий левой круговой поляризацией, а против магнитного поля ($\theta=\pi$) — правой. Этот результат для нерелятивистского случая хорошо известен и используется при анализе эффекта Зеемана.

Для того чтобы найти выражение общей интенсивности излучения, мы должны усреднить выражение (28,63) по параметрам l_2 и l_3, характеризующим состояния поляризации, т. е. должны положить:

$$l_2^2=l_3^2=1, \quad l_2 l_3=0. \qquad (28,72)$$

Тогда мы придем к формуле, полученной Шоттом [1]):

$$W(\nu,\theta)=\frac{e^2\beta^2 c}{R^2}\nu^2\left\{\beta^2 J_\nu'^2(\nu\beta\sin\theta)+\operatorname{ctg}^2\theta J_\nu^2(\nu\beta\sin\theta)\right\}. \qquad (28,73)$$

При исследовании ультрарелятивистского случая ($1-\beta^2\ll 1$) формулами (28,63) или (28,73) пользоваться весьма неудобно, поскольку

[1]) G. Schott, Electromagnetic Radiation, Cambridge, 1912, стр. 109, 110.

максимум падает на большие значения гармоники ν, которая определяет порядок бесселевой функции и входит также в ее аргумент.

В этом случае лучше всего использовать следующую апроксимацию функций Бесселя:

$$\left.\begin{aligned} J'_\nu(\nu\beta\sin\theta) &= \frac{\varepsilon}{\pi\sqrt{3}} K_{2/3}\left(\frac{\nu}{3}\varepsilon^{3/2}\right), \\ J_\nu(\nu\beta\sin\theta) &= \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\pi\sqrt{3}} K_{1/3}\left(\frac{\nu}{3}\varepsilon^{3/2}\right), \end{aligned}\right\} \qquad (28,74)$$

где

$$\varepsilon = 1 - \beta^2\sin^2\theta.$$

Тогда выражение для интенсивности поляризованного излучения [см. (28,63)] принимает вид:

$$W(\nu,\theta,l_i) = \frac{e^2\beta c}{R^2}\frac{\nu^2}{3\pi^2}\left\{l_2\varepsilon K_{2/3}\left(\frac{\nu}{3}\varepsilon^{3/2}\right) - \cos\theta\, l_3\sqrt{\varepsilon}\, K_{1/3}\left(\frac{\nu}{3}\varepsilon^{3/2}\right)\right\}^2. \qquad (28,75)$$

Чтобы исследовать зависимость степени поляризации как функции угла θ, просуммируем выражение (28,75) по гармоникам ν. Поскольку в ультрарелятивистском случае максимум интенсивности излучения лежит в области больших частот, мы можем суммирование по ν заменить интегрированием. Тогда, учитывая интегралы

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\infty \nu^2 K^2_{2/3}\left(\frac{\nu}{3}\varepsilon^{3/2}\right)d\nu = \frac{21}{16}\pi^2\varepsilon^{-9/2}, \quad \int_0^\infty \nu^2 K^2_{1/3}\left(\frac{\nu}{3}\varepsilon^{3/2}\right)d\nu = \frac{15}{16}\pi^2\varepsilon^{-9/2}, \\ &\int_0^\infty \nu^2 K_{1/3}\left(\frac{\nu}{3}\varepsilon^{3/2}\right)K_{2/3}\left(\frac{\nu}{3}\varepsilon^{3/2}\right)d\nu = \frac{6\pi}{\sqrt{3}}\varepsilon^{-4/2}, \end{aligned}\right\} \qquad (28,76)$$

найдем:

$$W(\theta,l_i)\sin\theta\,d\theta = \sin\theta\,d\theta\int_0^\infty W(\nu,\theta,l_i)\,d\nu = W^{\text{кл}} f_i(\xi)\,d\xi, \qquad (28,77)$$

где $\xi = \cos\theta/\sqrt{1-\beta^2}$, а $W^{\text{кл}}$ представляет собой полную энергию излучения (по классической теории) в единицу времени:

$$W^{\text{кл}} = \frac{2}{3}\frac{e^2c}{R^2}\left(\frac{E}{m_0c^2}\right)^4. \qquad (28,78)$$

Для функции $f_i(\xi)$ имеем следующее выражение:

$$f_i(\xi) = \frac{3}{2}\left\{\frac{7}{16}l_2^2(1+\xi^2)^{-5/2} + \frac{5}{16}l_3^2\xi^2(1+\xi^2)^{-7/2} - \frac{4}{\pi\sqrt{3}}l_2l_3\xi(1+\xi^2)^{-3}\right\}. \qquad (28,79)$$

График зависимости f_i от ξ (т. е. от угла θ) для линейно-поляризованных составляющих дан на рис. 2. Кривые f_2 и f_3 характеризуют

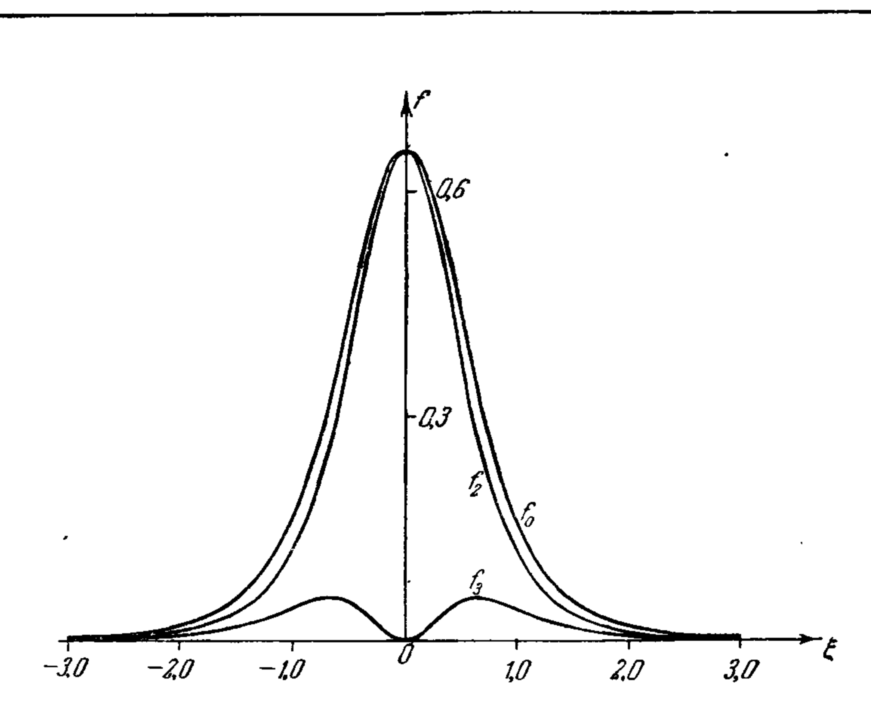


Рис. 2. Линейная поляризация в зависимости от угла излучения.

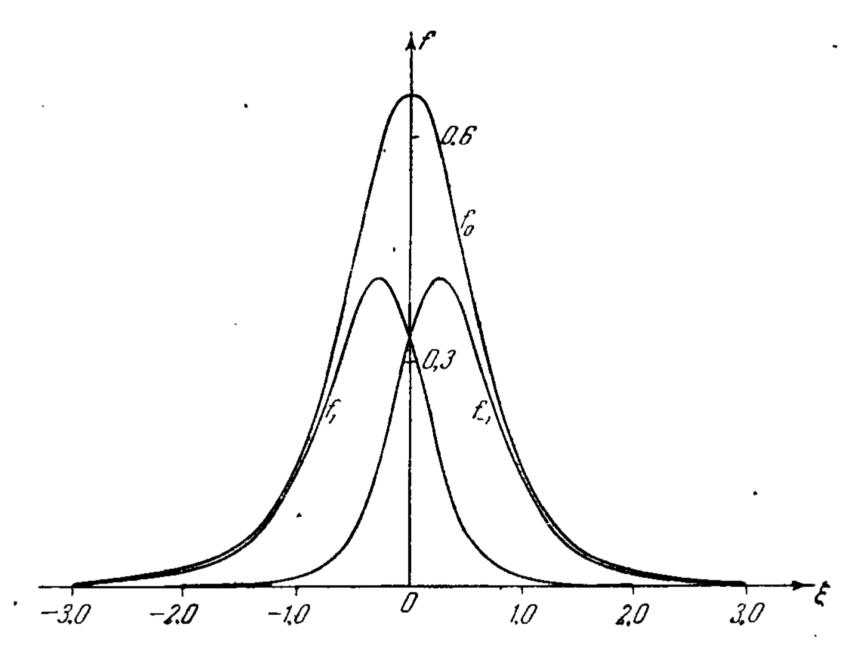


Рис. 3. Круговая поляризация в зависимости от угла излучения.

интенсивность излучения линейно-поляризованного света. Кривые f_1 и f_{-1} на рис. 3 характеризуют интенсивность излучения, поляризованного по кругу, а именно: соответственно правую $(l_2 = l_3 = 1/\sqrt{2})$ и левую $(l_2 = -l_3 = 1/\sqrt{2})$ поляризации. Наконец, кривые f_0 (рис. 2 и 3) соответствуют полной интенсивности излучения, равной сумме линейно-поляризованных интенсивностей (рис. 2) или сумме поляризованных по кругу интенсивностей (рис. 3). На обоих рисунках эти кривые совпадают друг с другом.

Приведенные кривые показывают, что в плоскости вращения электрона $(\theta = \pi/2)$ должен излучаться линейно-поляризованный свет, вектор поляризации которого направлен по оси r. При $\theta < \pi/2$ излучение обладает преимущественно левой круговой поляризацией, а при $\theta > \pi/2$ — правой.

Интегрируя (28,75) по углу θ, определим поляризационные свойства излучения как функцию гармоники ν. Учитывая интегралы

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^\pi \varepsilon^2 K_{2/3}^2\left(\frac{\nu}{3}\varepsilon^{3/2}\right)\sin\theta\, d\theta \cong \\
&\qquad\cong \frac{\pi\varepsilon_0}{\sqrt{3}\,\nu}\left\{\int_{2/3\nu\varepsilon_0^{3/2}}^{\infty} \frac{K_{1/3}(x)}{x}\,dx + 3K_{2/3}\left(\frac{2}{3}\nu\varepsilon_0^{3/2}\right)\right\},\\
&\int_0^\pi \varepsilon\cos^2\theta K_{1/3}^2\left(\frac{\nu}{3}\varepsilon^{3/2}\right)\sin\theta\, d\theta \cong \frac{\pi\varepsilon_0}{\sqrt{3}\,\nu}\int_{2/3\nu\varepsilon_0^{3/2}}^{\infty} \frac{K_{1/3}(x)}{x}\,dx,
\end{aligned}\right\} \quad (28,80)$$

где

$$\varepsilon_0 = 1 - \beta^2 = \left(\frac{m_0c^2}{E}\right)^2,$$

и вводя переменную $y = (2\nu/3)(m_0c^2/E)^3$, получим:

$$W(\nu, l_i)\,d\nu = \int_0^\pi W(\nu, \theta, l_i)\sin\theta\, d\theta = W^{\text{кл}}\varphi_i(y)\,dy, \quad (28,81)$$

где

$$\varphi_i(y) = \frac{9\sqrt{3}}{16\pi}\, y\left\{(l_2^2 + l_3^2)\int_y^\infty K_{5/3}(x)\,dx + (l_2^2 - l_3^2)K_{2/3}(y)\right\} \quad (28,82)$$

Отсюда видно, что при интегрировании по углам круговая поляризация вообще исчезает, так как интенсивности излучения в обоих случаях как для правой поляризации $(l_2 = l_3 = 1/\sqrt{2})$, так и для левой $(l_2 = -l_3 = 1/\sqrt{2})$ становятся равными друг другу.

Интенсивности излучения линейно-поляризованного света будут различными. График зависимости φ от y (т. е. от номера гармоники) представлен на рис. 4. Из приведенных кривых видно, что наи-

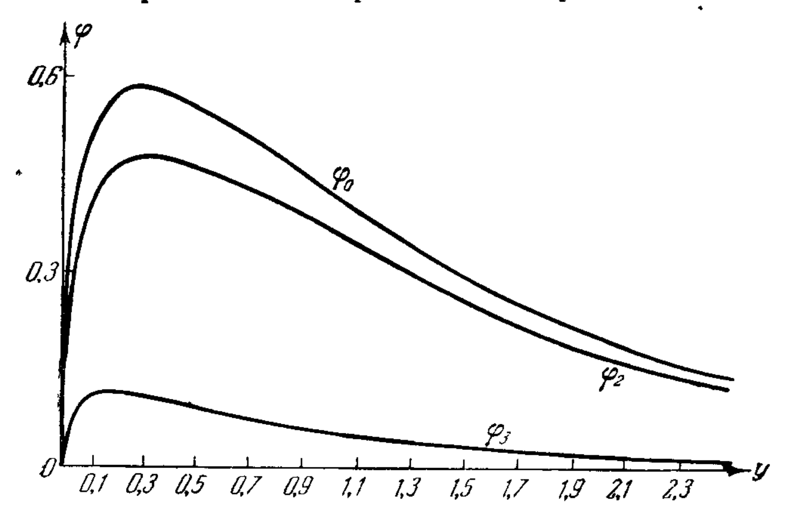


Рис. 4. Линейная поляризация в зависимости от частоты излучения.

большей интенсивностью обладает излучение, соответствующее σ-составляющей (кривая φ_2, $l_2 = 1$, $l_3 = 0$).

Интегрируя выражение (28,82) по всевозможным частотам, найдем общую интенсивность поляризованных излучений [1]):

$$\left.\begin{aligned} W_2 &= W^{\text{кл}} \int_0^\infty \varphi_2(y)\,dy = \frac{7}{8} W^{\text{кл}}, \\ W_3 &= W^{\text{кл}} \int_0^\infty \varphi_3(y)\,dy = \frac{1}{8} W^{\text{кл}}. \end{aligned}\right\} \qquad (28,83)$$

Эти же выражения могут быть получены также из формулы (28,77) в результате интегрирования по переменной ξ.

Теория поляризации излучения светящегося электрона может найти применение также при исследовании радиоизлучения Солнца и Галактики; поляризационные свойства этого излучения уже обнаружены экспериментально.

Суммируя (28,82) по состояниям поляризации, получим формулу спектральной интенсивности излучения «светящегося» электрона, установленную в [2]) [см. также [3])] и подробно исследованную в нашей

---

[1]) А. А. Соколов, А. Н. Матвеев и И. М. Тернов, ДАН СССР **102**, 65 (1955).

[2]) Д. Д. Иваненко и А. А. Соколов, ДАН СССР **59**, 1551 (1948).

[3]) J. Schwinger, Phys. Rev. **75**, 1912 (1949).

монографии [1]). Согласно (28,81) и (28,82) эта формула имеет вид

$$W(\nu)d\nu = W^{\text{кл}}\varphi_0(y)\,dy, \tag{28,84}$$

где функция

$$\varphi_0(y) = \frac{9\sqrt{3}}{8\pi}\,y\int\limits_y^\infty K_{5/3}(\xi)\,d\xi \tag{28,85}$$

изображена на рис. 4 (кривая φ_0) и представляет собой сумму кривых φ_2 и φ_3.

д) Экспериментальные исследования излучения «светящегося» электрона. За последнее время появилось большое число экспериментальных работ, посвященных «светящемуся» электрону. Блюиту [2]) одному из первых удалось (правда, косвенным путем) наблюдать интенсивное излучение электронов. В 1946 г. он показал, что радиус электронной орбиты в бетатроне при энергии 100 *Мэв* вследствие излучения должен уменьшаться за весь цикл ускорения примерио на 3 *см*, что находится в хорошем согласии с расчетами Арцимовича и Померанчука [3]), а также самого Блюита.

В 1947 г. излучение «светящихся» электронов в синхротроне при энергии 70 *Мэв* было наблюдено непосредственно Сьютсом [4]), Хабером [5]), а затем группой Поллока [6]). Они наблюдали свечение голубовато-белого цвета, выходящее из камеры синхротрона по касательной к орбите в том месте, где электроны движутся на наблюдателя.

В 1948 г. появилась работа [7]), в которой исследовалось спектральное распределение интенсивности в области длин волн 3500—7000 Å, излучаемых электронами с энергиями 40, 60, 70 и 80 *Мэв*. Авторы регистрировали излучение за весь цикл ускорения. Эксперимент показал сравнительно хорошее согласие с классической теорией «светящегося» электрона.

В 1956 г. появилась обширная работа Томбулиана и Гартмана [8]), в которой при помощи вакуумного спектрографа с дифракционной решеткой скользящего падения было исследовано спектральное

---

[1]) Д. Д. Иваненко и А. А. Соколов, Классическая теория поля, стр. 279.

[2]) J. Blewett, Phys. Rev. 69, 87 (1946).

[3]) Л. А. Арцимович и И. Я. Померанчук, J. Phys. USSR **9**, 267 (1945).

[4]) См. сообщение в Sci. News Let. **51**, 339 (1947) об исследовании Сьютса (C. Suits).

[5]) См. сообщение в Electronics **20**, № 9, 136 (1947) об исследовании Хабера (F. Haber).

[6]) F. Elder, A. Gurewitsch, R. Langmuir, H. Pollock, Phys. Rev. **71**, 829 (1947).

[7]) F. Elder, R. Langmuir and H. Pollock, Phys. Rev. **74**, 52 (1948).

[8]) D. Tomboulian and P. Hartman, Phys. Rev., **102**, 1423 (1956).

распределение энергии «светящегося» электрона в Корнельском синхротроне при ускорении до 320 *Мэв* для областей спектра 400—60 Å.

Полученные кривые спектрального распределения в течение всего времени ускорения до 320 *Мэв* находились в хорошем согласии с теорией. Это видно из рис. 5, где точками обозначены

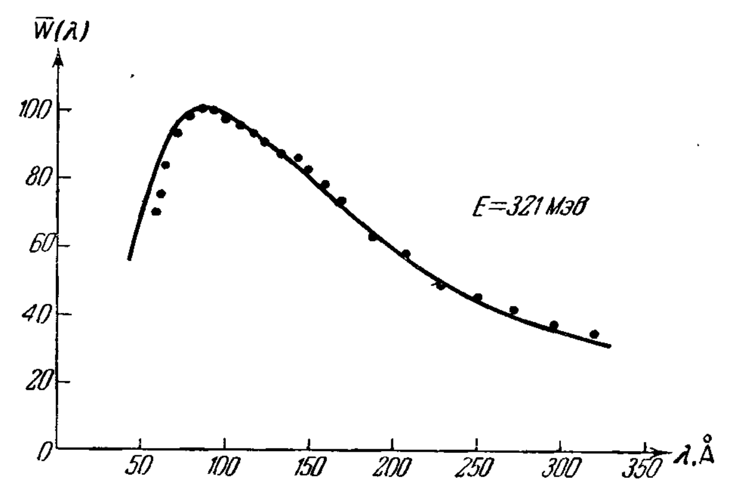


Рис. 5. Сравнение теоретических и экспериментальных данных по спектральному излучению «светящегося» электрона.

экспериментальные данные, а сплошной линией представлена теоретическая кривая зависимости средней интенсивности $\overline{W}$ излучения от длины волны λ. Если перейти от ν к λ, то формула (28,84) может быть представлена в виде

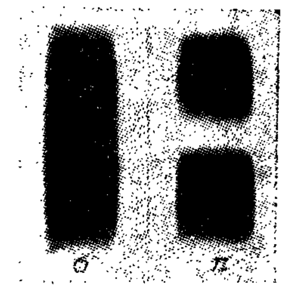


Рис. 6. Фотография σ- и π-компонент излучения «светящегося» электрона.

$$W(\lambda, t) = \frac{3^{5/2}}{16\pi^2}\left(\frac{e^2c}{R^3}\right)\left(\frac{E}{m_0c^2}\right)^7 \times \\ \times \left(\frac{\lambda_c}{\lambda}\right)^3 \int\limits_{\lambda_c/\lambda}^{\infty} K_{5/3}(\eta)\, d\eta, \qquad (28,86)$$

где

$$\lambda_c = \frac{4\pi R}{3}\left(\frac{m_0c^2}{E}\right)^3.$$

При помощи сплошного спектра «светящегося» электрона в области мягких рентгеновских лучей авторы сфотографировали спектры поглощения тонких пленок алюминия и бериллия, доказав тем самым возможность использования этого излучения для целей абсорбционной спектроскопии твердых тел. Следует отметить, что излучение электронов в синхротроне представляет пока единственный известный в настоящее время достаточно интенсивный источник сплошного спектра в области мягких и, к тому же, поляризованных

рентгеновских лучей. Авторы указывают на возможность применения такого источника излучения для градуировки различных приемников в ультрафиолетовой области спектра.

В 1956 г. была опубликована работа Адо и Черенкова [1]), посвященная исследованию распределения энергии по спектру в области 4000—6100 Å, излучаемой моноэнергетическими электронами, ускоряемыми на электронном синхротроне ФИАН до энергий 150, 225 и 250 *Мэв*. Результаты эксперимента для энергий до 250 *Мэв* находятся в удовлетворительном согласии с теорией.

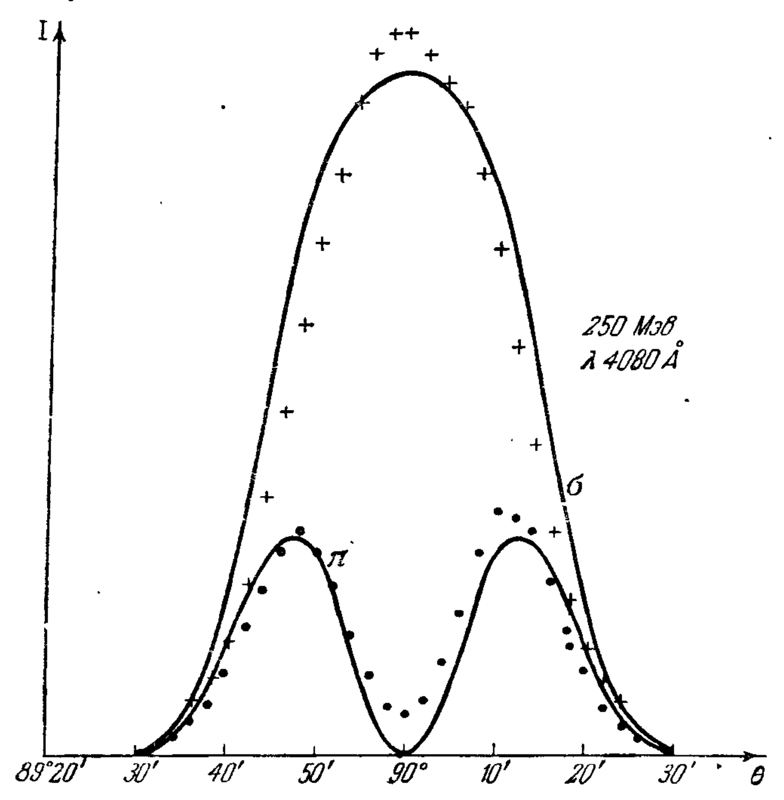


Рис. 7. Сравнение теоретических и экспериментальных даниых по линейно поляризованным составляющим излучения «светящегося» электрона (в относительных единицах).

В работе Королева и др. [2]) исследовались поляризация и угловое распределение излучения «светящегося» электрона. Ими обнаружены две компоненты поляризации (рис. 6). σ-компонента (вектор поляризации, т. е. электрический вектор, параллелен плоскости орбиты) имеет один максимум, лежащий в плоскости орбиты. π-компонента (вектор поляризации параллелен оси *z*) имеет два мак-

---

[1]) Ю. М. Адо и П. А. Черенков, ДАН СССР 110, 35 (1956).

[2]) Ф. А. Королев, В. С. Марков, Е. М. Акимов и О. Ф. Кулаков, ДАН СССР 110, 542 (1956).

симума, симметрично сдвинутых относительно плоскости орбиты. В плоскости же орбиты в согласии с теорией излучение π-компоненты отсутствует.

Авторы исследовали также и угловое распределение интенсивности излучения в обеих компонентах поляризации для различных длин волн и энергий ускоряемых электронов. Сравнение теоретических и экспериментальных данных в относительных единицах для длины волны 4080 Å и энергии 250 *Мэв* приведены на рис. 7.

Теоретические кривые для σ- ($l_2 = 1$, $l_3 = 0$) и π ($l_2 = 0$, $l_3 = 1$)-компонент были построены по формуле (28,75) и на рис. 7 представлены сплошной кривой. Экспериментальные данные обозначены кружками и крестиками. Они сравнительно хорошо согласуются с теоретической формулой, полученной в работе [1]).

е) Квантовые эффекты в теории «светящегося» электрона. При исследовании влияния квантовых эффектов на движение электрона в постоянном и однородном магнитном поле мы ограничимся величинами порядка $\hbar$. Тогда при условии (28,45) мы получаем для интенсивности излучения, просуммированной по состояниям поляризации, следующее значение [см. (28,27) и (28,32)]:

$$W_{nn'ss'} = \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta\, \varkappa^2 c e^2 \left[|\overline{\alpha}_x|^2 + |\overline{\alpha}_y|^2 \cos^2\theta + \right.$$
$$\left. + |\overline{\alpha}_z|^2 \sin^2\theta - (\overline{\alpha}_y^+ \overline{\alpha}_z + \overline{\alpha}_z^+ \overline{\alpha}_y) \sin\theta\cos\theta \right]. \qquad (28,87)$$

При этом в данном приближении [см. (28,55) и (28,56)] мы можем положить:

$$\left.\begin{aligned} |\overline{\alpha}_x|^2 &= \frac{I_{ss'}^2}{4}\beta^2 (I_{n-1,n'} - I_{n,n'-1})^2, \\ |\overline{\alpha}_y|^2 &= \frac{I_{ss'}^2\beta^2}{4} (I_{n-1,n'} + I_{n,n'-1})^2, \\ |\overline{\alpha}_z|^2 &= \frac{\beta^2}{4} I_{ss'}^2 (I_{nn'} - I_{n-1,n'-1}) \\ \overline{\alpha}_y^+\overline{\alpha}_z + \overline{\alpha}_z^+\overline{\alpha}_y &= \\ = -\frac{\nu\beta^3\cos\theta}{4n} I_{ss'}^2 (I_{nn'}I_{n-1,n'} &+ I_{n-1,n'-1}I_{n,n'-1}) \cong -\frac{\nu\beta\cos\theta}{2n}|\overline{\alpha}_y|^2. \end{aligned}\right\} \qquad (28,88)$$

Для дальнейших вычислений используем следующую асимптотическую формулу связи обобщенных полиномов Лагерра (точнее,

---

[1]) А. А. Соколов и И. М. Тернов, ЖЭТФ 31, 473, 1956.

функции $I_{nn'}$ с функцией $K_{1/3}$) [1]):

$$I_{nn'}(x)=\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\pi\sqrt{3}}K_{1/3}\left(\frac{\nu}{3}\varepsilon_1^{3/2}\right), \tag{28,89}$$

где

$$\varepsilon_1=1-\frac{x}{x_0}=(1-\beta^2\sin^2\theta)\left(1+\frac{\nu}{2n}\right)=\varepsilon\left(1+\frac{\nu}{2n}\right). \tag{28,90}$$

---

[1]) Эта формула может быть получена следующим образом. Как известно, функция $y=I_{nn'}(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2}{dx^2}(\sqrt{x}\,y)+\left(-\frac{1}{4}+\frac{n+n'+1}{2x}-\frac{(n-n')^2-1}{4x^2}\right)(\sqrt{x}\,y)=0.$$

Асимптотическое решение, пригодное при изменении x в пределах $0<x<x_0$, ищем в виде

$$y=A\sqrt{-\frac{z}{xz'}}K_{1/3}(z),$$

где

$$z=\int\limits_x^{x_0}\sqrt{\frac{(n-n')^2-1}{4x^2}-\frac{n+n'+1}{2x}+\frac{1}{4}}\,dx;$$

при $x=x_0$ подынтегральное выражение обращается в нуль. Для величины z имеем:

$$z=\begin{cases}\dfrac{2}{3}\sqrt[4]{x_0^2nn'}\left(1-\dfrac{x}{x_0}\right)^{3/2}\cong\dfrac{n-n'}{3}\left(1-\dfrac{x}{x_0}\right)^{3/2} & \text{при } 0\leqslant x<x_0,\\ \dfrac{1}{2}\Big[-(n-n')+(n-n')\ln\dfrac{(n-n')^2}{x}+ & \\ \quad+\left(n'+\dfrac{1}{2}\right)\ln\left(n'+\dfrac{1}{2}\right)-\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\ln\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\Big] & \text{при } x\to 0.\end{cases}$$

Нас интересует значение функции y при $x\to x_0$, однако коэффициент A может быть найден при вычислении асимптотического значения при $x\to 0$.

Используя формулу Стирлинга и учитывая, что в случае $x\to 0$:

$$K_{1/3}=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}e^{-z},\quad 2xz'=-(n-n'),$$

мы будем иметь

$$y=A\sqrt{\frac{\pi}{(n-n')}}e^{-z}=A\pi\sqrt{2}\sqrt{\frac{n!}{n'!}}\frac{1}{(n-n')!}x^{\frac{n-n'}{2}}.$$

С другой стороны, при малых значениях x

$$y=\lim_{x\to 0}I_{nn'}(x)=\sqrt{\frac{n!}{n'!}}\frac{1}{(n-n')!}x^{\frac{n-n'}{2}}.$$

Отсюда следует, что $A=1/\pi\sqrt{2}$, и поэтому в интересующей нас области $(x\to x_0)$ имеет место соотношение (28,89) [см. А. А. Соколов, Вестн. МГУ, № 4, стр. 77 (1946); А. А. Соколов, Н. П. Клепиков и И. М. Тернов, ДАН СССР 89, 665 (1953)].

Отсюда легко получить следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} (I_{n-1,\,n'} - I_{n,\,n'-1})^2 &= \frac{4\varepsilon_1^2}{3\pi^2} K_{2/3}^2\left(\frac{\nu}{3}\varepsilon_1^{3/2}\right), \\ (I_{n-1,\,n'} + I_{n,\,n'-1})^2 &= \frac{4\varepsilon_1}{3\pi^2} K_{1/3}^2\left(\frac{\nu}{3}\varepsilon_1^{3/2}\right), \\ (I_{n,\,n'} - I_{n-1,\,n'-1})^2 &\cong 0. \end{aligned}\right\} \qquad (28,91)$$

Подставляя (28,91) в (28,87), мы найдем для вероятности перехода следующее выражение, которое положим в основу нашего дальнейшего расчета:

$$W_{nn'ss'} = \frac{e^2\beta^4 c\nu_1^2}{3\pi^2 R^2} \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta\, I_{ss'}^2(x) \left\{ \varepsilon^2 K_{2/3}^2\left(\frac{\nu_1}{3}\varepsilon^{3/2}\right) + \right.$$
$$\left. + \varepsilon\cos^2\theta K_{1/3}^2\left(\frac{\nu_1}{3}\varepsilon^{3/2}\right) \right\}, \qquad (28,92)$$

где

$$\nu_1 = \nu\left(1 + \frac{\nu}{2n}\right)^{3/2}, \qquad \varepsilon = 1 - \beta^2\sin^2\theta, \qquad x \cong \frac{\nu^2\beta^2\sin^2\theta}{4n}. \qquad (28,93)$$

Поскольку при интегрировании по углу θ функции $K_{2/3}^2$ и $K_{1/3}^2$ имеют острые максимумы при $\theta = \pi/2$, мы можем при вычислении выражения (28,92) положить

$$x = \frac{\nu^2}{4n} \qquad (28,94)$$

и вынести $I_{ss'}^2(x)$ за пределы интеграла.

Тогда при интегрировании по θ, используя соотношение (28,80), получим:

$$W_{nn'ss'} = W_{nn'ss'}\, d\nu = W^{\text{кл}} \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} I_{ss'}^2\left(\frac{\nu^2}{4n}\right) y\, dy \times$$
$$\times \left[\int_y^\infty K_{5/3}(\xi)\, d\xi - \frac{3}{2} y^2 \left(\frac{E}{m_0c^2}\right)^2 \frac{\hbar}{m_0cR} K_{5/3}(y) \right], \qquad (28,95)$$

где

$$W^{\text{кл}} = \frac{2}{3}\frac{e^2c}{R^2}\left(\frac{E}{m_0c^2}\right)^4$$

есть общая энергия излучения по классической теории,

$$y = \frac{2}{3}\frac{\omega}{\omega_\varphi}\left(\frac{m_0c^2}{E}\right)^3, \qquad \omega_\varphi = \frac{c}{R}, \qquad \frac{\omega}{\omega_\varphi} \cong \nu\left(1 + \frac{\nu}{4n}\right).$$

Появления наиболее сильных квантовых поправок следовало бы ожидать от наличия в формуле (28,95) множителя $I_{ss'}^2(x)$. В самом

деле, принимая во внимание, что

$$\nu \sim \left(\frac{E}{m_0c^2}\right)^3, \qquad n \cong \frac{E^2}{4\gamma} \cong \frac{ER}{c\hbar},$$

мы найдем:

$$x \cong \frac{\nu^2}{4n} \cong \left(\frac{E}{m_0c^2}\right)^5 \frac{\hbar}{m_0cR}.$$

Таким образом, при энергиях порядка нескольких сот *Мэв*, точнее при

$$E \sim E_{1/5} = m_0c^2\left(\frac{m_0cR}{\hbar}\right)^{1/5}, \tag{28,96}$$

величина x достигает порядка единицы.

Условие (28,96), полученное нами в одной из первых работ по квантовой теории «светящегося» электрона [1]), приводит к тому, что, начиная от энергий $E > E_{1/5}$, могут начать проявляться квантовые эффекты.

Рассмотрим конкретный случай, когда начальная орбита является круговой ($s = 0$). Тогда с помощью формулы (28,12) легко получить:

$$I^2_{0s'}(x) = \frac{x^{s'}}{s'!}e^{-x}. \tag{28,97}$$

Отсюда видно, что в классическом случае $\hbar \to 0\,(x \to 0)$ конечная орбита [см. также (28,60)] должна оставаться круговой ($s' = 0$), поскольку

$$\lim_{x\to 0} I^2_{0s'}(x) = \delta_{0s'}. \tag{28,98}$$

Однако, когда x становится порядка единицы ($E \sim E_{1/5}$), появляется вероятность переходов с изменением s'. Тем не менее изменение радиального квантового числа s' не скажется на полной интенсивности излучения, поскольку в общем случае можно показать [2]), что в результате суммирования по s':

$$\sum_{s'=0}^{\infty} I^2_{ss'}(x) = 1. \tag{28,99}$$

---

[1]) А. Соколов, ДАН СССР **67**, 1013 (1949); см. также Д. Иваненко и А. Соколов, Классическая теория поля, 1951, стр. 288.

[2]) Чтобы доказать соотношение (28,99), воспользуемся равенством

$$\sum_{s'=0}^{\infty} I_{ss'}(x)\,I_{s''s'}(x) = \sum_{s=0}^{\infty}\int\int \frac{d\xi\,d\eta\,e^{-x-\xi^2-\eta^2}}{\pi 2^{s'+\frac{1}{2}(s+s'')}s'!\sqrt{s!s''!}} \times$$

$$\times H_s\left(\xi-\sqrt{\frac{x}{2}}\right)H_{s'}\left(\xi+\sqrt{\frac{x}{2}}\right)H_{s''}\left(\eta-\sqrt{\frac{x}{2}}\right)H_{s'}\left(\eta+\sqrt{\frac{x}{2}}\right).$$

Равенство (28,99) особенно просто доказать для случая $s=0$ [см. (28.97)], хотя оно является абсолютно точным для любых значений s. Поэтому в результате суммирования по s' «большие» квантовые члены, пропорциональные множителю $I^2_{ss'}(x)$, в формуле (28,95) исчезают. В результате этого мы получаем:

$$W_{nn'}\,d\nu=\sum_{s'}W_{nn'ss'}\,d\nu=$$

$$=W^{\text{кл}}\frac{9\sqrt{3}}{8\pi}\,y\,dy\left[\int_y^\infty K_{5/3}(\xi)\,d\xi-\frac{3}{2}y^2\left(\frac{E}{m_0c^2}\right)^2\frac{\hbar}{m_0cR}K_{1/3}(y)\right]. \quad (28{,}100)$$

Второй член в квадратных скобках правой части равенства (28,100) представляет собою квантовую поправку (пропорциональную $\hbar$) к спектральной плотности излучения.

Для того чтобы определить полную интенсивность излучения, мы должны последнее выражение просуммировать по n' или проинтегрировать по y. Тогда мы получим:

$$W^{\text{кв}}=W^{\text{кл}}\left(1-\frac{55\sqrt{3}}{16}\frac{\hbar}{m_0cR}\left(\frac{E}{m_0c^2}\right)^2+\ldots\right). \quad (28{,}101)$$

Последняя формула была установлена для дираковских частиц в работе[1]), а для бесспиновых частиц — в работе[2]).

Следующий член разложения, пропорциональный $\hbar^2$, в скобках правой части равенства (28,101) будет иметь вид[3])

$$6\left[\frac{\hbar}{m_0cR}\left(\frac{E}{m_0c^2}\right)^2\right]^2 b^{(0,\,1/2)},$$

Учитывая далее соотношения:

$$\sum_{s'=0}^{\infty}\frac{1}{s'!\,2^{s'}\sqrt{\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\xi+\sqrt{\frac{x}{2}}\right)^2+\left(\eta+\sqrt{\frac{x}{2}}\right)^2\right]}H_{s'}\left(\xi+\sqrt{\frac{x}{2}}\right)\times$$

$$\times H_{s'}\left(\eta+\sqrt{\frac{x}{2}}\right)=\delta(\eta-\xi),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\frac{1}{\sqrt{s!s''!2^{s+s''}\pi}}e^{-\left(\xi-\sqrt{\frac{x}{2}}\right)^2}H_s\left(\xi-\sqrt{\frac{x}{2}}\right)H_{s''}\left(\xi-\sqrt{\frac{x}{2}}\right)=\delta_{ss''},$$

найдем:

$$\sum_{s'=0}^{\infty}I_{ss'}(x)\,I_{s''s'}(x)=\delta_{ss''},$$

откуда и следует соотношение (28,99).

[1]) А. А. Соколов, Н. П. Клепиков и И. М. Тернов, ЖЭТФ, **24**, 249 (1953).

[2]) J. Schwinger, Proc. Natl. Acad. Sci. **40**, 132 (1954).

[3]) А. А. Соколов, А. Н. Матвеев и И. М. Тернов, ДАН СССР **102**, 65 (1955); см. также А. Н. Матвеев, ЖЭТФ **31**, 479 (1956).

причем для бесспиновых частиц $b^{(0)} = 7$, а для дираковских частиц $b^{(1/2)} = 8$.

Таким образом, спиновые эффекты скажутся лишь в членах порядка $\hbar^2$. Этот результат связан с тем обстоятельством, что отношение интенсивностей излучения магнитного момента к излучению заряда определяется формулой

$$\frac{W_\mu}{W_e} \sim \left(\frac{\mu}{e}\frac{\omega_{\text{макс}}}{c}\right)^2 \sim \left[\frac{\hbar}{m_0cR}\left(\frac{E}{m_0c^2}\right)^2\right]^2.$$

Здесь мы учли, что магнитный момент электрона в ультрарелятивистском случае уменьшается по закону:

$$\mu = \frac{e\hbar}{2m_0c}\frac{m_0c^2}{E},$$

а $\omega_{\text{макс}} \sim \frac{c}{R}\left(\frac{E}{m_0c^2}\right)^3$ соответствует той частоте, при которой интенсивность достигает максимального значения.

Из формулы (28,101) видно, что квантовые эффекты в полной интенсивности излучения скажутся лишь при очень высоких энергиях

$$E \sim E_{1/2} = m_0c^2\left(\frac{m_0cR}{\hbar}\right)^{1/2}, \qquad (28,102)$$

которые в тысячи раз больше энергии $E_{1/3}$.

В области энергий $E \gg E_{1/2}$ квантовые эффекты начинают играть решающую роль. В этом случае вместо классического закона

$$W^{\text{кл}} = \frac{2}{3}\frac{e^2c}{R^2}\left(\frac{E}{m_0c^2}\right)^4$$

энергия будет меняться по формуле[1])

$$W^{\text{кв}} \approx \frac{32}{27}\frac{\Gamma(2/3)}{3^{4/3}}\frac{ce^2}{R^2}\left(\frac{Rm_0c}{\hbar}\right)^{4/3}\left(\frac{E}{m_0c^2}\right)^{4/3}.$$

Заметим, что эта формула может быть получена (с точностью до численного коэффициента порядка единицы) полуклассическим способом. Для этого мы должны в классической формуле, характеризующей спектральное распределение интенсивности излучения,

$$W_\nu d\nu = W^{\text{кл}}\frac{9\sqrt{3}}{8\pi}y\,dy\int_y^\infty K_{5/3}(\xi)\,d\xi,$$

ограничить верхний предел максимальной частотой излучения

$$\omega_{\text{макс}} = \frac{E}{\hbar},$$

которая следует из квантовой теории.

---

[1]) Н. П. Клепиков, ЖЭТФ 26, 19 (1954); А. А. Соколов и А. Н. Матвеев, ЖЭТФ 30, 126 (1956).

ж) Влияние квантовых флуктуаций на радиальные колебания. Как мы только что показали, в классическом приближении квантовое число s (т. е. адиабатический инвариант $2\pi\hbar s$) даже при учете излучения должно в случае постоянного и однородного магнитного поля оставаться постоянной величиной.

Согласно формуле (28,23) это означает, что квадрат амплитуды радиальных колебаний будет связан с магнитным полем H соотношением

$$a^2 H \frac{e\pi}{c} = 2\pi\hbar s. \qquad (28,103)$$

Если магнитное поле будет увеличиваться с течением времени по адиабатическому закону, то согласно адиабатическому принципу Эренфеста величина $2\pi\hbar s$ должна также оставаться постоянной, благодаря чему квадрат амплитуды радиальных колебаний будет уменьшаться по закону:

$$a^2 = \frac{H(0)}{H(t)} a_0^2, \qquad (28,104)$$

где a_0^2 и $H(0)$ — соответственно значения квадрата амплитуды колебаний и магнитного поля в начальный момент времени.

В квантовой области ($E > E_{1/2}$) в результате излучения фотонов квантовое число s начнет увеличиваться. Изменение s в единицу времени может быть найдено по следующей формуле:

$$\frac{ds}{dt} = \sum_{s',\,n'} (s' - s) \frac{W_{nn'ss'}}{\hbar\nu\omega_0}, \qquad (28,105)$$

где $W_{nn'ss'}/\hbar\nu\omega_0$ представляет собою вероятность перехода в единицу времени из состояния (n, s) в другое состояние (n', s').

Согласно формуле (28,95), если оставить только величины порядка $x \sim \nu^2/n$ и пренебречь величинами порядка

$$\nu/n \sim (\hbar/m_0 cR)\left(\frac{E}{m_0c^2}\right)^2,$$

мы будем иметь:

$$\frac{W_{nn'ss'}}{\hbar\nu\omega_0} = \frac{W^{\text{кл}}}{\hbar\nu\omega_0} \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} I_{ss'}^2 \left(\frac{\nu^2}{4n}\right) y\, dy \int_y^\infty K_{5/3}(\xi)\, d\xi. \qquad (28,106)$$

Учитывая соотношение

$$\sum_{s'} (s' - s) I_{ss'}^2 \left(\frac{\nu^2}{4n}\right) = \frac{\nu^2}{4n}, \qquad (28,107)$$

мы получим:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{9\sqrt{3}}{16\pi} \frac{e^2}{m_0cR^2} \left(\frac{E}{m_0c^2}\right)^6 \int_0^\infty y^2\, dy \int_y^\infty K_{5/3}(\xi)\, d\xi. \qquad (28,108)$$

Воспользуемся, далее, следующим результатом[1]):

$$\int_0^\infty y^2\,dy\int_y^\infty K_{5/3}(\xi)\,d\xi=\frac{1}{3}\int_0^\infty dy\,y^3K_{5/3}(y)=\frac{55}{2\cdot 3^4}\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)=\frac{55\pi}{81}. \tag{28,109}$$

Тогда мы найдем:

$$s=\frac{55}{48\sqrt{3}}\int_0^t\frac{e^2}{m_0cR^2}\left(\frac{E(t')}{m_0c^2}\right)^6dt'. \tag{28,110}$$

Принимая во внимание соотношение (28,103), получаем следующий закон изменения квадрата амплитуды радиальных колебаний с учетом квантовых флуктуаций:

$$a^2=a_0^2\frac{H(0)}{H(t)}+\frac{55}{24\sqrt{3}}\frac{e^2\hbar R}{m_0E(t)}\int_0^t\left(\frac{E(t')}{m_0c^2}\right)^6\frac{dt'}{R^2}. \tag{28,111}$$

Этот результат можно обобщить на случай неоднородного ($H=\mathrm{const}/r^q$) магнитного поля[2]) при свободном движении электронов, т. е. при отсутствии тангенциального ускоряющего поля. В этом случае радиальные колебания будут совершаться вокруг радиуса R мгновенной равновесной орбиты, величина которого в ультрарелятивистском случае определяется энергией электрона E:

$$E=eH(R)R. \tag{28,112}$$

Тогда радиальные ($x=r-R$) и аксиальные (z) колебания зададутся уравнениями[3]):

$$\left.\begin{aligned} x&=a\cos\left(\sqrt{1-q}\,\frac{c}{R}\,t\right),\\ z&=b\cos\left(\sqrt{q}\,\frac{c}{R}\,t\right).\end{aligned}\right\} \tag{28,113}$$

Отсюда с помощью квантования адиабатических инвариантов:

$$\left.\begin{aligned}\oint p_r\,dx&=\oint\frac{E}{c^2}\dot{x}^2\,dt=2\pi\hbar s,\\ \oint p_z\,dz&=\oint\frac{E}{c^2}\dot{z}^2\,dt=2\pi\hbar k,\end{aligned}\right\} \tag{28,114}$$

мы найдем:

$$a^2=\frac{2c\hbar s}{eH(R)\sqrt{1-q}},\qquad b^2=\frac{2c\hbar k}{eH(R)\sqrt{q}}, \tag{28,115}$$

---

[1]) Этот результат легко может быть получен с помощью формулы (48,8) в «Классической теории поля».

[2]) А. А. Соколов и И. М. Тернов, ЖЭТФ 28, 431 (1955); А. А. Соколов, И. М. Тернов и Г. М. Страховский, ЖЭТФ 31, 439 (1956).

[3]) Эти по существу классические уравнения будут получены в следующем пункте.

где квантовые числа s, $k=0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ при решении волнового уравнения появляются совершенно автоматически.

С помощью квантовой теории было установлено, что при учете излучения в случае $E < E_{1/2}$ адиабатические инварианты, пропорциональные a^2H и b^2H, должны оставаться для свободного движения электрона в циклическом ускорителе неизменными величинами, а при медленном (адиабатическом) возрастании H амплитуды колебаний должны уменьшаться обратно пропорционально $\sqrt{H}$.

з) Квазиклассический учет квантовых эффектов при исследовании бетатронных и синхротронных колебаний[1]. Для того чтобы дать наглядную интерпретацию квантовым эффектам, построим соответствующую квазиклассическую теорию светящегося электрона, т. е. введем в классические уравнения движения электрона дополнительную флуктуационную силу. При этом необходимо ввести эту флуктуационную силу правильно, т. е. подобрать ее таким образом, чтобы получить совпадение с результатами квантовой теории. Это важно, поскольку при проведении ряда расчетов с правильно введенной флуктуационной силой не обязательно использовать аппарат квантовой механики.

Как известно, классические уравнения, описывающие движение релятивистского электрона в циклическом ускорителе с учетом излучения, имеют вид[2]:

$$\frac{E}{c^2}\ddot{z}+\frac{\dot{E}}{c^2}\dot{z}-\frac{er\dot{\varphi}}{c}H_r=-\frac{\dot{z}}{c^2}W^{\text{кл}}, \tag{28,116}$$

$$\frac{E}{c^2}\ddot{r}+\frac{\dot{E}}{c^2}\dot{r}-\frac{E}{c^2}r\dot{\varphi}^2+\frac{er\dot{\varphi}}{c}H_z=-\frac{\dot{r}}{c^2}W^{\text{кл}}, \tag{28,117}$$

$$\dot{E}=\dot{E}^{\text{вн}}-W^{\text{кл}}, \tag{28,118}$$

где $r=\sqrt{x^2+y^2}$, z, $\varphi=\arccos\frac{x}{r}$ — цилиндрические координаты, а $\dot{E}^{\text{вн}}$ — энергия, получаемая в единицу времени электроном от ускоряющего устройства.

Пусть составляющая магнитного поля по оси z изменяется по закону $(0<q<1)$:

$$H_z=Br^{-q}. \tag{28,119}$$

Тогда другая составляющая H_r может быть найдена из условия

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H}=0, \tag{28,120}$$

---

[1] А. А. Соколов и И. М. Тернов, ДАН СССР 117, 967 (1957).

[2] В дополнение к классическим уравнениям движения релятивистского электрона в циклических ускорителях (см., например, М. Ливингстон, Ускорители, ИЛ, 1956, стр. 26 и 37) в нашем случае учтена еще сила радиационного трения $F^{\text{рад}}=-\frac{v}{c^2}W^{\text{кл}}$.

или

$$\frac{\partial H_z}{\partial r} = \frac{\partial H_r}{\partial z}, \qquad (28,121)$$

откуда мы находим:

$$H_r = -qBzr^{-q-1}. \qquad (28,122)$$

Для того чтобы получить выражение излучаемой энергии в единицу времени при $q \neq 0$, мы должны в соответствующее выражение, найденное нами для $q = 0$ [см. (28,78)], вместо истинного радиуса R подставить радиус кривизны ρ:

$$R \to \rho. \qquad (28,123)$$

В этом случае

$$W^{\text{кл}} = \frac{2}{3}\frac{e^2 c}{\rho^2}\left(\frac{E}{m_0 c^2}\right)^4 = \frac{R^2}{\rho^2}\overline{W}, \qquad (28,123\text{а})$$

где средняя излучаемая энергия $\overline{W}$ не зависит от координаты x бетатронных колебаний.

Уравнения (28,116) и (28,117) описывают быстрые бетатронные колебания вокруг мгновенной равновесной орбиты ($z = 0$, $r = R$). Радиус мгновенной равновесной орбиты R, а также его связь с радиусом кривизны ρ могут быть установлены из равенства

$$E = eBR^{1-q} = eBr^{-q}\rho. \qquad (28,123\text{б})$$

Отсюда мы (в линейном приближении) находим:

$$\rho = R + q(r - R) = R + qx. \qquad (28,123\text{в})$$

Подставляя в уравнения (28,116) и (28,117) значение для $\dot{\varphi} \cong c/r$ [1]) и ограничиваясь лишь линейными членами, мы, принимая во внимание (28,119) и (28,122), найдем:

$$\ddot{z} + \gamma\dot{z} + \omega_z^2 z = -\Gamma_z \dot{z}, \qquad (28,124)$$

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_r^2 x = -\Gamma_z \dot{x} - \ddot{R} - \frac{x\dot{R}}{R}, \qquad (28,125)$$

где $\omega_z = \sqrt{q}\frac{c}{R}$ и $\omega_r = \sqrt{1-q}\frac{c}{R}$ — угловые частоты радиальных и аксиальных колебаний и $\Gamma_z = \overline{W}/E$ — «большой» коэффициент затухания аксиальных колебаний, значительно превышающий адиабатический коэффициент затухания

$$\gamma = \dot{E}/E \ll \Gamma_z.$$

Для определения «большого» коэффициента затухания радиальных колебаний мы должны знать еще колебания мгновенной равно-

[1]) В левой части уравнения (28,117) следует учитывать еще разложение угловой скорости: $\dot{\varphi} \cong \frac{c}{r}\sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2}} \cong \frac{c}{R}\left(1 - \frac{x}{R} - \frac{\dot{x}\dot{R}}{c^2}\right)$.

весной орбиты, т. е. величину $\ddot{R}+\frac{\dot{x}\dot{R}}{R}$. Колебания мгновенной равновесной орбиты могут быть найдены из равенства (28,118). Для этого следует задать выражение для энергии $\dot{E}^{\text{вн}}$.

Как известно, в простейшем случае эта энергия может быть представлена в виде

$$\dot{E}^{\text{вн}}=\frac{cV_0}{2\pi r}\sin(\varphi-\omega_0 t), \tag{28,125а}$$

где V_0/e^- — амплитуда потенциала на ускоряющем промежутке, а ω_0 — круговая частота высокочастотного поля.

Для дальнейших вычислений фазу φ разобьем на две части:

$$\varphi=(\omega_0 t+\varphi_0)+\psi. \tag{28,125б}$$

Часть $\omega_0 t+\varphi_0$ будет характеризовать равномерное вращение электрона, причем постоянная φ_0 представляет собою фазу прохождения электроном ускоряющего промежутка (точка равновесной фазы) и подбирается таким образом, чтобы другая часть фазы ψ содержала только колебательное движение вокруг точки $\omega_0 t+\varphi_0$.

Ограничиваясь линейной теорией фазовых колебаний, мы будем иметь вместо (28,125а):

$$\dot{E}^{\text{вн}}=\frac{cV_0}{2\pi r}(\sin\varphi_0+\psi\cos\varphi_0). \tag{28,125в}$$

Учитывая последнее соотношение, мы можем равенство (28,118) представить в виде

$$r\dot{E}=\frac{V_0 c}{2\pi}(\sin\varphi_0+\psi\cos\varphi_0)-rW^{\text{кл}}. \tag{28,126}$$

Из равенства (28,123б) следует:

$$R\dot{E}=(1-q)E\dot{R},$$

и поэтому выражение (28,126) может быть записано следующим образом:

$$\ddot{R}+\frac{\dot{x}\dot{R}}{R}=\frac{V_0 c(\sin\varphi_0+\psi\cos\varphi_0)}{2\pi(1-q)E}-\frac{rW^{\text{кл}}}{(1-q)E}. \tag{28,127}$$

Принимая во внимание еще соотношения (28,123а) и (28,123в), мы найдем, учитывая, что $x\ll R$, $\dot{x}\gg\dot{R}$, и пренебрегая воздействием синхротронных колебаний:

$$\ddot{R}+\frac{\dot{x}\dot{R}}{R}=-\frac{1-2q}{1-q}\frac{\overline{W}}{E}\dot{x}.$$

Отсюда уравнение (28,125) для радиальных бетатронных колебаний (по классической теории) принимает вид:

$$\ddot{x}+\gamma\dot{x}+\omega_r^2 x=-\Gamma_r\dot{x}, \tag{28,128}$$

где «большой» коэффициент затухания для радиальных колебаний равен[1])

$$\Gamma_r = \Gamma_z\left(1 - \frac{1-2q}{1-q}\right) = \frac{q}{1-q}\Gamma_z. \tag{28,128a}$$

С помощью формулы (28,127) мы можем также получить уравнение для фазовых синхротронных колебаний. Прежде всего заметим, что любые фазовые колебания автоматически вызывают соответствующие радиальные колебания, и наоборот (кстати заметим, что фазовые бетатронные колебания малы, и ими можно пренебречь). В частности, радиальные синхротронные колебания представляют собой колебания мгновенной равновесной орбиты R вокруг равновесной орбиты $R_0 (X = R - R_0)$, зависящей от круговой частоты ω_0 высокочастотного поля ($R_0 = c/\omega_0$).

Из условия, что скорость электрона в ультрарелятивистском случае равна скорости света, находим связь между синхротронными ($x = 0$) радиальными и фазовыми колебаниями:

$$c = R\dot{\varphi} = (R_0 + X)(\omega_0 + \dot{\psi}),$$

откуда

$$X = -\frac{R_0^2}{c}\dot{\psi}. \tag{28,129}$$

Полагая в формуле (28,127) $x = 0$ (т. е. пренебрегая влиянием бетатронных колебаний на синхротронные) и принимая во внимание (28,129), мы найдем в линейном приближении:

$$\ddot{\psi} + \Gamma\dot{\psi} + \Omega^2\psi = -\frac{c^2}{R_0^2}\frac{V_0 \sin\varphi_0}{2\pi(1-q)E_0} + \frac{cW_0}{(1-q)E_0R_0}, \tag{28,130}$$

где $\Gamma = \frac{3-4q}{1-q}\frac{W_0}{E_0}$ — «большой» коэффициент затухания синхротронных колебаний, $\Omega^2 = \frac{c^2}{R_0^2}\frac{V_0\cos\varphi_0}{2\pi(1-q)E_0}$ — квадрат частоты медленных синхротронных колебаний. Кроме того, при выводе последнего соотношения мы приняли во внимание, что:

$$\overline{W} = \left(\frac{R}{R_0}\right)^{2-4q} W_0 = \left(1 - (2-4q)\frac{R_0\dot{\psi}}{c}\right) W_0,$$

а величины:

$$W_0 = \frac{2}{3}\frac{e^2c}{R_0^2}\left(\frac{E_0}{m_0c^2}\right)^4, \quad E_0 = BR_0^{1-q}$$

не зависят от координат бетатронных и синхротронных колебаний.

---

[1]) Этот результат не затрагивает случая постоянного и однородного магнитного поля, рассмотренного нами в § 28, п. е) и ж), так как при $q = 0$ коэффициент затухания $\Gamma_r = 0$.

Пока что постоянная фаза φ_0 у нас оставалась величиной неопределенной. Из уравнения (28,130) мы можем ее найти, потребовав, чтобы постоянный коэффициент обратился в нуль [в самом деле, согласно условию (28,125б) переменная ψ должна содержать лишь колебательную часть]. Отсюда находим значение для точки равновесной фазы φ_0:

$$\frac{V_0 \sin \varphi_0}{2\pi} = \frac{R_0 W_0}{c}. \tag{28,131}$$

Последнее соотношение означает, что потери энергии в среднем компенсируются ускоряющим устройством благодаря автоматическому смещению (при адиабатическом увеличении энергии) точки φ_0.

Тогда уравнение для фазовых колебаний принимает вид

$$\ddot{\psi} + \Gamma\dot{\psi} + \Omega^2\psi = 0. \tag{28,132}$$

«Большой» коэффициент затухания Γ для синхротронных колебаний был известен давно. Значения же «больших» коэффициентов затухания бетатронных колебаний [Γ_z и Γ_r, см. (28,124) и (28,128а)] по классической теории были получены совсем недавно Коломенским и Лебедевым[1]) и Ливингстоном[2]). В частности, как было указано Ливингстоном, для ускорителей с жесткой фокусировкой ($|q| \gg 1$) коэффициент затухания Γ_r радиальных бетатронных колебаний становится отрицательной величиной, и поэтому при $|q| > 1$ излучение должно приводить не к затуханию, а к возбуждению колебаний («антидемпинг»-эффект).

Эти значения для коэффициента затухания бетатронных колебаний были получены в предположении, что сила радиационного трения $\left(F^{\text{рад}} = -\frac{v}{c^2} W^{\text{кл}}\right)$ действует на движущийся электрон непрерывно, т. е. по адиабатическому закону. Однако, особенно в приближении $E < E_{1/5}$ следует учитывать дискретный (т. е. неадиабатический) характер излучения.

В самом деле, принимая во внимание, что энергия излучаемого фотона имеет порядок $\varepsilon \sim \frac{\hbar c}{R}\left(\frac{E}{m_0c^2}\right)^3$, а интенсивность излучения на один оборот равна $W^{\text{обор}} \sim \frac{R}{c} W^{\text{кл}}$, мы найдем для числа излучаемых на один оборот фотонов следующее выражение:

$$N^{\text{обор}} \sim \frac{W^{\text{обор}}}{\varepsilon} \sim \alpha \frac{E}{m_0c^2}. \tag{28,133}$$

---

[1]) А. А. Коломенский и А. Н. Лебедев, CERN Symposium, vol. I, Geneva, июнь 1956, стр. 447. В более ранних работах (см. ЖЭТФ **30**, 207 (1957), а также тезисы докладов на Всесоюзной конференции по физике частиц высоких энергий, Москва, май 1956, стр. 164) они давали для коэффициента затухания другое значение: $\Gamma_r = \overline{W}/E$.

[2]) M. S. Livingston, CERN Symposium, vol. I, Geneva, 1956, стр. 439.

Отсюда видно, что если энергия электрона будет иметь порядок 100 *Мэв* (неквантовый случай), то на один оборот будут излучаться лишь единичные фотоны.

Прежде всего заметим, что строгой классической теории движения электронов, учитывающей неадиабатический характер излучения, не существует. Поэтому в классические уравнения мы введем особую флуктуационную силу, которую подберем таким образом, чтобы в согласии с квантовой теорией в момент излучения фотона с энергией $\varepsilon = \hbar\omega$ электрон получал импульс $-v\varepsilon/c^2$, что при сравнительно низких энергиях ($E \sim E_{1/5}$) должно начать сказываться на бетатронных колебаниях. С другой стороны, работа квантовой флуктуационной силы в среднем должна быть равна нулю, поскольку квантовые поправки могут начать оказывать влияние на энергию электрона [см. (28,102)] лишь при очень высоких энергиях ($E \sim E_{1/2}$). Исходя из этих соображений, мы положим:

$$F^{\text{фл}} = -\frac{v}{c^2}\left(\sum_i \hbar\omega(t_i)\,\delta(t-t_i) - W^{\text{кл}}\right). \tag{28,134}$$

Чтобы определить энергию излученного кванта $\hbar\omega$, мы воспользуемся выражением для энергии электрона в квантовом случае [см. (28,11)]

$$E_n = \sqrt{m_0^2c^4 + 2eHc\hbar n}\,.$$

Тогда

$$\hbar\omega = \frac{\partial E_n}{\partial n}\nu = \hbar\frac{c}{\rho}\nu, \tag{28,135}$$

где $\nu = n - n'$ — номер излучаемой гармоники. Формула (28,135) написана для случая $q \neq 0$, и поэтому мы должны были при переходе от $q = 0$ к $q \neq 0$ вместо истинного радиуса R подставить радиус кривизны ρ. Вводя величину

$$\hbar\overline{\omega} = \hbar\frac{c}{R}\nu,$$

не зависящую от координаты x, мы будем иметь:

$$\hbar\omega = \frac{R}{\rho}\hbar\overline{\omega} = \hbar\overline{\omega}\left(1 - q\frac{x}{R}\right). \tag{28,136}$$

Аналогичным путем для вероятности излучения ν-й гармоники мы согласно (28,106) имеем в классическом случае следующее выражение:

$$w(\nu, t_i) = \frac{R}{\rho}\overline{w}(\nu, t_i) = \left(1 - q\frac{x}{R}\right)\overline{w}(\nu, t_i), \tag{28,137}$$

где среднее значение для вероятности перехода, не зависящее от x, равно:

$$\overline{w}(\nu, t_i) = \frac{\alpha}{\pi\sqrt{3}}\frac{c}{R}\left(\frac{m_0c^2}{E}\right)^2 \int\limits_{{}^2/_3\nu(m_0c^2/E)^3}^{\infty} K_{5/3}(\xi)\,d\xi. \tag{28,137a}$$

Учитывая флуктуационную силу, мы найдем, что в правых частях равенств (28,116), (28,117) и (28,118) мы должны сделать следующую замену (вариант А):

$$W^{\text{кл}} \to \sum_i \hbar \frac{c}{R}\left(1 - q\frac{x}{R}\right)\nu\delta(t - t_i). \tag{28,138}$$

Тогда классические уравнения (28,124), (28,125) и (28,127), описывающие как бетатронные, так и синхротронные колебания, примут вид:

$$\ddot{z} + \gamma\dot{z} + \omega_z^2 z = -\sum_i \frac{\dot{z}}{E}\hbar\bar{\omega}\delta(t - t_i), \tag{28,139}$$

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_r^2 x = -\sum_i \frac{\dot{x}}{E}\hbar\bar{\omega}\delta(t - t_i) - \ddot{R} - \frac{\dot{x}\dot{R}}{R}, \tag{28,140}$$

$$\dot{R} + \frac{x\dot{R}}{R} = \frac{V_0 c}{2\pi(1-q)E}(\sin\varphi_0 + \psi\cos\varphi_0) - \\ - \frac{R}{(1-q)E}\sum_i \hbar\bar{\omega}\left(1 + (1-q)\frac{x}{R}\right)\delta(t - t_i). \qquad (28,141)^{1)}$$

Подставив (28,141) в формулу (28,140) и отбросив члены, пропорциональные ψ, мы найдем для описания радиальных бетатронных колебаний следующее выражение [2]):

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_r^2 x = \frac{R}{E(1-q)}\frac{d}{dt}\sum_i \hbar\bar{\omega}_i\delta(t - t_i). \tag{28,142}$$

Появление флуктуационных сил в правых частях последних равенств может найти следующее простое объяснение. Излучение кванта

---

[1]) Это равенство получается из закона сохранения энергии. При наличии флуктуационных сил для закона сохранения энергии вместо (28,118) имеем:

$$\dot{E} = \frac{V_0 c}{2\pi r}(\sin\varphi_0 + \psi\cos\varphi_0) - \sum_i \frac{\hbar c}{\rho}\nu\delta(t - t_i). \tag{28,141a}$$

[2]) Легко показать, что уравнения бетатронных колебаний (28,139) и (28,142) точно переходят в соответствующие уравнения классической теории (28,124) и (28,128), если предположить, что излучение происходит непрерывно. В самом деле, при этом переходе мы должны суммирование по i заменить интегрированием по dt_i, умножив предварительно подынтегральное выражение на вероятиость перехода $w(\nu, t_i)$ в единицу времени. Тогда, учитывая (28,137), находим предельное значеиие для флуктуационюй силы аксиальных колебаний (см. 28,139):

$$\lim_{\Delta t_i = t_{i+1} - t_i \to 0} \sum_i \frac{\dot{z}}{E}\hbar\bar{\omega}\delta(t - t_i) = \\ = \frac{\dot{z}}{E}\int_0^\infty d\nu \int_0^\infty \hbar\bar{\omega}\bar{w}(\nu, t_i)\,\delta(t - t_i)\,dt_i = \Gamma_z\dot{z}.$$

Аналогичным путем для флуктуационной силы радиальных колебаний

незапно изменяет положение мгновенной равновесной орбиты на величину ΔR_i, внезапное же изменение координаты может быть описано с помощью введения дельта-образной силы вида $F_r = \sum_i \Delta R_i \dot{\delta}(t - t_i)$. Точно так же излучение кванта изменяет проекцию импульса по оси z на величину Δp_{zi}, что эквивалентно введению мгновенной силы $F_z = \sum \Delta p_{zi}\delta(t - t_i)$ (более подробно об этом см. [1])).

Для того чтобы проинтегрировать уравнение (28,142), запишем δ-функцию в виде

$$\delta(t - t_i) = \frac{1}{2\pi}\int e^{ik(t-t_i)}\,dk.$$

Тогда для координаты x мы находим значение

$$x = x^{\text{кл}} + x^{\text{кв}} = \\ = a_0 e^{-\gamma t/2}\cos\omega_r t + \frac{R}{E(1-q)}\sum_{t_i<t} \hbar\bar{\omega}_i e^{-\gamma(t-t_i)/2}\cos\omega_r(t - t_i), \tag{28,143}$$

где a_0 — начальная амплитуда колебаний. При этом мы воспользовались правилом деления показательной функции на оператор, а также учли значение интеграла:

$$\frac{1}{2\pi}\int dk \frac{e^{ik(t-t_i)}}{\omega_r^2 - k^2 + ik\gamma} = \begin{cases} \omega_r^{-1} e^{-\gamma(t-t_i)/2}\sin\omega_r(t - t_i) & \text{при } t > t_i, \\ 0 & \text{при } t < t_i. \end{cases} \tag{28,144}$$

[см. (28,142)] получаем:

$$\lim \frac{R}{E(1-q)}\frac{d}{dt}\sum_i \hbar\bar{\omega}\delta(t - t_i) = \\ = \frac{R}{E(1-q)}\frac{d}{dt}\int_0^\infty d\nu \int_0^\infty \hbar\bar{\omega}\,\bar{w}(\nu, t_i)\left(1 - \frac{qx(t_i)}{R}\right)\delta(t - t_i)\,dt_i = -\Gamma_r \dot{x}.$$

Таким образом, «большие» коэффициенты затухания в классических уравнениях (28,124) и (28,128) представляют собою не что иное, как предельное значение для флуктуационных сил.

Заметим, что в случае варианта А энергия флуктуационного излучения [см. (28,135)] обратно пропорциональна ρ, а не ρ^2, как в классическом случае. Этим обстоятельством мы воспользовались при выводе формулы (28,141). Однако при переходе к непрерывному излучению благодаря тому, что вероятность перехода (28,137) также обратно пропорциональна ρ, мы вновь получаем классическую формулу

$$\lim_{\Delta t_i \to 0}\sum_i \hbar\omega\delta(t - t_i) = \int_0^\infty d\nu \int_0^\infty \frac{R}{\rho}\hbar\bar{\omega}\frac{R}{\rho}\bar{w}(\nu, t_i)\,\delta(t - t_i)\,dt_i = \left(\frac{R}{\rho}\right)^2 \overline{W}.$$

1) А. А. Соколов, Дельта-функция и ее применение к решению некоторых задач геофизики, Свердловск, 1946, стр. 13.

При вычислении квадратичной функции мы должны принять во внимание, что фотоны излучаются статистически независимо, и поэтому в среднем

$$\overline{\cos\omega_r(t-t_i)\cos\omega_r(t-t_{i'})}=\frac{1}{2}\delta_{ii'}.$$

Это условие невозможно получить с помощью классической теории. и его приходится так же, как и квантовую флуктуационную силу, вводить, как некий дополнительный постулат, учитывающий квантовый характер излучения.

Тогда квадрат амплитуды радиальных колебаний может быть вычислен по формуле

$$a^2=2\overline{x^2}=a_0^2e^{-\gamma t}+\int_0^t\int_0^\infty d\nu\left(x^{\text{кв}}\right)^2\overline{w}(\nu,t_i)\,dt_i, \qquad (28{,}145)$$

причем

$$\overline{x}\sim\frac{1}{T}\sum_i\int_{t_i}^T\cos\omega(t-t_i)\,dt=0, \quad \text{когда} \quad \omega T\gg 1.$$

Если учесть, что γ является медленно меняющейся функцией времени, то в последнем выражении следует сделать замену: $\gamma t\to$ $\to\int_0^t\gamma(t')\,dt'$. Тогда, воспользовавшись равенством (28,109), находим:

$$a_{\text{кв}}^2=\frac{55}{24\sqrt{3}}\frac{1}{(1-q)^2}\frac{e^2}{m_0c}\frac{\hbar}{m_0cR}\int_0^t\exp\left\{-\int_{t'}^t\gamma(t'')\,dt''\right\}\left(\frac{E(t')}{m_0c^2}\right)^5dt'. \qquad (28{,}146)$$

Эта формула представляет собою основу теории колебаний электронов в циклическом ускорителе с учетом квантовых эффектов, и ее можно использовать при любом значении коэффициента затухания γ.

Если предположить, что затухание происходит лишь по адиабатическому закону $\gamma=\dot{E}/E$, то, принимая во внимание, что

$$\exp\left\{-\int_{t'}^t\gamma(t'')\,dt''\right\}=\frac{E(t')}{E(t)}, \qquad (28{,}147)$$

мы найдем с помощью (28,146) формулу, совпадающую хотя бы в частном случае свободного движения ($V_0=0$) с соответствующей квантовой формулой (28,111) (вариант А):

$$a^2=a_0^2\frac{E(0)}{E(t)}+\frac{55}{24\sqrt{3}}\frac{e^2\hbar}{(1-q)^2RE(t)}\int_0^t\left(\frac{E(t')}{m_0c^2}\right)^6dt'. \qquad (28{,}147\text{a})$$

Точно так же с помощью уравнения (28,143) мы находим для квадрата амплитуды аксиальных колебаний следующее выражение [1]):

$$\dot{b}^2 = b_0^2 e^{-\int_0^t \gamma(t')\,dt'} + \frac{13}{24\sqrt{3}}\frac{1}{q}\frac{e^2}{m_0 c}\frac{\hbar}{m_0 cR}\int_0^t e^{-\int_{t'}^t \gamma(t'')\,dt''}\left(\frac{E(t')}{m_0c^2}\right)^3 dt', \tag{28,147б}$$

которое в случае адиабатического затухания, так же как и равенство (28,146), можно упростить с помощью формулы (28,147). Однако квантовые поправки к квадрату амплитуды аксиальных колебаний будут в $(E/m_0c^2)^2$ раз меньше, чем для радиальных колебаний. При выводе формулы (28,147б) следует учесть, что

$$b^2 = 2\overline{z^2}, \quad \text{а} \quad \overline{z} \sim \frac{1}{T}\sum_i a_i \int_{t_i}^T \sin\omega(t-t_i)\,dt = \frac{1}{\omega T}\sum a_i = 0,$$

поскольку величина $a_i = \cos\theta_i$ является знакопеременной.

Наконец, при вычислении среднего изменения энергии мы должны произвести усреднение величин по формуле

$$\overline{E} = \frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} E\,dt,$$

где интервал Δt должен быть выбран таким образом, чтобы он был велик по сравнению с промежутком времени между двумя последовательными актами излучения и мал по сравнению с периодом синхротронных колебаний. Тогда уравнение (28,141а), характеризующее изменение энергии со временем, примет вид [2])

$$\frac{d\overline{E}}{dt} = \frac{d\overline{E}^{\text{вн}}}{dt} - \overline{W}.$$

---

[1]) При интегрировании уравнения (28,139) следует в правую часть вместо $\dot{z}$ подставить $c\cos\theta$.

[2]) Если для синхротронных колебаний не производить усреднения по времени t, то тогда вместо классического выражения (28,132) для определения фазы мы будем иметь уравнение

$$\ddot{\varphi} + \Omega^2\varphi = -\frac{c}{E_0R_0^2(1-q)}\left(\frac{V_0 c\sin\varphi_0}{2\pi} - R\sum_i \hbar\overline{\omega}\delta(t-t_i)\right).$$

Это уравнение мы должны либо усреднить по времени, и тогда для синхротронных колебаний будем иметь классическое уравнение без флуктуационной силы, но с членом затухания, либо оставить флуктуационную силу, пропорциональную $\delta(t-t_i)$, возникающую за счет затухания, и положить коэффициент затухания $\Gamma = 0$ (вариант А).

Последняя формула совпадает с классическим выражением (28,118). При выводе этого соотношения мы учли, что при усреднении по флуктуационным силам имеет место равенство

$$\frac{1}{\Delta t}\int\limits_{t}^{t+\Delta t}\sum_{i}\hbar\omega_i\delta(t-t_i)\,dt=\overline{W}.$$

Таким образом, квантовые флуктуации не должны оказывать влияния на среднее изменение энергии. Это находится в полном соответствии с выводами квантовой теории, согласно которой квантовые эффекты должны сказываться на изменении полной энергии электрона лишь в области очень больших энергий ($E\sim E_{1/2}$).

Поскольку уравнение для синхротронных фазовых колебаний получается из закона изменения энергии, на которую квантовые эффекты практически не влияют, то поэтому вряд ли квантовые эффекты будут сказываться и на фазовых колебаниях. Если это так, то для их описания мы можем воспользоваться вновь уравнением (28,132), заменив лишь фазу ψ ее средним значением.

В самом деле, за один период бетатронных колебаний при $E<E_{1/5}$ должно излучаться единичное число фотонов, т. е. должен иметь место даже в классическом приближении явно неадиабатический процесс. За один же период синхротронных колебаний излучается много фотонов, и поэтому их действие на синхротронные колебания в согласии с классической теорией можно считать непрерывным [1]).

Вопрос о введении квантовых флуктуационных сил при сравнительно низких энергиях ($E\sim E_{1/5}$) [2]) не вызывает каких-либо возражений. Дискуссионным является лишь вопрос о величине коэффициента затухания бетатронных колебаний.

Так, например, Коломенский (l. с.), Ливингстон (l. с.) и Генри [3]) считают, что в решении (28,146) вместо коэффициента γ следует

---

[1]) Согласно варианту А, при очень больших энергиях $E>E_{1/5}$ действие флуктуаций на бетатронные колебания может постепенно начать переходить из статистически независимого в полукогерентное. Однако, возможно, статистическая независимость все же сохранится, так как согласно квантовой теории при $E\gg E_{1/5}$ положение электрона около мгновенной равновесной орбиты ($x=r-R$) становится неопределенным. Заметим, что наши формулы пригодны для сравнительно низких энергий, поскольку при исследовании бетатронных колебаний мы ограничены условием $s/l=(x^{\text{кв}})^2/R_0^2\ll 1$. Кроме того, мы пренебрегли влиянием бетатронных колебаний на синхротронные, что имеет место, когда $\Omega\ll\omega_r$.

[2]) А. А. Соколов и И. М. Тернов, ЖЭТФ **25**, 698 (1953); ДАН СССР 97, 823 (1954) [см. более подробно ЖЭТФ 28, 431 (1955)].

[3]) I. Henry, Phys. Rev. **106**, 1057 (1957).

подставить его классическое значение (28,128а) ($\gamma = \Gamma_r$). В этом случае (вариант Б) квантовая формула

$$a_{кв}^2 \cong \frac{55}{24\sqrt{3}} \frac{1}{(1-q)^2} \frac{e^2}{m_0 c} \frac{\hbar}{m_0 c R} \left(\frac{E}{m_0 c^2}\right)^5 t \qquad (28,148)$$

будет иметь место лишь для сравнительно малых значений времени $t < 1/\Gamma_r$. При больших же значениях времени $t > 1/\Gamma_r$ выражение (28,146) будет стремиться к следующему предельному значению:

$$a_{кв}^2 \cong \frac{55}{24\sqrt{3}} \frac{1}{(1-q)^2} \frac{e^2}{m_0 c} \frac{\hbar}{m_0 c R} \left(\frac{E}{m_0 c^2}\right)^5 t_{пред}, \qquad (28,149)$$

где $t_{пред} = 1/\Gamma_r$.

Сандс[1]) считает, что квантовые эффекты должны оказывать сильное влияние и на синхротронные колебания. Для их описания он воспользовался нашим решением (28,146), подставив в него лишь новое значение для $\gamma = \Gamma$ (от частоты Ω это выражение не зависит). По теории Сандса для описания синхротронных колебаний также должна иметь место формула (28,148), если $t < 1/\Gamma$, которая при $t > 1/\Gamma$ будет стремиться к предельной формуле (28,149), если в последней положить $t_{пред} = 1/\Gamma$. Особенно сильное влияние квантовые флуктуации в этой теории (вариант Б) должны оказывать на фазовые колебания, поскольку

$$\psi_{кв}^2 = \frac{\omega_r^2}{\Omega^2} \frac{a_{кв}^2}{R^2} = \frac{55\sqrt{3}}{(3-4q)\,2^6} \frac{\hbar c}{e^2} \frac{m_0 c^2}{E} \operatorname{tg} \varphi_0.$$

Эта новая область применения квантовой теории к макроскопическим объектам, которая находится еще в зачаточном состоянии, бесспорно должна иметь большое научное и практическое значение. Квантовые эффекты уже обнаружены экспериментально, а именно, на электронном синхротроне Калифорнийского технологического института было установлено, что в области энергий порядка 1 *Бэв* пучок начинает расширяться в радиальном направлении и сжиматься в аксиальном (см. цитированную работу Генри).

Поскольку количественные данные в экспериментах еще не получены, мы сочли целесообразным привести различные теоретические соображения по данному вопросу. Во всяком случае, с открытием квантовых эффектов не только теория относительности, но и релятивистская квантовая механика завоевывают новые инженерные области применения.

и) Соотношение неопределенностей и теория флуктуаций. Теория радиальных колебаний с учетом флуктуационных сил [см. § 23, п. з.)], как нам кажется, имеет не только практический интерес,

[1]) M. Sadns, Phys. Rev. **97**, 470 (1956).

но позволяет на примере ускорителя проследить за переходом от классических к квантовым законам движения электронов.

В самом деле, радиальные колебания совершаются согласно уравнению (28,142), которое при $\gamma = 0$ и $q = 0$ (при исследовании принципиальной стороны вопроса мы можем пренебречь затуханием и неоднородностью магнитного поля) имеет вид

$$\ddot{x} + \frac{c^2}{R^2} x = \frac{R}{E} \sum_i \hbar\omega_i \dot{\delta}(t - t_i). \tag{28,150}$$

Когда действием квантовой флуктуационной силы[1]), стоящей в правой части последнего равенства, можно пренебречь [$E \ll E_{1/5}$; см. (28.96)], то электрон будет совершать колебания по законам классической теории, и поэтому его координата и импульс могут быть точно определены в любой момент времени.

В результате же излучения реальных фотонов флуктуационная сила достигает заметной величины при

$$E > E_{1/5}\,^{2)}. \tag{28,150a}$$

В этом случае амплитуда радиальных колебаний начинает постепенно увеличиваться. Вследствие же того, что нам неизвестно, в какой момент времени t_i произойдет излучение и чему будет равна величина излучаемого кванта, — положение электрона и значение его импульса, несмотря на то, что между двумя актами излучения он движется по законам классической механики, становятся неопределенными.

Окончательные результаты для квадрата амплитуды радиальных колебаний, полученные по квазиклассической теории с введением флуктуационной силы [см. (28,147а)], совпадают с результатами вычислений, проделанных по строгой квантовой теории [см. (28.111)]. В тождественности результатов мы склонны усмотреть связь между

---

[1]) Первоначальная квантовая сила определяется равенством (28,134). Правая часть равенства (28,150) соответствует ее радиальной составляющей с учетом флуктуационного изменения радиуса равновесной орбиты.

[2]) Этот критерий появления квантовых сил может быть получен из следующих соображений: как видно из формулы (28,115), минимальное изменение квадрата амплитуды, допустимое по квантовой теории, имеет порядок

$$(\Delta a^2)_{\text{мин}} \sim \frac{c\hbar}{eH}.$$

При излучении же фотона с энергией $\Delta E \sim \hbar \frac{c}{R} (E/m_0c^2)^3$ центр колебаний изменяется на величину $\Delta R \sim \frac{R}{E} \Delta E$. Действие флуктуационной силы будет отлично от нуля при $(\Delta a^2)_{\text{мин}} > (\Delta R)^2$, откуда получаем (29,150а).

квантовой теорией и теорией флуктуаций, в которой имеют место так называемые цепи Маркова, т. е. статистическая независимость последовательных процессов.

Таким образом, в данном примере электроны должны начать двигаться в радиальном направлении с макроскопической амплитудой по квантовым законам, образуя тем самым своеобразный «макроатом»[1]).

Попытаемся также объяснить квантовый характер движения электрона в микромире влиянием флуктуационных сил, но действующих уже со стороны виртуальных фотонов. Для примера рассмотрим простейшую задачу о гармоническом осцилляторе[2]). Уравнение движения гармонического осциллятора в поле виртуальных фотонов имеет вид

$$m_0\ddot{x} = -m_0\omega_0^2 x - e\,(E_x + E_x^i), \tag{28,151}$$

где

$$E_x^i = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_x^i}{\partial t} = -\frac{2}{3}\frac{e}{c^3}\dddot{x} \tag{28,152}$$

— электрическое поле самодействия[3]), а $E = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t}$ — электрическое поле поперечных виртуальных фотонов. Тогда при помощи деления на оператор мы найдем следующее выражение для x:

$$x = -L^{-3/2}\sum_{\varkappa}\frac{e\omega l}{m_0 c}\sqrt{\frac{2\pi c\hbar}{\varkappa}}\left(\frac{a_1 e^{-i\omega t + i\varkappa r}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega^3} - \frac{a_1^+ e^{i\omega t - i\varkappa r}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega^3}\right), \tag{28,153}$$

где $\gamma = 2e^2/3m_0c^3$, $\omega = c\varkappa = \omega_0 y$, а a_1 — квантованная амплитуда составляющей на ось x вектор-потенциала поперечных фотонов; классическую часть x в данной формуле мы не учитываем.

В этом случае импульс частиц следует положить равным

$$p_x = m_0\dot{x} - \frac{e}{c}(A_x + A_x^i) = -L^{-3/2}\sum_{\varkappa}\frac{e\omega_0^2}{c}\sqrt{\frac{2\pi c\hbar}{\varkappa}}\times$$

$$\times\left(\frac{a_1 e^{-i\omega t + i\varkappa r}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega^3} + \frac{a_1^+ e^{i\omega t - i\varkappa r}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega^3}\right), \tag{28,154}$$

где

$$A_x^i = \frac{2}{3}\frac{e}{c^2}\ddot{x}.$$

---

[1]) А. А. Соколов, Д. Д. Иваненко и И. М. Тернов, ДАН СССР 111, 334 (1956).

[2]) А. А. Соколов и В. С. Туманов, ЖЭТФ 30, 802 (1956).

[3]) А. А. Соколов, Вестн. МГУ № 2, 1947; см. также ЖЭТФ 18, 280 (1948).

Из (28,153) и (28,154) видно, что благодаря учету поля виртуальных фотонов классические величины x и p_x становятся операторами, не коммутирующими друг с другом:

$$[p_x, x]_- = p_x x - x p_x = \frac{\hbar}{i}\frac{2}{\pi}\gamma\omega_0 J, \quad J = \int\limits_0^\infty \frac{y^2\,dy}{(y^2-1)^2+\gamma^2\omega_0^2 y^6}, \tag{28,155}$$

где $y = \omega/\omega_0$. При выводе последней формулы мы учли перестановочные соотношения

$$[a_s a'_{s'}]_- = [a_s^+ a'^+_{s'}]_- = 0, \quad [a_s a'^+_{s'}]_- = (\delta_{ss'} - \varkappa_s^0 \varkappa_{s'}^0)\,\delta_{\varkappa\varkappa'}. \tag{28,156}$$

Интеграл J даже не расходится и имеет значение

$$J = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\gamma\omega_0} + O(\gamma\omega_0).$$

Поэтому в первом приближении мы получаем перестановочные соотношения, совпадающие с перестановочными соотношениями квантовой теории:

$$p_x x - x p_x = \frac{\hbar}{i}. \tag{28,157}$$

Точно так же легко показать, что учет флуктуационных сил со стороны виртуальных фотонов приводит, как было показано Вельтоном[1]), к сдвигу уровней, обусловленному виртуальными фотонами. Для гармонического осциллятора минимальная энергия с учетом флуктуационных эффектов будет определяться выражением

$$E_0 = \frac{p_x^2}{2m_0} + \frac{1}{2} m_0 \omega_0^2 x^2. \tag{28,158}$$

Подставим сюда вместо p_x и x их операторные значения (28,153) и (28,154) и примем во внимание, что в случае отсутствия реальных фотонов

$$a'^+_{s'} a_s = 0, \quad a_s a'^+_{s'} = (\delta_{ss'} - \varkappa_s^0\varkappa_{s'}^0)\,\delta_{\varkappa\varkappa'}.$$

Тогда для нулевой энергии находим выражение

$$E_0 = \frac{\hbar\gamma\omega_0^2}{2\pi}\int\limits_0^\infty \frac{y\,dy}{(y^2-1)^2+\gamma^2\omega_0^2 y^6} + \frac{\hbar\gamma\omega_0^2}{2\pi}\int\limits_0^\infty \frac{y^3\,dy}{(y^2-1)^2+\gamma^2\omega_0^2 y^6}. \tag{28,159}$$

---

[1]) T. Welton, Phys. Rev. 74, 1157 (1948); см. также сборник «Сдвиг уровней атомных электронов», ИЛ, 1950.

Отсюда, учитывая значения интегралов:

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{y\,dy}{(y^2-1)^2+\gamma^2\omega_0^2 y^6} &= \frac{\pi}{2\gamma\omega_0}-\frac{1}{2}+O(\gamma\omega_0),\\ \int_0^\infty \frac{y^3\,dy}{(y^2-1)^2+\gamma^2\omega_0^2 y^6} &= \frac{\pi}{2\gamma\omega_0}+\ln\frac{1}{\gamma\omega_0}-\frac{1}{2}+O(\gamma\omega_0^2),\end{aligned}\right\} \tag{28,160}$$

найдем квазиклассическую минимальную энергию:

$$E_0=\frac{\hbar\omega_0}{2}+\frac{\hbar e^2\omega_0^2}{3\pi m_0 c^3}\left(\ln\frac{3c}{2r_0\omega_0}-1\right), \tag{28,161}$$

где r_0 — радиус электрона, и соотношение неопределенностей для квадратичных флуктуаций координаты и импульса:

$$x^2 p_x^2=\frac{\hbar^2}{4}. \tag{28,162}$$

Первый член правой части равенства (28,161) представляет собой известное выражение для нулевой энергии гармонического осциллятора, а второй член — дополнительную энергию, обязанную вакуумному воздействию.

Отметим, что задавая импульс формулой (28,154), мы найдем конечное значение для энергии, связанной с вакуумными членами, т. е. в данном приближении общее выражение для энергии будет автоматически содержать необходимые вычитательные члены.

Интересно прежде всего сравнить формулу (28,161), вычисленную квазиклассическим способом, с соответствующей формулой, найденной квантовым способом с учетом электрон-позитронного вакуума. Используя формулу (45,25) (см. ниже), мы найдем следующее выражение для энергии гармонического осциллятора, находящегося в наинизшем состоянии (после отбрасывания бесконечных вакуумных членов):

$$E_0^{\text{кв}}=\frac{\hbar\omega_0}{2}+\frac{\hbar e^2\omega_0^2}{3\pi m_0 c^3}\left(\ln\frac{m_0c^2}{2\hbar\omega_0}+\frac{11}{24}-\frac{1}{5}\right). \tag{28,163}$$

Это квантовое выражение отличается от соответствующего квазиклассического (28.161) фактически только множителем в скобках порядка единицы.

Появление конечного члена $\ln\frac{3c}{2r_0\omega_0}$ в равенстве (28,161) связано с естественным обрезанием интеграла (28,160) благодаря учету силы радиационного трения (если в левой части этого равенства положить $\gamma=0$, то интеграл при больших $\omega=y\omega_0$ будет логарифмически расходиться).

Если же, следуя Вайскопфу[1]), ограничить интегралы (28,160) частотами $\omega_{\text{макс}} = 2m_0c^2/\hbar$, на которых вообще обрывается классическая теория излучения, после чего может возникать так называемая «ультрафиолетовая катастрофа», то квазиклассический расчет для нулевой энергии приведет к формуле, весьма близкой к квантовой формуле (28,163).

Попробуем теперь дать физическую интерпретацию дополнительной энергии, связанной с вакуумными колебаниями. Как известно, если электрон массы m_0 колеблется с частотой ω_0 и амплитудой A, то его энергия равна:

$$\Delta E = \frac{m_0 A^2 \omega_0^2}{2}.$$

Сопоставляя последнее выражение с вакуумной частью формулы (28,161), в которой логарифмические члены заменены просто единицей, найдем, что влияние вакуумных флуктуаций приводит к дополнительному колебанию электрона с амплитудой:

$$A_{\text{флукт}} = \sqrt{r_0 \frac{\hbar}{m_0 c}} \simeq \frac{1}{\sqrt{\alpha}} r_0, \qquad (28,164)$$

равной среднему геометрическому радиуса электрона и комптоновской длины волны[2]). Эту амплитуду мы можем рассматривать как «размазывание» электрона, связанное с вакуумными членами. В классическом приближении ($\hbar \to 0$) электрон можно считать точечным[3]).

Таким образом, движение электрона до некоторой степени должно напоминать собою движение броуновской частицы. В самом деле, проблема движения одного электрона может быть поставлена лишь приближенно, поскольку электрон окружен облаком фотонов, находящихся в особом виртуальном состоянии (в главе IV мы также покажем, что электрон взаимодействует с электрон-позитронным вакуумом). Если действие на электрон своеобразных «ударов» со стороны реально излучаемых фотонов (например, в теории «светящегося» электрона) или даже виртуальных фотонов (в рассматриваемой здесь нерелятивистской теории гармонического осциллятора) становится заметным, то электрон переходит в квантовое состояние, а его координата и импульс так же, как для броуновской частицы, могут быть вычислены лишь с определенной вероятностью.

В заключение заметим, что особенно сильно увлекаться квазиклассическим методом исследования нельзя. Он объясняет сравнительно узкий круг явлений и нуждается в параллельной проверке на основе квантовой теории (например, квазиклассический метод дает непра-

---

[1]) V. Weisskopf, Rev. Mod. Phys. 21, 305 (1949).

[2]) Н. Н. Боголюбов и С. В. Тябликов, Изв. АН УССР, № 5 10 (1946).

[3]) Мы думаем, что этим обстоятельством объясняется известный успех классической теории точечного электрона Дирака (см. «Классическая теория поля», § 34).

вильный знак для вакуумной части магнитного момента электрона [1])]. Однако квазиклассический метод, отличаясь большой простотой и наглядностью исследования, обладает так же, как и классическая теория собственной массы электрона, большой эвристической силой и, возможно, позволит более детально разобраться в вакуумных эффектах, точная квантовая теория которых далека еще от своего завершения.

§ 29. Фотоэффект. Захват электронов ионизованными атомами

К числу явлений, связанных с поглощением света атомами, принадлежит фотоэффект, т. е. вырывание электронов из вещества под действием света. Еще Герц заметил, что проскакивание искры между шариками разрядника несколько облегчается, когда один из шариков осветить ультрафиолетовым светом. Благодаря классическим опытам Столетова удалось установить, что это явление связано с удалением носителя отрицательного электричества — электрона с катода под действием ультрафиолетовых лучей.

а) Квантовая теория фотоэффекта. Согласно квантовой теории явление фотоэффекта связано с поглощением кванта света ($h\nu = c\hbar\varkappa$) атомом, вследствие чего электрон с внутренней устойчивой орбиты ($E_a < 0$) переходит в область непрерывного спектра ($E_b > 0$), т. е. происходит ионизация атома.

Кинетическая энергия T, с которой электрон вылетает из атома, определяется из закона сохранения энергии:

$$T = c\hbar\varkappa - I, \tag{29,1}$$

где I — энергия ионизации атома.

Рассмотрим теорию фотоэффекта в простейшем случае, а именно, когда в начальном состоянии электроны находятся в K-слое, а затем вырываются из атома и начинают двигаться с кинетической энергией

$$T = \frac{p^2}{2m_0} = c\hbar\frac{k^2}{2k_0}.$$

Тогда для начального состояния мы имеем [2]):

$$\left.\begin{aligned} E_a &= -I = -\frac{Ze^2}{2a} = -\frac{\alpha Z k_0'}{2}c\hbar, \\ \psi_a &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{a}\right)^{3/2} e^{-r/a} = \frac{8\sqrt{\pi}\,(k_0')^{5/2}}{L^3}\sum_{k'}\frac{e^{ik'r}}{\left(k'^2 + k_0'^2\right)^2}, \end{aligned}\right\} \tag{29,2}$$

---

[1]) Z. Koba, Progr. Theor. Phys. 4, 98 (1949). Подробный реферат этой статьи помещен в сборнике «Сдвиг уровней атомных электронов». Коба пытался объяснить неправильный знак вакуумного магнитного момента необходимостью учета так называемого «дрожания» Шредингера.

[2]) Собственные значения и волновые функции водородоподобного атома будут найдены нами в § 46.

где радиус a орбиты K-слоя связан с величиной $k_0 = mc/\hbar$ соотношением

$$\frac{1}{a} = k_0' = Z\alpha k_0. \tag{29,3}$$

Для конечного состояния b мы выберем плоские волны,

$$E_b = T = c\hbar\frac{k^2}{2k_0}; \quad \psi_b = \frac{1}{L^{3/2}} e^{ikr} \tag{29,4}$$

(т. е. ограничимся борновским приближением). Это мы можем сделать, когда параметр столкновения

$$r_{\text{макс}} = \frac{1}{k}$$

будет много меньше радиуса K-слоя [см. также (29,18)], т. е.

$$r_{\text{макс}} \ll a.$$

Отсюда находим условие для скорости v вылетевших электронов, при которой мы можем описывать конечное состояние плоской волной:

$$\xi = \frac{Ze^2}{v\hbar} \ll 1, \tag{29,5}$$

или

$$\beta \gg Z\alpha. \tag{29,5a}$$

Для вычисления вероятности фотоэффекта воспользуемся уравнением (27,40):

$$w_{ab} = \frac{4\pi^2 e^2}{\hbar L^3} \sum_{\varkappa'} \frac{N(\varkappa')}{\varkappa'} \left((\boldsymbol{\alpha}_{ba}^{+} \boldsymbol{\alpha}_{ba}) - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_{ba}^{+} \boldsymbol{\varkappa}')(\boldsymbol{\alpha}_{ba} \boldsymbol{\varkappa}')}{\varkappa'^2} \right) \delta(\varkappa_{ba} - \varkappa'). \tag{29,6}$$

При наличии в начальный момент лишь одного фотона с импульсом $\hbar\boldsymbol{\varkappa}$ мы согласно (27,11) имеем:

$$N(\boldsymbol{\varkappa}') = \frac{1}{2} \delta_{\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{\varkappa}'},$$

$$\varkappa_{ba} = \frac{E_b - E_a}{c\hbar} = \frac{k^2}{2k_0} + \frac{\alpha Z k_0'}{2}.$$

В нашем случае последний член $(\alpha Z k_0'/2)$ будет много меньше первого $(k^2/2k_0)$, и поэтому мы можем положить

$$\varkappa_{ba} = \frac{k^2}{2k_0}. \tag{29,7}$$

Далее, в нерелятивистском приближении мы имеем:

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathbf{p}}{m_0 c} = \frac{1}{ik_0} \nabla.$$

Поэтому матричный элемент α_{ba}^0 при $(\varkappa r) \ll 1$ будет иметь вид

$$\alpha_{ba}^0 = \frac{1}{ik_0} \int \psi_b^+ \nabla \psi_a d^3x = \frac{8\sqrt{\pi}\, k_0'^{5/2}}{L^{3/2} k_0} \frac{k}{\left(k^2 + k_0'^2\right)^2}, \tag{29,8}$$

или, для борновского приближения $(k \gg k_0')$:

$$\alpha_{ba}^0 = \frac{8\sqrt{\pi}}{L^{3/2}} \frac{k_0'^{5/2}}{k_0} \frac{k}{k^4}. \tag{29,9}$$

Наконец, чтобы получить полную вероятность перехода, мы должны выражение (29,6) просуммировать по конечным состояниям волнового числа электрона k и умножить все выражение на 2, поскольку K-слой содержит два электрона:

$$w = 2\sum_{k} w_{ab} = \frac{256\pi^3 a^6 Z^5}{L^6 \varkappa} c k_0^3 \sum_k \delta(\varkappa_{ba} - \varkappa) \frac{\varkappa^2 k^2 - (k\varkappa)^2}{\varkappa^2 k^8}. \tag{29,10}$$

Переходя далее к непрерывному спектру, получаем после интегрирования по вектору k:

$$w = \frac{256\pi}{3} \frac{a^6 Z^5 k_0^3 c}{L^3 \varkappa k^4 \frac{\partial \varkappa_{ba}}{\partial k}}, \tag{29,11}$$

причем

$$\varkappa_{ba} = \frac{k^2}{2k_0} = \varkappa. \tag{29,12}$$

Найдем теперь эффективное сечение σ для фотоэффекта. Эффективное сечение σ равно отношению вероятности вырывания электрона w к числу частиц (т. е. фотонов), которые падают в единицу времени на единицу поверхности, расположенную перпендикулярно к движению фотонов. В единицу времени на единицу площади $S = 1$ *см*^{2} попадут фотоны, которые находятся в объеме $V_0 = cS = c$. Вероятность нахождения первичного фотона в объеме основного параллелепипеда (L^3) равна единице. Поэтому вероятность нахождения в объеме c будет равна $N_\gamma = c/L^3$. Отсюда находим значение для эффективного сечения:

$$\sigma = \frac{w}{N_\gamma} = \frac{256\pi}{3} \frac{a^6 Z^5 k_0^3}{\varkappa k^4 \frac{\partial \varkappa_{ba}}{\partial k}}. \tag{29,13}$$

Тогда с помощью (29,12) имеем в нерелятивистском случае

$$\sigma = \frac{32\sqrt{2}}{3} \pi r_0^2 a^4 Z^5 \left(\frac{k_0}{\varkappa}\right)^{7/2}, \tag{29,14}$$

причем последнее выражение имеет место при условии:

$$k_0 \gg k \gg Z a k_0. \tag{29,15}$$

Принимая во внимание соотношение

$$\frac{k_0}{\varkappa} = \frac{2I}{\alpha^2 Z^2 \varepsilon} \tag{29,16}$$

($\varepsilon = c\hbar\varkappa = h\nu$ — энергия фотона), которое легко получить на основе формул (29,2) и (29,3), можем представить эффективное сечение в виде отношения I к ε:

$$\sigma = \frac{512}{3} \pi r_0^2 \frac{1}{\alpha^3 Z^2} \left(\frac{I}{\varepsilon}\right)^{7/2} \tag{29,17}$$

при условии, что

$$m_0 c^2 \gg \varepsilon \gg I.$$

Если в формулы подставить волновую функцию конечного состояния, принадлежащую к непрерывному спектру кулоновского притяжения, то можно показать, что эффективное сечение (29,17) должно быть умножено на функцию $f(\xi)$[1]:

$$f(\xi) = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1+\xi^2}} \frac{e^{-4\xi \operatorname{arcctg} \xi}}{1 - e^{-2\pi\xi}},$$

где [см. (29,5)]

$$\xi = \sqrt{\frac{I}{\varepsilon - I}} = \frac{Ze^2}{v\hbar}.$$

Для сравнительно больших энергий ($\varepsilon \gg I$) величина ξ стремится к нулю ($\xi \ll 1$). Тогда

$$f(\xi) \to 1. \tag{29,18}$$

Отсюда мы получаем более строгое обоснование соотношения (29,5), определяющее возможность использования плоских волн для описания конечного состояния. Напротив, при малых скоростях фотоэлектронов ($\varepsilon \approx I + 0$) величина ξ стремится к бесконечности; тогда множитель $f(\xi)$ уменьшает эффективное сечение. В предельном случае $\xi \to \infty$ ($\varepsilon = I$) этот множитель достигает своего минимального значения

$$f(\infty) = 2\pi e^{-4} = 0{,}12.$$

Наконец, при $\varepsilon < I$ фотоэффект вообще невозможен, поскольку энергия фотона ε будет недостаточной для вырывания электрона из атома. Однако в этом случае может наблюдаться поглощение света с возбуждением атома.

При очень больших энергиях $\varkappa \sim k \gg k_0$ (ультрарелятивистский случай) имеем[2]:

$$\sigma = 4\pi r_0^2 \alpha^4 Z^5 \frac{m_0 c^2}{\varepsilon}. \tag{29,19}$$

---

[1] M. Stobbe, Ann. d. Phys. 7, 661 (1930).
[2] F. Sauter, Ann. d. Phys. 11, 454 (1931).

Полученные выражения для σ определяют эффективное сечение фотоэффекта лишь для K-слоя. Чтобы получить выражение для полного эффективного сечения с учетом фотоэффекта для других слоев, мы должны соответствующие выражения для эффективного сечения K-слоя умножить на величину, равную примерно $^5/_4$.

Умножая σ на число атомов N_a в единице объема, мы найдем коэффициент поглощения для фотонов при прохождении 1 *см* вещества:

$$\tau = N_a \sigma. \tag{29,20}$$

Таким образом, мы видим, что с увеличением энергии падающих фотонов эффективное сечение фотоэффекта уменьшается обратно пропорционально энергии. Поэтому для больших энергий ($\varepsilon \gg 10\, m_0 c^2$) поглощением γ-лучей вследствие фотоэффекта можно вообще пренебречь. Это связано с тем обстоятельством, что энергия связи электронов в атоме становится по сравнению с ε настолько малой величиной, что электроны мы можем рассматривать как свободные. Свободные же электроны не могут поглощать γ-кванты. Более подробно см. § 32, п. б).

Заметим, что при больших энергиях поглощение γ-квантов будет происходить главным образом за счет эффекта Комптона и рождения пар (см. §§ 34 и 39).

б) Захват электронов ионизованными атомами. В противоположность фотоэффекту при захвате электронов ионизованными атомами электрон с уровня, принадлежащего непрерывному спектру, переходит на дискретный уровень, например на уровень K-оболочки. В этом случае формула (29,4) будет характеризовать начальное квантовое состояние электрона, а формула (29,2) — конечное. Полагая в формуле (27,25) $N = 0$, мы найдем вероятность захвата

$$w_{ba} = \frac{e^2}{2\pi\hbar} \int \left((\boldsymbol{\alpha}_{ab}^{+} \boldsymbol{\alpha}_{ab}) - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_{ab}^{+}\boldsymbol{\varkappa})(\boldsymbol{\alpha}_{ab}\boldsymbol{\varkappa})}{\varkappa^2} \right) \delta(\varkappa_{ba} - \varkappa)\, \frac{d^3\varkappa}{\varkappa}, \tag{29,21}$$

причем в нерелятивистском случае, но для сравнительно больших скоростей [см. также (29,5а)]:

$$1 \gg \beta \gg Z\alpha,$$

или

$$k_0 \gg k \gg Z\alpha k_0 \tag{29,22}$$

мы можем положить $\varkappa_{ba} = k^2/2k_0$, так что

$$\boldsymbol{\alpha}_{ab}^{0} = \frac{1}{lk_0} \int \psi_a^{+} \nabla \psi_b d^3x = \frac{8\sqrt{\pi}}{L^{3/2}} \frac{k_0'^{5/2}}{k_0} \frac{\mathbf{k}}{k^4}. \tag{29,23}$$

Подставляя (29,23) в (29,21), получаем после интегрирования следующее выражение для эффективного сечения захвата:

$$\sigma = \frac{L^3 w}{v} = \frac{128\pi}{3} r_0^2 \alpha^4 Z^5 \left(\frac{c}{v}\right)^5, \tag{29,24}$$

где первоначальная скорость электронов равна $v = c\beta = ck/k_0$.

Если учесть, что электрон может быть захвачен не только K-оболочкой (квантовое число $n'=1$), но и другими оболочками ($n'=2, 3, 4, \ldots$), то формула (29,24) принимает вид[1])

$$\sigma = \frac{128\pi}{3} r_0^2 \alpha^4 Z^5 \left(\frac{c}{v}\right)^5 \sum_{n'=1}^{\infty} \frac{1}{n'^3}, \qquad (29,25)$$

т. е. учет захвата другими оболочками дает небольшую поправку к основной формуле (29,24).

В случае малых скоростей электрона ($v < Z\alpha c$, или $\xi = Ze^2/v\hbar > 1$) эффективное сечение захвата должно быть модифицировано так, чтобы учесть искривление плоских волн кулоновским центром, а именно, выражение (29,25) должно быть умножено на функцию $f(\xi)$

$$f(\xi) = \frac{2\pi\xi}{(1+\xi^2)^2} \frac{e^{-4\xi \operatorname{arcctg} \xi}}{1-e^{-2\pi\xi}}. \qquad (29,26)$$

При $v \gg Z\alpha c$ ($\xi \ll 1$) функция $f(\xi)$ обращается в единицу. Тогда мы получаем старый результат. В другом предельном случае, т. е. при $v \to 0$ ($\xi \gg 1$), мы имеем:

$$f(\xi) = \frac{2\pi}{\xi^3} e^{-4},$$

откуда для эффективного сечения захвата находим:

$$\sigma = \frac{256\pi^2}{3} e^{-4} r_0^2 \alpha Z^2 \left(\frac{c}{v}\right)^2. \qquad (29,27)$$

Наконец, в ультрарелятивистском случае мы получаем для σ выражение вида (29,19), в котором, однако, энергию фотона ε следует заменить энергией электрона.

Захват электронов можно наблюдать при прохождении положительно заряженных частиц через вещество. В этом случае удобно сделать переход к системе координат, в которой электрон покоится, а положительный заряд движется. В нерелятивистском случае это сводится к тому, что под v мы должны понимать скорость движения положительного заряда.

Нейтрализация положительно заряженных частиц наблюдается при движении α-частиц или протонов, которые, захватывая электроны, превращаются в атомы гелия или водорода. Наконец, уместно упомянуть, что при прохождении позитронов через вещество последние могут не только аннигилировать, но также и захватывать на свои орбиты электроны, образуя тем самым легчайшие «водородоподобные» атомы позитрония[2]). Для определения эффек-

---

[1]) W. Wessel, Ann. d. Phys. 5, 611 (1930); J. Oppenheimer, Phys. Rev. 31, 349 (1928).

[2]) См., например, Д. Д. Иваненко и А. А. Соколов, ДАН 58, 1329 (1947). Более подробно на вопросах, связанных с позитронием, мы остановимся в §§ 40 и 50.

тивного сечения образования позитрония мы можем воспользоваться нашими последними формулами, полагая в них $Z=1$, а вместо массы электрона подставляя приведенную массу $m_0/2$. В этом случае радиус r_0 следует положить равным

$$r_0 = \frac{2e^2}{m_0c^2}.$$

При прохождении через вещество других положительно заряженных частиц (например, мезонов) возможны образования мезоэлектрония (положительный мезон плюс электрон) и т. д.

Заметим, что вероятность образования атомов сравнительно велика лишь при нерелятивистских скоростях, в релятивистском же случае она быстро стремится к нулю.

§ 30. Излучение с учетом затухания. Естественная ширина линии

Как известно, спектральная линия не является бесконечно тонкой, а обладает определенной шириной. Этот факт находит свое объяснение как в классической, так и в более точной квантовой теории.

Рассматривая с классической точки зрения гармонический осциллятор как простейшую модель источника света, мы получили бы строго монохроматическую линию только в том случае, если осциллятор колебался бы с одной частотой в течение бесконечно долгого времени. Тогда

$$x = x_0 e^{2\pi i \nu_0 t} = x_0 \int \delta(\nu - \nu_0)\, e^{2\pi i \nu t}\, d\nu. \tag{30,1}$$

В этом случае в интеграле Фурье отличной от нуля будет амплитуда, для которой $\nu = \nu_0$ $[x(\nu) = x_0\delta(\nu - \nu_0)]$.

Всякое отклонение от периодического движения (учет соударений, влияние силы радиационного трения и т. д.) приводит к размазанному спектру, т. е. в разложении Фурье (30,1) отличными от нуля будут также амплитуды, для которых $\nu \neq \nu_0$. Как известно, подобное размазывание ведет к уширению линий.

Найдем уширение спектральных линий, которое происходит благодаря наличию силы радиационного трения. Соответствующее уширение получило название естественного уширения линии.

а) Классическая теория. По классической теории простейшим источником электромагнитного излучения является гармонический осциллятор, уравнение движения которого с учетом силы радиационного трения (силы реакции) имеет вид

$$m_0\ddot{x} = -4\pi^2 m_0 \nu_0^2 x + \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\dddot{x}.$$

Поскольку сила реакции ($\sim \dddot{x}$) мала, мы можем в первом приближении положить

$$\dddot{x} = -4\pi^2\nu_0^2\dot{x}.$$

В этом случае для описания колебаний осциллятора имеем уравнение

$$\ddot{x} = -4\pi^2\nu_0^2 x - \gamma\dot{x}, \tag{30,2}$$

где

$$\gamma = \frac{8\pi^2}{3}\frac{e^2\nu_0^2}{m_0c^3}. \tag{30,3}$$

При $\gamma \ll \nu_0$ решение уравнения (30,2) можно приближенно представить в виде

$$x = x_0 e^{-\gamma t/2} e^{2\pi i\nu_0 t}. \tag{30,4}$$

Вектор электрической напряженности E, характеризующей испускаемый свет, в нашем приближении можно положить пропорциональным амплитуде [1]):

$$E = \begin{cases} E_0 e^{-\gamma t/2} e^{2\pi i\nu_0 t} & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

Отсюда видно, что электромагнитная волна не будет монохроматической, а представляет собой набор волн с различными частотами:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} E(\nu)\, e^{2\pi i\nu t}\, d\nu. \tag{30,5}$$

Отсюда находим:

$$E(\nu) = \int_0^{\infty} E e^{-2\pi i\nu t}\, dt = -E_0 \frac{1}{2\pi i(\nu_0 - \nu) - \frac{\gamma}{2}}.$$

В этом случае распределение излучаемой энергии по частотам будет характеризоваться выражением

$$U(\nu) = U_0 \frac{\gamma}{4\pi^2(\nu - \nu_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}, \tag{30,6}$$

которое может быть найдено из следующих соображений: во-первых, мы должны положить

$$U(\nu) \sim |E(\nu)|^2;$$

[1]) Более строго, $E \sim \ddot{x}$.

во-вторых, общую излучаемую энергию $U_0 = \frac{1}{4\pi}\int E^2 d^3x$ необходимо выбрать таким образом, чтобы

$$U_0 = \int_{-\infty}^{\infty} U(\nu)\,d\nu.$$

При $\nu = \nu_0$ функция $U(\nu)$ достигает своего максимального значения:

$$U_{\text{макс}}(\nu) = \frac{4U_0}{\gamma},$$

а при $2\pi(\nu_{1,2} - \nu_0) = \pm\gamma/2$ интенсивность излучения уменьшается вдвое по сравнению со своим максимальным значением. Поэтому величину $\gamma = 2\pi(\nu_1 - \nu_2) = -2\pi\Delta\nu$ называют шириной линии. Легко видеть, что эта ширина равна обратному значению среднего времени жизни $\tau = 1/\gamma$.

Мы можем выразить ширину в длинах волн, учитывая, что

$$\Delta\lambda = -\frac{c\Delta\nu}{\nu_0^2} = \frac{\gamma c}{2\pi\nu_0^2} = \frac{4\pi}{3} r_0 = 1{,}17 \cdot 10^{-4}\,\text{Å},$$

т. е. ширина линии в длинах волн не зависит от собственной частоты колебаний и имеет порядок радиуса электрона.

б) Квантовая теория. Найдем теперь естественную ширину линии по квантовой теории. С этой целью попробуем решить систему уравнений (27,18) и (27,19), не прибегая к методу теории возмущений.

Подставляя вместо функций U и U^+ выражения (27,7), мы найдем:

$$\dot{C}_a = -\frac{ei}{\hbar L^{3/2}} \sum_{\varkappa} \sqrt{\frac{2\pi c\hbar}{\varkappa}} \left(\boldsymbol{\alpha}_{ab}^0 \boldsymbol{a}^+\right) e^{-ict(\varkappa_{ba} - \varkappa)} C_b, \qquad (30,7)$$

$$\dot{C}_b = -\frac{ei}{\hbar L^{3/2}} \sum_{\varkappa} \sqrt{\frac{2\pi c\hbar}{\varkappa}} \left(\boldsymbol{\alpha}_{ba}^0 \boldsymbol{a}\right) e^{ict(\varkappa_{ba} - \varkappa)} C_a, \qquad (30,8)$$

причем для дипольного излучения можем положить:

$$\boldsymbol{\alpha}_{ab}^0 = \int \psi_a^+ \boldsymbol{\alpha} \psi_b \, d^3x. \qquad (30,9)$$

Ограничимся вычислением ширины линий для спонтанного излучения, когда мы можем считать, что в начальный момент фотоны отсутствуют ($N = 0$).

В этом случае согласно (27,10) для квадратичных комбинаций квантованных амплитуд поля фотонов имеем следующие значения:

$$\left.\begin{aligned} a_s a_{s'}'^+ &= \left(\delta_{ss'} - \frac{\varkappa_s \varkappa_{s'}}{\varkappa^2}\right)\delta_{\varkappa\varkappa'}, \\ a_{s'}'^+ a_s &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (30,10)$$

а начальные условия можем представить в виде

$$C_b(0) = 1, \quad C_a(0) = 0. \tag{30,11}$$

Попробуем решить систему уравнений (30,7) и (30,8), положив

$$C_b = e^{-\gamma t/2}. \tag{30,12}$$

Подставляя (30,12) в (30,7), находим:

$$C_a = -\frac{e}{c\hbar L^{3/2}} \sum_{\varkappa} \sqrt{\frac{2\pi c\hbar}{\varkappa}} \left(\overset{0}{\boldsymbol{\alpha}}_{ab} \boldsymbol{a}^{+}\right) \frac{e^{-ict(\varkappa_{ba}-\varkappa)-\frac{\gamma t}{2}} - 1}{\varkappa - \varkappa_{ba} + \frac{i\gamma}{2c}}. \tag{30,13}$$

Тогда из уравнения (30,8) получаем выражение для коэффициента γ:

$$\gamma = -\frac{e^2 i}{2\pi^2\hbar} \int \frac{d^3\varkappa}{\varkappa} \left(\left(\overset{0+}{\boldsymbol{\alpha}}_{ab} \overset{0}{\boldsymbol{\alpha}}_{ab}\right) - \frac{\left(\overset{0+}{\boldsymbol{\alpha}}_{ab}\boldsymbol{\varkappa}\right)\left(\overset{0}{\boldsymbol{\alpha}}_{ab}\boldsymbol{\varkappa}\right)}{\varkappa^2} \right) \frac{1 - e^{-ict(\varkappa-\varkappa_{ba})+\frac{\gamma t}{2}}}{\varkappa - \varkappa_{ba} + \frac{i\gamma}{2c}}. \tag{30,14}$$

При интегрировании по $\varkappa$ воспользуемся следующим соотношением, имеющим место для достаточно больших значений времени t [1]):

$$\frac{1 - e^{-ict(\varkappa-\varkappa_{ba})+\frac{\gamma t}{2}}}{\varkappa - \varkappa_{ba} + \frac{i\gamma}{2c}} = \pi i \delta(\varkappa - \varkappa_{ba}), \tag{30,15}$$

т. е.

$$\int f(\varkappa)\, \delta(\varkappa - \varkappa_{ba})\, d\varkappa = f(\varkappa_{ba}). \tag{30,16}$$

Подставляя (30,15) в (30,14), находим после перехода к сферическим координатам и интегрирования по величине $\varkappa$:

$$\gamma = \frac{e^2}{2\pi\hbar} \varkappa_{ba} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} (1 - \cos^2\theta) \sin\theta \, |\overset{0}{\boldsymbol{\alpha}}_{ab}|^2 \, d\theta. \tag{30,17}$$

Сравнивая между собою формулы (30,17) и (27,32), мы видим, что коэффициент γ точно равен вероятности спонтанного излучения:

$$\gamma = A_{ba} = \frac{4e^2\varkappa_{ba}}{3\hbar} |\overset{0}{\boldsymbol{\alpha}}_{ab}|^2. \tag{30,18}$$

Этот результат является вполне естественным, поскольку величина γ является обратной величиной среднего времени жизни атома в возбужденном состоянии.

---

[1]) Более подробно этот вопрос будет рассмотрен в следующем параграфе (см. формулу (31,10)).

Согласно (30,13) и (30,10) для полной вероятности перехода из состояния b в состояние a мы получаем:

$$C_a^+ C_a = \frac{e^2}{4\pi^2 c\hbar} \int_0^\infty \varkappa \, d\varkappa \left| \frac{e^{ict(\varkappa - \varkappa_{ba}) - \frac{\gamma t}{2}} - 1}{\varkappa - \varkappa_{ba} + \frac{i\gamma}{2c}} \right|^2 \times$$

$$\times \oint \left((\boldsymbol{\alpha}_{ab}^{0+} \boldsymbol{\alpha}_{ab}^0) - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_{ab}^{0+} \boldsymbol{\varkappa})(\boldsymbol{\alpha}_{ab}^0 \boldsymbol{\varkappa})}{\varkappa^2} \right) d\Omega. \qquad (30,19)$$

Интегрируя последнее выражение по углам и учитывая, что подынтегральная функция имеет острый максимум при $\varkappa = \varkappa_{ba}$, найдем:

$$C_a^+ C_a = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma \frac{1 + e^{-\gamma t} - 2e^{-\gamma t/2} \cos 2\pi (\nu - \nu_{ba}) t}{4\pi^2 (\nu - \nu_{ba})^2 + \frac{\gamma^2}{4}} d\nu, \qquad (30,20)$$

где $\varkappa = 2\pi\nu/c$, $\varkappa_{ba} = 2\pi\nu_{ba}/c$, а пределы интегрирования мы продолжили от 0 до $-\infty$, поскольку при отрицательных значениях подынтегральное выражение практически исчезает.

С помощью формулы (30,20) можно определить полную вероятность перехода для любого момента времени t:

$$C_a^+ C_a = 1 - e^{-\gamma t} = 1 - C_b^+ C_b.$$

Как и следовало ожидать, сумма вероятностей пребывания электрона в состоянии b и в состоянии a для каждого момента времени t равна единице:

$$C_a^+ C_a + C_b^+ C_b = 1. \qquad (30,21)$$

В частности, для сравнительно малых значений времени t $(t\gamma \ll 1)$ имеем:

$$C_a^+ C_a = \gamma t, \qquad (30,22)$$

откуда для вероятности спонтанного перехода, отнесенного к единице времени, мы вновь получаем согласно (30,20) коэффициент Эйнштейна A:

$$\frac{\partial}{\partial t} C_a^+ C_a = \gamma = A_{ba}. \qquad (30,23)$$

Кроме того, выражение (30,20) позволяет найти спектральное распределение энергии излучения для больших значений времени $(t \gg 1/\gamma)$, когда атом уже наверняка должен перейти в более низкое энергетическое состояние. В этом случае общая энергия, теряемая атомом, равна энергии излученного кванта:

$$U_0 = h\nu_{ba} \lim_{t \to \infty} C_a^+ C_a = h\nu_{ba}$$

и связана со спектральной плотностью излучения соотношением

$$U_0 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} U(\nu)\, d\nu = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma h\nu_{ba}}{4\pi^2(\nu - \nu_{ba})^2 + \frac{\gamma^2}{4}}\, d\nu,$$

откуда находим распределение энергии по частотам:

$$U(\nu) = \frac{\gamma h\nu_{ba}}{4\pi^2(\nu - \nu_{ba})^2 + \frac{\gamma^2}{4}}, \tag{30,24}$$

совпадающее по форме с соответствующим классическим выражением (30,6), с тем уточнением, что общая энергия равна кванту энергии излучения $h\nu_{ba}$, а величина γ является вероятностью перехода, отнесенной к единице времени:

$$\gamma = \frac{64\pi^4 e^2 \nu_{ba}^3}{3c^3 h}\left(|x_{ab}|^2 + |y_{ab}|^2 + |z_{ab}|^2\right), \tag{30,25}$$

в то время как в классической теории величина γ определяется соотношением (30,3):

$$\gamma = \frac{8\pi^2}{3}\frac{e^2\nu_0^2}{m_0 c^3}.$$

Ширину линии по квантовой теории мы можем также найти, исходя из четвертого соотношения неопределенностей

$$\Delta E\, \Delta t \cong \frac{h}{2\pi}.$$

В нашем случае время жизни атома равно $\Delta t = 1/\gamma$. Поэтому энергия излучения обладает «размазанностью»

$$\Delta E \cong \frac{h}{2\pi}\gamma,$$

так что ширина испускаемой линии будет равна

$$\Delta\nu = \frac{\Delta E}{h} \cong \frac{\gamma}{2\pi}. \tag{30,26}$$

В качестве примера атома с двумя энергетическими уровнями мы можем взять гармонический осциллятор, спектр энергии которого связан с частотой ν_0 колебаний соотношением

$$E_{n'} = h\nu_0\left(n' + \frac{1}{2}\right),$$

где $n' = 0, 1, 2, \ldots$ — квантовые числа. Как известно, у гармонического осциллятора разрешены переходы между соседними уровнями ($n' \to n' - 1$), причем соответствующий матричный элемент равен

$$|x_{n',\,n'-1}|^2 = \frac{n'h}{8\pi^2\nu_0 m_0},$$

а для квантовой частоты излучения имеет место выражение

$$\nu_{n', n'-1} = \frac{E_{n'} - E_{n'-1}}{h} = \nu_0,$$

совпадающее с частотой колебаний.

Для того чтобы с уровня a электрон не мог переходить на более низкие уровни, мы должны предположить, что уровень a является наинизшим ($n' = 0$). Тогда, полагая для уровня b квантовое число $n' = 1$, находим:

$$|x_{ab}|^2 = |x_{01}|^2 = \frac{h}{8\pi^2 \nu_0 m_0},$$

откуда согласно (30,25) получаем для коэффициента γ выражение

$$\gamma = \frac{8\pi^2}{3} \frac{e^2 \nu_0^2}{m_0 c^3}, \tag{30,27}$$

совпадающее с соответствующим классическим выражением.

Таким образом, затухание в квантовой теории связано с учетом влияния поля излучения на первоначальное состояние атома.

Аналогичным способом мы можем рассмотреть и другие причины, приводящие к уширению линий. Так, например, теория ширины спектральных линий в однородном разреженном газе была окончательно разработана А. А. Власовым и В. С. Фурсовым [1]). Рассматривая атомы газа как гармонические осцилляторы, связанные между собою дипольным взаимодействием, они показали, что ширина линии возникает благодаря перекачиванию энергии от возбужденных атомов к невозбужденным.

Исследуя явление с помощью классической теории, они нашли следующее выражение для ширины линии:

$$\gamma' = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m_0 \nu_0} N,$$

где ν_0 — собственная частота колебаний осцилляторов, а N — число атомов в 1 *см*^{3}.

Сопоставление этого выражения для γ' с выражением (30,27) показывает, что при сравнительно малых плотностях $[N \ll (\nu_0/c)^3]$ уширением линии, обусловленным взаимодействием атомов, можно пренебречь по сравнению с естественной шириной линии.

При переходе к квантовому случаю классическую частоту колебаний ν_0 следует заменить квантовой ν_{ba}, а вместо величины N подставить Nf_{ba}, где f_{ba} — сила осциллятора (см. § 33). Впоследствии эта теория была обобщена на случай однородного газа при весьма больших плотностях [2]).

---

[1]) А. А. Власов и В. С. Фурсов, ЖЭТФ **6**, 751 (1936).
[2]) А. А. Власов и В. С. Фурсов, ЖЭТФ **9**, 783 (1939).

Значительным будет также уширение линии, обусловленное эффектом Допплера. В самом деле, число атомов массы M, движущихся со скоростью v_x по направлению к наблюдателю, пропорционально функции распределения $e^{-Mv_x^2/2kT}$, где T — температура газа. Вследствие эффекта Допплера линия будет смещена на величину $\Delta\nu = v_x\nu_0/c$. Определяя ширину линии таким значением $\Delta\nu'' = \gamma''/2\pi$, при котором интенсивность уменьшается вдвое, мы находим для величины $\gamma''/2\pi$ следующее значение:

$$\frac{\gamma''}{2\pi} = \nu_0 \sqrt{\frac{2kT}{Mc^2}\ln 2}\,.$$

Даже при очень низких температурах ширина линии $\gamma''/2\pi$ в видимой области спектра, обусловленная эффектом Допплера, будет значительно большей, чем естественная ширина линии. Однако интенсивность линии естественной ширины убывает лишь обратно пропорционально $(\Delta\nu)^2$, в то время как интенсивность допплеровской линии убывает с увеличением $\Delta\nu$ по экспоненциальному закону. Поэтому интенсивность, наблюдаемая при сравнительно больших смещениях $\Delta\nu$ ($\Delta\nu \gg \Delta\nu''$), обусловлена главным образом естественной шириной.

Другие уширения линий для очень малых плотностей ничтожно малы, и мы их здесь рассматривать не будем.

§ 31. Упругое рассеяние частиц по теории затухания

а) Нормировочное соотношение. Как известно, теория возмущения применима лишь в области сравнительно больших дебройлевских длин волн λ падающих частиц ($\lambda^2 > \sigma$). В области же малых значений λ ($\lambda^2 \ll \sigma$) теория возмущений, как правило, дает неограниченный рост эффективных сечений с увеличением энергии.

В теории затухания, развитой, в частности, для исследования рассеяния мезонов на нуклонах (см. [1]), [2]), [3]), а также § 35), указанная трудность уже не возникает, и в [1]) было установлено своего рода нормировочное соотношение

$$C^+C + \sum_{k'}{}' C'^+C' = 1. \qquad (31,1)$$

Это соотношение говорит о том, что общая сумма падающих и рассеянных частиц для любого момента времени t остается неизменной. Поэтому теория затухания может быть применима также для исследования явлений упругого рассеяния даже при наличии так называемой сильной связи.

На основе анализа сравнительно простой задачи можно также сделать и некоторые методические выводы, связанные с целесооб-

[1]) А. Соколов, J. Phys. USSR **5**, 231 (1941).
[2]) W. Heitler, Proc. Cambr. Phil. Soc. **37**, 291 (1941).
[3]) A. H. Wilson, Proc. Cambr. Phil. Soc. **37**, 301 (1941).

разностью использования теории затухания для рассмотрения других, более сложных вопросов.

б) Основные уравнения теории затухания. При исследовании упругого рассеяния частиц центрально-симметричным силовым полем потенциальную энергию взаимодействия $V(r)$ разложим в ряд Фурье:

$$V(r)=L^{-3}\sum_{\varkappa}V_{\varkappa}e^{-i\varkappa r}. \tag{31,2}$$

Тогда решение уравнения Дирака

$$\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}-H_0-V\right)\psi=0$$

будем искать в виде

$$\psi=L^{-3/2}\sum_{k'',\,s''}C''b''e^{-icK''t+ik''r}. \tag{31,2a}$$

Здесь H_0 — гамильтониан свободного поля, а $b''=b(\boldsymbol{k}'',\ s'')$ — спинорная амплитуда [см. (20.13)]. Поскольку нас интересуют состояния лишь с положительной энергией, мы положили $\varepsilon''=1$. Учет потенциальной энергии V, включенной в момент времени $t=0$, сводится к тому, что коэффициенты $C'=C(\boldsymbol{k}',\ s',\ t)$ следует считать функциями времени, для определения которых имеем следующую систему интегро-дифференциальных уравнений:

$$-\frac{1}{ic}\dot{C}'=\frac{1}{c\hbar L^3}\left(H^{s's}_{k',\,k}e^{ic\Gamma' t}C+\sum_{k'',\,s}{}'H^{s's''}_{k',\,k''}e^{ic(\Gamma'-\Gamma'')t}C''\right), \tag{31,3}$$

$$-\frac{1}{ic}\dot{C}=\frac{1}{c\hbar L^3}\sum_{k'',\,s''}{}'H^{ss''}_{k,\,k''}e^{-ic\Gamma'' t}C''+\frac{V_0}{c\hbar L^3}C, \tag{31,4}$$

где

$$\left.\begin{aligned}&H^{s's''}_{k',\,k''}=b'^{+}V_{|k'-k''|}b'' \quad \text{и т. д.},\\ &\Gamma'=K'-K,\quad V_0=V_{\varkappa}\quad \text{при}\quad \varkappa=0.\end{aligned}\right\} \tag{31,5}$$

Здесь коэффициент C, описывающий начальное состояние частицы, выделен особо, а $rV(r)\to 0$ при $r\to\infty$.

Если предположить, что в момент включения рассеивающего центра ($t=0$) частица находилась в состоянии $(\boldsymbol{k},\ s)$, мы должны на искомые коэффициенты C' наложить начальные условия, согласно которым при $t=0$

$$C(\boldsymbol{k}',\ s',\ 0)=\delta_{k'k}\delta_{s's}. \tag{31,6}$$

Решение уравнений (31,3) и (31,4), удовлетворяющих начальному условию (31,6), будем искать в виде

$$C=e^{-c\beta_1 t+ic\beta_2 t}, \tag{31,7}$$

$$C'=\begin{cases}\dfrac{1}{c\hbar L^3}\dfrac{1-e^{-c\beta_1 t+ic(\Gamma'+\beta_2)t}}{\Gamma'+\beta_2+i\beta_1}\displaystyle\sum_j \varepsilon_j H^{s's}_{j,\,k',\,k} & \text{при } |\Gamma'|<|\Gamma_0|,\\ 0 & \text{при } |\Gamma'|>|\Gamma_0|.\end{cases} \tag{31,8}$$

Здесь

$$\sum_j H^{s's}_{j,k',k} = H^{s's}_{k',k}. \tag{31,9}$$

Величину Γ_0 следует выбрать настолько большой, чтобы осциллирующую функцию $e^{\pm ic\Gamma_0 t}$ можно было практически положить равной нулю.

Величины ε_j, β_1 и β_2 будут найдены из уравнений (31,3) и (31,4). Для перехода к обычной теории возмущений мы должны положить:

$$\beta_1 = \beta_2 = 0, \quad \varepsilon_j = 1.$$

Для дальнейших вычислений воспользуемся формулой [см. также (30,15)]

$$\frac{e^{c\beta_1 t - ic(\Gamma'' + \beta_2)t} - 1}{\Gamma'' + \beta_2 + i\beta_1} \cong \frac{\pi}{i}\,\delta(\Gamma'' + \beta_2), \tag{31,10}$$

которая имеет место, когда можно ограничиться сравнительно узким интервалом частот:

$$\beta_1 \ll \Gamma_0 \ll K. \tag{31,11}$$

Для того чтобы показать это, мы воспользуемся соотношением

$$I = \int\limits_{K-\Gamma_0}^{K+\Gamma_0} \frac{e^{c\beta_1 t - ic(K'' - K + \beta_2)t} - 1}{K'' - K + \beta_2 + i\beta_1} f(K'')\,dK'' = \left[\frac{\pi}{i} + O\left(\frac{\beta_1}{i\Gamma_0}, \frac{\Gamma_0}{K}\right)\right] f(K - \beta_2). \tag{31,12}$$

Отбрасывая в правой части (31,12) малые величины [см. (31,11)], мы легко докажем соотношение (31,10). Аналогичным путем можно получить также и другое соотношение

$$\frac{\partial}{\partial t}\left|\frac{1 - e^{-c\beta_1 t + ic(\Gamma' + \beta_2)t}}{\Gamma' + \beta_2 + i\beta_1}\right|^2 \cong 2\pi c e^{-2c\beta_1 t}\delta(\Gamma' + \beta_2). \tag{31,13}$$

Близкое предположение об учете лишь резонансных членов следует также делать и при решении аналогичных задач с помощью теории возмущений.

Подставляя (31,7), (31,8) в (31,3), (31,4) и учитывая (31,10), получаем уравнения для определения искомых величин ε_j, β_1 и β_2 при $|\Gamma'| < |\Gamma_0|$:

$$(\varepsilon_j - 1) H^{s's}_{j,k',k} = \frac{kK}{8\pi^2 c\hbar l} \sum_{j', s''} \varepsilon_{j'} \oint d\Omega'' H^{s's''}_{j,k',k''} H^{s''s}_{j',k'',k}, \tag{31,14}$$

$$\beta_1 - i\beta_2 = \frac{kK}{8\pi^2 c^2\hbar^2 L^3} \sum_{j, j', s''} \varepsilon_{j'} \oint d\Omega'' H^{ss''}_{j,k,k''} H^{s''s}_{j',k'',k} + \frac{iV_0}{c\hbar L^3}, \tag{31,15}$$

где

$$K'' = K - \beta_2 \cong K, \quad \beta_1 \sim \beta_2 \sim \frac{1}{L^3},$$

а $d\Omega'' = \sin\theta''\, d\theta''\, d\varphi''$ — элемент телесного угла вектора $\boldsymbol{k}''$. При $|\Gamma'| > |\Gamma_0|$ согласно (31,8) имеем $C' = 0$. В этом случае вместо (31,14) получаем соотношение

$$-e^{ic\Gamma' t} \sum_j H^{s's}_{j,k',k} = \frac{kK}{8\pi^2 c\hbar l} e^{ic\Gamma' t} \sum_{j,j',s''} \varepsilon_{j'} \oint d\Omega'' H^{s's''}_{j,k',k''} H^{s''s}_{j',k'',k},$$

которое также будет справедливым, поскольку, как было указано выше, для сравнительно больших значений $c\Gamma' t$ осциллирующую функцию $e^{\pm ic\Gamma' t}$ можно практически положить равной нулю.

Уравнения (31,14), (31,15) представляют собой основу теории затухания. Эти уравнения непригодны для описания рассеяния кулоновским центром (силы дальнего действия), так как в этом случае величина V_0 обращается в бесконечность [см. ниже (31,47)].

Эффективное сечение может быть найдено по формуле

$$d\sigma_{ss'} = \frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{k'} C'^{+} C' = \frac{K^2}{4\pi^2 c^2 \hbar^2} \sum_{j',j} \varepsilon_{j'}^{+} \varepsilon_j H^{+ss'}_{j',k,k'} H^{s's}_{j,k',k}\, d\Omega', \quad (31,16)$$

где $N = N_0 C^{+} C = \frac{ck}{L^3 K} e^{-2c\beta_1 t}$ — число частиц, падающих в единицу времени на единицу поверхности.

При исследовании упругого рассеяния бесспиновых релятивистских частиц неподвижным силовым центром (31,2) можно воспользоваться скалярным уравнением Клейна — Гордона, представив его в виде системы двух уравнений первого порядка

$$\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t} - V(r)\right)\psi - \chi = 0, \quad (31,17)$$

$$\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t} - V(r)\right)\chi + c^2\hbar^2\nabla^2\psi - m_0^2 c^4 \psi = 0. \quad (31,18)$$

В этом случае решение при наличии рассеивающего центра следует искать в виде

$$\left.\begin{aligned} \psi &= L^{-3/2} \sum_{k''} C''(t) \frac{1}{\sqrt{E''}} e^{-icK''t + ik''r}, \\ \chi &= L^{-3/2} \sum_{k''} C''(t) \sqrt{E''} e^{-icK''t + ik''r}, \end{aligned}\right\} \quad (31,19)$$

причем энергия $E'' = c\hbar K''$, а для плотности заряда ρ следует взять выражение

$$\rho = \frac{1}{2}(\chi^{+}\psi + \psi^{+}\chi). \quad (31,20)$$

Тогда для определения коэффициентов C, а также для вычисления эффективного сечения мы можем использовать предыдущие результаты, найденные нами для дираковских частиц [см. (31,14), (31,15)

и (31,16)], если в соответствующих формулах отбросить спиновые значки.

в) Рассеяние частиц δ-потенциалом [1]. В общем виде систему уравнений (31,14), (31,15) решить довольно трудно. Поэтому прежде всего при исследовании рассеяния дираковских частиц рассмотрим простейший случай, а именно, когда рассеивающий потенциал (31,2) имеет вид δ-функции:

$$V(r) = V_0\delta(\boldsymbol{r}) = L^{-3}V_0\sum_{\varkappa} e^{-i\varkappa r}. \tag{31,21}$$

При наличии двух спиновых состояний матричные элементы энергии взаимодействия следует разбить на две части ($j,\ j' = 1,\ 2$):

$$H^{s's}_{k',k} = H^{s's}_{1,k',k} + H^{s's}_{2,k',k}, \tag{31,22}$$

где

$$\left.\begin{aligned} H^{s's}_{1,k',k} &= \frac{V_0}{2} f(K) f(K') (\cos\theta_s \cos\theta'_{s'} + e^{i(\varphi-\varphi')}\sin\theta_s \sin\theta'_{s'}),\\ H^{s's}_{2,k',k} &= \frac{V_0}{2} ss' f(-K) f(-K') (\cos\theta_s \cos\theta'_{s'} + e^{i(\varphi-\varphi')}\sin\theta_s \sin\theta'_{s'}), \end{aligned}\right\} \tag{31,23}$$

$$f(\pm K) = \sqrt{1 \pm \frac{k_0}{K}}.$$

Используя далее условия ортогональности для матричных элементов:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{s''} \oint d\Omega'' H^{s's''}_{j,k',k''} H^{s''s}_{j',k'',k} &= 2\pi V_0 \left[1 - (-1)^j \frac{k_0}{K}\right] H^{s's}_{j,k',k}\delta_{jj'},\\ \sum_{s''} \oint d\Omega'' H^{ss''}_{j,k,k''} H^{s''s}_{j',k'',k} &= \pi V_0^2 \left[1 - (-1)^j \frac{k_0}{K}\right]^2 \delta_{jj'} \end{aligned}\right\} \tag{31,24}$$

и учитывая также равенства (31,22), (31,23) и (31,14), находим для ε_1 и ε_2 следующие значения:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{1 + i\delta_1}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{1}{1 + i\delta_2}, \tag{31,25}$$

где

$$\delta_1 = \frac{V_0}{4\pi c\hbar} k(K + k_0), \qquad \delta_2 = \frac{V_0}{4\pi c\hbar} k(K - k_0). \tag{31,26}$$

Подставив (31,23) и (31,25) в (31,16), получаем для дифференциального сечения упругого рассеяния дираковских частиц выражение

---

[1] А. А. Соколов и Б. К. Керимов, ДАН СССР **105**, 961 (1955).

(с учетом поляризационных эффектов) [1])

$$\frac{d\sigma_{ss'}}{d\Omega'}=\frac{V_0^2K^2}{32\pi^2c^2\hbar^2}\left(1+ss'\frac{(\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}')}{kk'}\right)\left[\frac{\left(1+\frac{k_0}{K}\right)^2}{1+\delta_1^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{\left(1-\frac{k_0}{K}\right)^2}{1+\delta_2^2}+2ss'\frac{k^2}{K^2}\frac{1+\delta_1\delta_2}{(1+\delta_1^2)(1+\delta_2^2)}\right]. \qquad (31,27)$$

Производя суммирование по конечным состояниям спина (s') и усреднение по начальным (s), находим дифференциальное эффективное сечение

$$d\sigma=\frac{1}{2}\sum_{s,s'=\pm 1}d\sigma_{ss'}=\frac{V_0^2K^2}{16\pi^2c^2\hbar^2}\left[\frac{\left(1+\frac{k_0}{K}\right)^2}{1+\delta_1^2}+\frac{\left(1-\frac{k_0}{K}\right)^2}{1+\delta_2^2}+\right.$$
$$\left.+2\frac{k^2}{K^2}\frac{(\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}')}{kk'}\frac{1+\delta_1\delta_2}{(1+\delta_1^2)(1+\delta_2^2)}\right]d\Omega'. \qquad (31,28)$$

Интегральное же эффективное сечение равно

$$\sigma=\frac{V_0^2K^2}{4\pi c^2\hbar^2}\left[\frac{\left(1+\frac{k_0}{K}\right)^2}{1+\delta_1^2}+\frac{\left(1-\frac{k_0}{K}\right)^2}{1+\delta_2^2}\right]. \qquad (31,29)$$

Значения величин β_1 и β_2 могут быть найдены с помощью (31,15):

$$c\beta_1=\frac{\sigma N_0}{2},\qquad c\beta_2=\frac{\sigma N_0}{2}\frac{\gamma_1\delta_1+\gamma_2\delta_2}{\gamma_1+\gamma_2}-\frac{V_0}{\hbar L^3},$$
$$\gamma_j=\frac{\left[1-(-1)^j\frac{k_0}{K}\right]^2}{1+\delta_j^2}. \qquad (31,30)$$

Из (31,30) следует, что при $L\to\infty$ величины β_1 и β_2 стремятся к нулю.

При помощи (31,7), (31,30) и (31,16) можно показать, что коэффициенты C будут удовлетворять нормировочному соотношению (31,1)

$$C^+C+\sum_{k',s'}{}'C'^+C'=e^{-\sigma N_0 t}+\sigma N_0\int_0^t e^{-\sigma N_0 t}\,dt=1. \qquad (31,31)$$

Пользуясь же теорией возмущений, получаем эффективное сечение упругого рассеяния дираковских частиц δ-потенциалом:

$$\sigma_0=\frac{1}{N_0}\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\sum_{k',s,s'}C'^+C'=\frac{V_0^2}{2\pi c^2\hbar^2}(2k_0^2+k^2). \qquad (31,32)$$

---

[1]) Поляризационные эффекты будут рассмотрены в § 36, п. г).

Это соотношение можно получить из (31,29), полагая в последнем

$$\delta_1^2 = \delta_2^2 = 0. \qquad (31,33)$$

Соотношение (31,32), найденное по теории возмущений, имеет место лишь в области сравнительно малых энергий. При больших же энергиях $k \gg (4\pi c\hbar/V_0)^{1/2}$ падающих частиц величины δ_1^2, δ_2^2 резко возрастают ($\delta_1^2 \gg 1$, $\delta_2^2 \gg 1$), и поэтому затуханием пренебрегать уже нельзя. В этом случае эффективное сечение (31,29) начинает убывать с ростом энергии:

$$\sigma = \frac{8\pi}{k^2} = 8\pi\lambda^2. \qquad (31,34)$$

Эффективное сечение упругого рассеяния бесспиновых частиц на δ-потенциале может быть найдено с помощью уравнений (31,17) и (31,18):

$$\sigma = \frac{V_0^2 K^2}{\pi c^2 \hbar^2} \frac{1}{1 + \delta^2}, \qquad (31,35)$$

где

$$\delta = \frac{kKV_0}{2\pi c\hbar}.$$

Таким образом, из теории затухания следует, что методом возмущений можно пользоваться, когда $\delta < 1$, т. е.

$$V_0 < \frac{2\pi c\hbar}{kK}.$$

Задавая $V(r)$ в виде потенциального барьера сферической формы:

$$V(r) = \begin{cases} \dfrac{3V_0}{4\pi a^3} & \text{при} \quad r < a, \\ 0 & \text{при} \quad r > a, \end{cases}$$

мы можем задачу рассеяния решить по методу сшивания волновой функции и ее производной [см. [1]] на границе участков ($r = a$). Устремляя затем $a \to 0$ (V_0 — конечная величина), мы найдем рассеяние δ-потенциалом. Однако метод сшивания устанавливает слишком узкий критерий для возможности использования теории возмущений, а именно $V_0 < 2\pi c\hbar a/K$. При $V_0 > 2\pi c\hbar a/K$ дифференциальное эффективное сечение становится равным $\sigma = 4\pi a^2$ и при $a \to 0$ обращается в нуль.

Интересно отметить, что при исследовании рассеяния δ-потенциалом условие $V_0 < 2\pi c\hbar a/K$ для использования теории возмущений не будет выполняться ($a \to 0$). Поэтому либо нельзя пользоваться методом возмущений при исследовании рассеяния δ-потен-

[1]) Н. Мотт и Г. Месси, Теория атомных столкновений, ИЛ, 1951, стр. 53—55.

циалом (однако, как мы знаем, многие авторы с успехом применяют в этом случае метод возмущений), либо этот критерий, установленный на основе метода сшивания, следует пересмотреть, поскольку при скачкообразном изменении потенциала большую роль будут играть нерезонансные члены, отбрасываемые в теории затухания.

Заметим, что в другом предельном случае, когда $ka \gg 1$, результаты методов затухания и сшивания будут совпадать друг с другом с точностью до коэффициентов порядка единицы [все эти вопросы более подробно рассмотрены в [1])].

г) Рассеяние частиц короткодействующим силовым центром [2]). Рассмотрим рассеяние бесспиновых частиц короткодействующим силовым центром [3]). Разлагая в этом случае фурье-компоненты потенциала в ряд по полиномам Лежандра $P_l(\cos\theta)$:

$$H_{k',k''} = V_{|k'-k''|} = \sum_{l=0}^{\infty} V_l''' = \sum_{l=0}^{\infty} b_l P_l(\cos\theta''') \text{ и т. д.,} \tag{31,36}$$

где

$$l = j, \quad H_{l,k',k''} = V_l''',$$

$$\cos\theta''' = \frac{(\boldsymbol{k}'\boldsymbol{k}'')}{k'k''} = \cos\theta'\cos\theta'' + \sin\theta'\sin\theta''\cos(\varphi' - \varphi''),$$

для коэффициентов b_l находим значение

$$b_l = 2\pi(2l+1)\int_0^{\pi} P_l(\cos\theta''')\sin\theta'''\,d\theta''' \int_0^{\infty} rV(r)\frac{\sin\left(2k\sin\frac{\theta'''}{2}r\right)}{2k\sin\frac{\theta'''}{2}}\,dr. \tag{31,37}$$

Здесь через θ' и θ'' обозначены углы между вектором $\boldsymbol{k}$, направленным по оси z ($\theta = 0$), и векторами $\boldsymbol{k}'$ и $\boldsymbol{k}''$, а через V_l' и V_l'' — соответствующие значения компонент потенциала.

В результате интегрирования по телесному углу можно получить следующие условия ортогональности:

$$\oint d\Omega'' V_l''' V_{l'}'' = \frac{4\pi b_{l'}}{2l+1} V_l' \delta_{l'l}, \tag{31,38}$$

$$\oint d\Omega'' V_l'' V_{l'}'' = \frac{4\pi b_l^2}{2l+1} \delta_{l'l}. \tag{31,39}$$

Учитывая последние соотношения, находим величину ε_l [см. (31,14)]:

$$\varepsilon_l = \frac{1}{1 + i\delta_l} \quad (l = 0, 1, 2, \ldots), \tag{31,40}$$

---

[1]) А. А. Соколов и Б. К. Керимов, ЖЭТФ **31**, 1080 (1956).

[2]) А. А. Соколов и Б. К. Керимов, ДАН СССР **108**, 611 (1956).

[3]) Аналогичная задача для дираковских частиц будет рассмотрена нами в § 46, п. о), после того как мы познакомимся с шаровыми спинорами.

где

$$\delta_l = \frac{kK}{2\pi c\hbar} \frac{b_l}{2l+1}. \tag{31,41}$$

Далее, учитывая еще равенства (31,13) и (31,16), находим по теории затухания следующие выражения для дифференциального эффективного сечения упругого рассеяния:

$$\sigma(\theta')\, d\Omega' = \frac{1}{k^2} \sum_{l,\, l'} \frac{\delta_l \delta_{l'} (1 + \delta_l \delta_{l'}) (2l+1)(2l'+1) P_l(\cos\theta') P_{l'}(\cos\theta')}{(1+\delta_l^2)(1+\delta_{l'}^2)} d\Omega'. \tag{31,42}$$

Интегрируя (31,42) по телесному углу $d\Omega'$, получаем выражение для полного эффективного сечения:

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \eta_l, \tag{31,43}$$

где [1])

$$\sin^2 \eta_l = \frac{\delta_l^2}{1+\delta_l^2}. \tag{31,44}$$

С помощью (31,37) и (31,41) получаем для коэффициентов δ_l, характеризующих фазу рассеянных волн, следующее выражение:

$$\delta_l = -\operatorname{tg} \eta_l = \frac{\pi K}{c\hbar} \int_0^{\infty} r V(r) J^2_{l+1/2}(kr)\, dr, \tag{31,45}$$

где $J_{l+1/2}(kr)$ — функция Бесселя.

Как известно, амплитуда рассеяния связана с дифференциальным эффективным сечением соотношением

$$\sigma(\theta') = |f(\theta')|^2. \tag{31,46}$$

Отсюда согласно (31.42) имеем:

$$f(\theta') = -\frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\delta_l}{1+i\delta_l} (2l+1) P_l(\cos\theta'). \tag{31,46a}$$

Далее, принимая во внимание, что $P_l(1) = 1$, можно легко установить соотношение между полным эффективным сечением (31,43) и мнимой частью амплитуды рассеяния $f(\theta')$:

$$\sigma = \frac{4\pi}{k} \operatorname{Im}_{\theta' \to 0} f(\theta').$$

[1]) См. Г. Бете и Ф. Гофман, Мезоны и поля, т. II, ИЛ, 1957, стр. 262; А. А. Соколов и Б. К. Керимов, ДАН СССР 108, 611 (1956).

Заметим, что если в (31,46а) мы подставим вместо δ_l значение $-\operatorname{tg}\eta_l$, то найдем для амплитуды рассеяния выражение, известное из общей теории рассеяния[1]):

$$f(\theta') = \frac{1}{2ki}\sum_{l=0}^{\infty}\left(e^{2i\eta_l} - 1\right)(2l+1)\,P_l(\cos\theta').$$

Если в знаменателе (31,46а) пренебречь $i\delta_l$ по сравнению с единицей (это соответствует переходу к теории возмущений), то, подставляя вместо δ_l выражение (31,45), найдем приближенное значение амплитуды рассеяния:

$$f(\theta') = -\frac{2K}{c\hbar}\int_0^{\infty} r^2 V(r)\,\frac{\sin\left(2k\sin\frac{\theta'}{2}\right)}{2k\sin\frac{\theta'}{2}}\,dr.$$

Приближение теории затуханий заключается в том, что для определения δ_l мы берем равенство (31,45), в то время как по точной теории, пригодной для любых центральных сил, для определения δ_l следует использовать выражение[2])

$$\delta_l = \frac{\pi K}{c\hbar}\int_0^{\infty} rV(r)\,J_{l+1/2}(kr)\,R_l(kr)\,dr. \qquad (31,46б)$$

Здесь функция $R_l(kr)$ должна быть найдена из следующего уравнения (нерелятивистский случай $K = k_0$):

$$\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{dR_l(x)}{dx}\right) + \left(1 - \frac{2k_0 V\left(\frac{x}{k}\right)}{k^2 c\hbar} - \frac{l(l+1)}{x^2}\right)R_l(x) = 0,$$

где $x = kr$. Если функция $R_l(x)$ достигает максимального значения в области x, соответствующей $\frac{2k_0}{k^2 c\hbar}V\left(\frac{x}{k}\right) \ll 1$ (это соотношение может выполняться, например, для короткодействующих сил), то для $R_l(x)$ найдем значение, которое следует из теории затухания:

$$R_l(x) = J_{l+1/2}(kr).$$

К сожалению, в общем случае пользоваться формулой (31,46б) практически нельзя, поскольку неизвестна нормировка функций $R_l(x)$,

---

[1]) Н. Мотт и Г. Месси, Теория атомных столкновений, стр. 150.
[2]) Л. Шифф, Квантовая механика, ИЛ, 1957, стр. 210.

а ее асимптотическое поведение вновь выражается через неизвестное значение фазы [1], [2]):

$$R_l(x) = J_{l+1/2}(x) - \operatorname{tg}\eta_l Y_{l+1/2}(x),$$

где $Y_{l+1/2}(x)$ — вторая функция Бесселя.

Таким образом, формула (31,45) для фазы рассеяния, найденная по теории затухания, является более точной, чем соответствующая формула, полученная по методу возмущений ($\eta_l \cong \operatorname{tg}\eta_l$).

д) Рассеяние на потенциале Юкава [3]). Применим полученные формулы к рассмотрению рассеяния бесспиновых релятивистских частиц в силовом поле с потенциалом типа Юкава, когда потенциальная энергия равна [4])

$$V(r) = g^2 \frac{e^{-\varkappa_0 r}}{r}, \text{ т. е. } V_\varkappa = \frac{4\pi g^2}{\varkappa_0^2 + \varkappa^2}. \tag{31,47}$$

Подставив (31,47) в (31,45), получаем для сдвига фазы выражение

$$\delta_l = -\operatorname{tg}\eta_l = \gamma Q_l(x), \tag{31,48}$$

где

$$\gamma = \frac{g^2}{c\hbar}\frac{K}{k}, \quad x = 1 + \frac{\varkappa_0^2}{2k^2}, \tag{31,49}$$

а

$$Q_l(x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{P_l(y)\,dy}{x-y} \tag{31,50}$$

является функцией Лежандра второго рода порядка l. Согласно формулам (31,43) и (31,48) для полного эффективного сечения упругого рассеяния находим выражение

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\frac{\gamma^2 Q_l^2(x)}{1+\gamma^2 Q_l^2(x)}. \tag{31,51}$$

---

[1]) Заметим, что для определения фазового сдвига можно использовать вариационный метод, который также является приближенным [см. В. Lippman and J. Schwinger, Phys. Rev. 79, 469 (1950)].

[2]) Л. Шифф, Квантовая механика, ИЛ, 1957, стр. 195, 196.

[3]) А. Соколов и Б. Керимов, ДАН СССР 108, 611 (1956); см. также Nuovo Cim. 5, 921 (1957).

[4]) Этим потенциалом можно воспользоваться также при исследовании упругого рассеяния электронов атомами с учетом экранирования кулоновского поля ядра, когда

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{r}e^{-r/a},$$

где a — «радиус» электронного облака атома.

В случае малых энергий падающих частиц, т. е. в случае большого значения дебройлевской длины волны $\lambda \gg 1/\varkappa_0$, мы можем использовать известное асимптотическое представление функции $Q_l(x)$, пригодное для больших значений x $(x \gg 1)$:

$$Q_l(x) \cong \frac{\Gamma(l+1)}{\Gamma\left(l+\frac{3}{2}\right)} \frac{\sqrt{\pi}}{(2x)^{l+1}} \cong \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{l+\frac{1}{2}}\,(2x)^{l+1}}. \qquad (31,52)$$

Тогда выражение (31,51) может быть преобразовано к виду

$$\sigma = \frac{V_0^2 K^2}{\pi c^2 \hbar^2} \left\{ \frac{1}{1+\delta^2} + \frac{4}{3} \frac{\left(\frac{k}{\varkappa_0}\right)^4}{1+\frac{4}{9}\left(\frac{k}{\varkappa_0}\right)^4 \delta^2} + \ldots \right\}, \qquad (31,53)$$

где $\delta^2 = V_0^2 k^2 K^2 / 4\pi^2 c^2 \hbar^2$. При $\varkappa_0^2 \to \infty$, когда $V_0 = 4\pi g^2/\varkappa_0^2$, в (31,53) остается лишь первый член ($l=0$), описывающий s-рассеяние. Тогда формула (31,53) дает эффективное сечение для рассеяния δ-образным потенциалом, установленное нами для бесспиновых частиц [см. (31,35)].

При исследовании рассеяния частиц в области высоких энергий нас, напротив, будет особенно интересовать случай $x \to 1+0$. Для этого воспользуемся следующим асимптотическим значением функции $Q_l(x)$ в случае $x = \operatorname{ch}\varphi > 1$:

$$Q_l(\operatorname{ch}\varphi) \cong \sqrt{\frac{\varphi}{\operatorname{sh}\varphi}}\, K_0\left(\left(l+\frac{1}{2}\right)\varphi\right)^{1)}. \qquad (31,54)$$

---

1) Для доказательства этой асимптотической формулы воспользуемся следующим методом [см. А. А. Соколов, Вестн. МГУ № 4, 77 (1947)]. Как известно, полиномы $Q_l(x)$ удовлетворяют следующему уравнению:

$$(x^2-1)\,Q_l''(x) + 2xQ_l'(x) - l(l+1)\,Q_l(x) = 0.$$

В случае $x > 1$ произведем замену переменных ($x = \operatorname{ch}\varphi$):

$$Q_l(x) = \sqrt{\frac{\varphi}{\operatorname{sh}\varphi}}\, I(\varphi).$$

Тогда для новой функции $I(\varphi)$ получаем уравнение

$$I''(\varphi) + \frac{1}{\varphi} I'(\varphi) - \left(l+\frac{1}{2}\right)^2 (1-\varepsilon)\, I = 0,$$

где $\varepsilon(\varphi) = \frac{1}{4}\left(l+\frac{1}{2}\right)^{-2}\left(\frac{1}{\operatorname{sh}^2\varphi} - \frac{1}{\varphi^2}\right)$.

Отсюда нетрудно видеть, что во всем интервале изменения φ $(0<\varphi<\infty)$ при $l > 1$ величина ε будет достаточно малой. В самом деле,

Поведение же функций $Q_l(x)$ при $x = 1 + 0$ $\left(\varphi = \operatorname{Arch} x \approx \sqrt{x^2-1}\right)$ определяется еще более простой асимптотической формулой:

$$Q_l(x) \cong K_0\left(\left(l+\frac{1}{2}\right)\sqrt{x^2-1}\right). \qquad (31,55)$$

Поэтому при высоких энергиях ($x \to 1 + 0$) фазы рассеяния η_l для потенциала Юкава имеют следующие асимптотические значения:

$$\delta_l = -\operatorname{tg}\eta_l \cong \gamma K_0\left[\left(l+\frac{1}{2}\right)\sqrt{x^2-1}\right]. \qquad (31,56)$$

В этом случае основную роль в сумме (31,51) играют члены со сравнительно большими значениями l. Переходя далее от суммирования по l к интегрированию по y $\left(y = l\sqrt{x^2-1}\right)$, получаем для эффективного сечения следующее выражение:

$$\sigma \cong \frac{8\pi}{k^2}\frac{1}{x^2-1}\int_0^\infty \frac{\gamma^2 y K_0^2(y)\,dy}{1+\gamma^2 K_0^2(y)}. \qquad (31,57)$$

Отсюда видно, что влиянием затухания можно пренебречь, если в точке $y_0 \cong 0,165\ldots$, соответствующей максимальному значению функции $y_0 K_0^2(y_0)$, имеет место неравенство

$$\gamma^2 K_0^2(y_0) \ll 1. \qquad (31,58)$$

$\varepsilon(\infty) = 0$, $\varepsilon(0) = -\frac{1}{12}\left(l+\frac{1}{2}\right)^{-2}$. Поэтому мы можем положить

$$I(\varphi) = C_1 K_0\left[\left(l+\frac{1}{2}\right)\varphi\right] + C_2 I_0\left[\left(l+\frac{1}{2}\right)\varphi\right],$$

где K_0 и I_0 — известные функции Бесселя нулевого порядка от мнимого аргумента.

Принимая во внимание, что при достаточно больших $\varphi \cong \ln 2x$

$$Q_l(x) \cong \sqrt{\frac{\pi}{l+\frac{1}{2}}}(2x)^{-l-1},$$

$$\sqrt{\frac{\varphi}{\operatorname{sh}\varphi}}K_0\left[\left(l+\frac{1}{2}\right)\varphi\right] \cong \sqrt{\frac{\pi}{l+\frac{1}{2}}}(2x)^{-l-1},$$

$$\sqrt{\frac{\varphi}{\operatorname{sh}\varphi}}I_0\left[\left(l+\frac{1}{2}\right)\varphi\right] \cong \frac{(2x)^l}{\sqrt{\pi\left(l+\frac{1}{2}\right)}},$$

мы найдем, что $C_2 = 0$ и $C_1 = 1$. Отсюда и следует формула (31,54).

Аналогичным способом легко показать, что в случае $x = \cos\varphi < 1$:

$$Q_l(\cos\varphi) \cong -\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\varphi}{\sin\varphi}}Y_0\left[\left(l+\frac{1}{2}\right)\varphi\right]. \qquad (31,54\text{a})$$

Тогда для эффективного сечения получаем значение

$$\sigma_{ac} \cong \frac{8\pi}{k^2} \frac{\gamma^2}{x^2-1} \int_0^\infty y K_0^2(y)\, dy = \frac{4\pi\gamma^2}{k^2(x^2-1)}\ ^{1)}, \tag{31,59}$$

совпадающее со значением для эффективного сечения, полученным по теории возмущений:

$$\sigma_0 = \frac{4\pi\gamma^2}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) Q_l^2(x) = \frac{4\pi\gamma^2}{k^2(x^2-1)}. \tag{31,60}$$

В другом крайнем случае, когда $\gamma^2 K_0^2(y_0) \gg 1$, затухание должно играть решающую роль. Согласно (31,57) эффективное сечение в этом случае равно

$$\sigma \cong \frac{8\pi}{k^2} \frac{1}{x^2-1} \int_0^{z_0/2} y\, dy = \pi \left(\frac{z_0}{\varkappa_0}\right)^2, \tag{31,61}$$

где z_0 определяется из уравнения $\frac{z_0}{\pi\gamma^2} e^{z_0} = 1$, т. е. $z_0 \cong \ln[\pi\gamma^2]$.

Иными словами, при высоких энергиях ($K \approx k$) мы будем иметь рассеяние как бы от непроницаемой сферы постоянного радиуса

$$\frac{z_0}{\varkappa_0} = \frac{1}{\varkappa_0} \ln\left[\pi\left(\frac{g^2}{\hbar c}\right)^2\right].$$

§ 32. Взаимодействие электронов с полем фотонов

а) Вероятность излучения. Прежде всего установим некоторые общие формулы теории переходных процессов для случая, когда в нулевом приближении электроны можно рассматривать как свободные, движение которых описывается уравнением

$$\mathrm{D}\psi_0 = \left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t} - \mathrm{H}\right)\psi_0 = 0, \tag{32,1}$$

причем

$$\mathrm{H} = \frac{c\hbar}{i}(\boldsymbol{\alpha}\nabla) + \rho_3 m_0 c^2.$$

Если в начальный момент свободный электрон обладает импульсом $\hbar\boldsymbol{k}$, то решение для функции ψ_0 принимает вид

$$\psi_0 = \frac{1}{L^{3/2}} b e^{-icKt + i\boldsymbol{kr}}. \tag{32,2}$$

[1]) Точнее, нижний предел интеграла в (31,59) должен иметь значение $\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}$. Поэтому мы можем положить $\sigma_{ac} = \sigma_0$ лишь при условии, что

$$\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1} \ll y_0.$$

Представим энергию возмущения поля W^+ в виде[1])

$$W^+(\boldsymbol{r}, t) = \sum_{\boldsymbol{l}_s} W^+(\boldsymbol{l}_s)\, e^{icLt - i\boldsymbol{l}\boldsymbol{r}}. \tag{32,3}$$

При рассмотрении эффектов первого порядка с функцией возмущения $W^+(\boldsymbol{l}_s)$ величина $\hbar\boldsymbol{l}$ есть импульс излучаемого (или поглощаемого) фотона. При вычислении же эффектов второго и высших порядков (например, испускания двух фотонов) функция $W^+(\boldsymbol{l}_s)$ будет иметь более сложный вид, причем величина $\hbar\boldsymbol{l}$ складывается из геометрической суммы импульсов всех испускаемых и поглощаемых частиц.

С учетом энергии возмущения $W^+(\boldsymbol{r}, t)$ решение волнового уравнения следует искать в виде

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 + \ldots$$

Решение ψ_0 невозмущенного уравнения определяется формулой (32,2), а для нахождения следующего приближения, т. е. функции ψ_1, мы имеем, как обычно, уравнение

$$\mathrm{D}\psi_1 = W^+(\boldsymbol{r}, t)\, \psi_0. \tag{32,4}$$

Согласно теории возмущений решение уравнения (32,4) следует искать в виде суммы решений невозмущенного уравнения

$$\psi_1 = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\boldsymbol{k}'}{}' C'(t)\, b' e^{-icK't + i\boldsymbol{k}'\boldsymbol{r}}, \tag{32,5}$$

причем коэффициенты C', определяющие вероятность пребывания электрона в состоянии $\boldsymbol{k}'$, необходимо считать зависящими от времени t.

В начальный момент времени ($t = 0$) электрон находится в состоянии $\boldsymbol{k}$, описываемом волновой функцией ψ_0. Поэтому в сумме (32,5) мы должны исключить состояние, для которого $\boldsymbol{k}' = \boldsymbol{k}$, и положить для начального момента времени ($t = 0$) коэффициенты C' равными нулю:

$$C'(0) = 0.$$

Подставляя (32,5) в (32,4) и принимая во внимание соотношение

$$\mathrm{D} b' e^{-icK't + i\boldsymbol{k}'\boldsymbol{r}} = 0,$$

---

[1]) В том случае, когда $W^+(\boldsymbol{r}, t)$ зависит от квантованных амплитуд поля фотонов, следует в ψ_0 и ψ_1 включить функцию числа фотонов $f(N)$. Однако, как было отмечено в § 27, эта функция будет автоматически учитываться в окончательном результате с помощью квантовых перестановочных соотношений. В самом деле, если в выражение $W^+(\boldsymbol{l}_s)$ будут входить вторично квантованные амплитуды поля фотонов, то для них следует учитывать перестановочные соотношения (27,10), где N — начальное число фотонов.

получаем уравнение для определения неизвестных коэффициентов C':

$$-\frac{\hbar}{i}\sum_{k''}{}' \dot{C}''b''e^{-icK''t+ik''r} = \sum_{l_s} W^+(l_s)\, b e^{-ict(K-L)+ir(k-l)}.$$

Умножая последнее уравнение на $L^{-3/2}b'^+e^{icK't-ik'r}$ и принимая во внимание начальное условие ($C'(0)=0$), а также условие ортонормированности, находим:

$$C' = -\frac{i}{\hbar}\sum_{l_s} b'^+W^+(l_s)\, b\delta_{k-l,\,k'}\int_0^t e^{-ict(K-L-K')}\,dt,$$

причем символ δ в этом выражении появился в результате интегрирования по всему объему:

$$\frac{1}{L^3}\int e^{i(k-l-k')r}d^3x = \delta_{k-l,\,k'}. \tag{32,6}$$

Последнее выражение показывает, что отличными от нуля будут только такие матричные элементы, для которых имеет место закон сохранения импульса

$$k' = k - l. \tag{32,6а}$$

Далее с помощью (27,25) находим для полной вероятности перехода электрона из состояния k, учитывая (27,10) для квантованных амплитуд электромагнитного поля[1]):

$$w = \frac{\partial}{\partial t}\sum_{k'}{}' C'^+C' = \frac{2\pi}{c\hbar^2}\sum_{k'}{}'\sum_{l_s} R^+R\delta_{k-l,\,k'}\delta(K-L-K'), \tag{32,7}$$

где

$$R = b'^+W^+(l_s)\, b. \tag{32,8}$$

При выводе соотношения (32,7) мы приняли во внимание равенство (27,27):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left|\int_0^t e^{-ict(K-L-K')}\,dt\right|^2 = \frac{2\pi}{c}\,\delta(K-L-K'), \tag{32,9}$$

---

[1]) При переходе к непрерывному спектру ($L\to\infty$) сумма по вектору k' может быть распространена на все значения вектора k', поскольку один отбрасываемый член ($k'=k$) будет иметь порядок $1/L^3$, и поэтому им можно пренебречь. Кроме того, следует учесть, что суммирование по l_s будет происходить только по вторично квантованным амплитудам фотонного поля. Поэтому, учитывая перестановочные соотношения (27,10), при определении квадратичной комбинации мы будем иметь

$$\sum_{l'_{s'}}\sum_{l_s} f(l'_{s'}, l_s) = \sum_{l_s} f(l_s, l_s).$$

которое приводит к закону сохранения энергии

$$K' = K - L. \tag{32,10}$$

Таким образом, излучение и поглощение света возможно, когда выполняются одновременно законы сохранения импульса (32,6а) и энергии (32,10).

б) Квантовая теория эффекта Черенкова. С помощью только что выведенных формул рассмотрим прежде всего вопрос о возможности спонтанного излучения фотонов свободно движущимся электроном.

Пусть свободный электрон движется с импульсом $\hbar \boldsymbol{k}$. Тогда его энергия будет равна величине $c\hbar K = c\hbar\sqrt{k^2 + k_0^2}$. Найдем квантовое условие, при котором он может излучать частицы (например, фотоны) с энергией $c\hbar L$ и с импульсом $\hbar \boldsymbol{l}$.

Излучая фотоны, электрон должен перейти в новое квантовое состояние ($\boldsymbol{k}'$, $K' = \sqrt{k'^2 + k_0^2}$). Как только что было указано, подобное излучение возможно, когда выполняются законы сохранения энергии и импульса:

$$\sqrt{k^2 + k_0^2} - L = \sqrt{k'^2 + k_0^2}, \tag{32,11}$$

$$\boldsymbol{k} - \boldsymbol{l} = \boldsymbol{k}'. \tag{32,12}$$

Возводя оба равенства в квадрат и вычитая одно из другого, найдем следующее выражение для косинуса угла между первоначальным направлением движения электрона $\boldsymbol{k}$ и направлением $\boldsymbol{l}$, по которому излучается фотон:

$$\cos\vartheta = \frac{1}{\beta}\frac{L}{l} + \frac{l}{2k}\left(1 - \frac{L^2}{l^2}\right), \tag{32,13}$$

причем величина β равна отношению скорости движения электрона к скорости света в вакууме:

$$\beta = \frac{k}{K} = \frac{v}{c}.$$

Напомним, что в вакууме энергия ($E = c\hbar L$) и импульс ($\boldsymbol{p} = \hbar \boldsymbol{l}$) фотонов связаны соотношением $E = cp$, т. е. величины L и l равны друг другу. Отсюда для косинуса угла находим

$$\cos\vartheta = \frac{1}{\beta}. \tag{32,13а}$$

Согласно теории относительности скорость электрона не может превышать скорость света в вакууме, т. е. величина β всегда должна оставаться меньше единицы, так что равенство (32,13а) становится невозможным. Это означает, что движущийся по инерции электрон не может излучать свет, поскольку не могут быть одновременно удовлетворены законы сохранения энергии и импульса,

и поэтому вероятность подобного процесса, согласно (32,7), обращается в нуль.

При движении электрона в какой-либо среде его скорость v всегда должна быть меньше скорости света c в вакууме. Однако скорость v может стать больше фазовой скорости света в данной среде: $c' = c/n < c$ (n — показатель преломления), т. е. возможен случай, когда $c/n < v < c$. Классическое исследование подобного явления, выполненное Франком и Таммом[1]), показало, что при этом должно иметь место излучение. Подобное излучение наблюдалось несколько ранее экспериментально Черенковым[2]) в лаборатории С. И. Вавилова («сверхсветовой» электрон).

Найдем квантовое обобщение теории эффекта Черенкова. С этой целью мы должны прежде всего построить феноменологическую квантовую теорию электромагнитного поля в диэлектриках.

Поперечное электромагнитное поле в диэлектриках подчиняется следующим уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{H} = \operatorname{rot}\boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}, \\ &\left(\nabla^2 - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{A} = 0, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{A} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (32,14)$$

Гамильтониан (или полная энергия) имеет вид:

$$H = \frac{1}{8\pi}\int (n^2E^2 + H^2)\,d^3x = \frac{1}{8\pi}\int \left(\frac{n^2}{c^2}\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)^2 + (\operatorname{rot}A)^2\right)d^3x.$$

Вводя скорость света в диэлектрике $c' = c/n$, мы приведем все эти уравнения к виду, совпадающему с уравнениями поля в вакууме:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{div}\boldsymbol{A} = 0, \quad \left(\nabla^2 - \frac{1}{c'^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{A} = 0; \\ &H = \frac{1}{8\pi}\int\left(\frac{1}{c'^2}\left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right)^2 + (\operatorname{rot}\boldsymbol{A})^2\right)d^3x, \end{aligned}\right\} \qquad (32,15)$$

в которых только скорость c заменена на фазовую скорость $c' = c/n$. Поэтому при квантовании поля в диэлектриках мы можем воспользоваться результатами, найденными нами при квантовании поперечного поля в вакууме (см. § 14), заменив в последних скорость c на скорость c'.

В соответствии с этим для вектор-потенциала мы находим выражение

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{L^{3/2}}\sum_{\varkappa}\sqrt{\frac{2\pi c'\hbar}{\varkappa}}\,(\boldsymbol{a}e^{-ic'\varkappa t + i\varkappa r} + \boldsymbol{a}^{+}e^{ic'\varkappa t - i\varkappa r}) \qquad (32,16)$$

---

[1]) И. М. Франк и И. Е. Тамм, ДАН СССР 14, 107 (1937). Подробное изложение классической теории эффекта Черенкова приведено также в монографии «Классическая теория поля», стр. 154.

[2]) П. А. Черенков, ДАН СССР 2, 451 (1934); С. И. Вавилов ДАН СССР 2, 457 (1934).

с перестановочными соотношениями для амплитуд

$$a_n a_{n'}^{\prime +} - a_{n'}^{\prime +} a_n = \delta_{\varkappa\varkappa'}\left(\delta_{nn'} - \frac{\varkappa_n \varkappa_{n'}}{\varkappa^2}\right). \qquad (32,17)$$

В частности, если в начальный момент фотоны отсутствуют, мы можем положить

$$\left.\begin{aligned} a_{n'}^{\prime +} a_n &= 0, \\ a_n a_{n'}^{\prime +} &= \delta_{\varkappa\varkappa'}\left(\delta_{nn'} - \frac{\varkappa_n \varkappa_{n'}}{\varkappa^2}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (32,18)$$

Тогда энергия взаимодействия (32,3) электрона с полем фотонов дается выражением

$$W^+(\boldsymbol{r}, t) = \frac{e}{L^{3/2}} \sum_{\boldsymbol{\varkappa}} \sqrt{\frac{2\pi c' \hbar}{\varkappa}} (\boldsymbol{\alpha a}^+) e^{ic'\varkappa t - i\boldsymbol{\varkappa r}}. \qquad (32,19)$$

Полагая

$$\left.\begin{aligned} W^+(l_s) &= \frac{e}{L^{3/2}} \sqrt{\frac{2\pi c' \hbar}{\varkappa}} (\boldsymbol{\alpha a}^+), \\ \boldsymbol{l} = \boldsymbol{\varkappa}, \quad L &= \frac{c'}{c}\varkappa = \frac{\varkappa}{n}, \end{aligned}\right\} \qquad (32,20)$$

мы найдем с помощью формул (32,7) и (32,13) следующее выражение для вероятности излучения:

$$w = \frac{2\pi}{c\hbar^2} \sum_{\boldsymbol{k}'} \sum_{\boldsymbol{\varkappa}} R^+ R \delta_{\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}' + \boldsymbol{\varkappa}} \delta\left(K' + \frac{\varkappa}{n} - K\right), \qquad (32,21)$$

где

$$R = \frac{e}{L^{3/2}} \sqrt{\frac{2\pi c' \hbar}{\varkappa}} b'^+ (\boldsymbol{\alpha a}^+) b, \qquad (32,22)$$

$$\cos\vartheta = \frac{1}{\beta n} + \frac{\varkappa}{2k}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right). \qquad (32,23)$$

Отсюда видно, что излучение возможно, когда выполняется условие $\beta n > 1$, т. е. когда скорость электрона становится больше скорости света в диэлектрике,

$$v > \frac{c}{n}.$$

Это соотношение совпадает с классическим условием появления излучения Черенкова.

Как видно из формулы (32,23), величина $\cos\vartheta$ лежит в интервале

$$\frac{1}{\beta n} \leqslant \cos\vartheta \leqslant 1;$$

соответствующее же значение для волнового числа $\varkappa$ будет при этом меняться в пределах

$$0 \leqslant \varkappa \leqslant \varkappa_{\text{макс}},$$

где

$$\varkappa_{\text{макс}} = 2k \frac{1 - 1/\beta n}{1 - 1/n^2}. \tag{32,24}$$

Согласно формуле (32,22) произведение R^+R может быть представлено в виде

$$R^+R = \frac{2\pi c\hbar e^2}{L^3 n\varkappa} b^+ (\alpha a) b' b'^+ (\alpha a^+) b =$$
$$= \frac{2\pi c\hbar e^2}{L^3 n\varkappa} \frac{1}{2} \sum_{s,\, s'} a_n a_{n'}^+ \frac{\rho_{11}\sigma_{nn'}}{4}. \tag{32,25}$$

При вычислении величин ρ_{11} и $\sigma_{nn'}$ по формулам (21,17) и (21,18) мы должны положить $\varepsilon = \varepsilon' = 1$, затем полученное выражение следует просуммировать по конечным состояниям спина $s' = \pm 1$ и усреднить по начальным, т. е. добавить множитель $1/2$ перед знаком суммы. Тогда имеем:

$$\sum_{s,\, s'} a_n a_{n'}^+ \frac{\rho_{11}\sigma_{nn'}}{4} =$$
$$= \frac{1}{4} \sum_{s,\, s'} \left(1 + ss' \frac{kk'}{KK'} - \frac{k_0^2}{KK'}\right) \left[(aa^+) \left(1 - ss' \frac{(\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}')}{kk'}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{i}{kk'} ((sk'\boldsymbol{k} - s'k\boldsymbol{k}') [aa^+]) + 2ss' \frac{(a\boldsymbol{k})(a^+\boldsymbol{k}')}{kk'}\right]. \tag{32,26}$$

С помощью перестановочных соотношений (32,18) находим:

$$(aa^+) = 2, \quad [aa^+] = 0, \quad (a\boldsymbol{k})(a^+\boldsymbol{k}') = (\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}') - \frac{(\boldsymbol{k}\boldsymbol{\varkappa})(\boldsymbol{k}'\boldsymbol{\varkappa})}{\varkappa^2}.$$

Отсюда выражение (32,25) принимает вид

$$R^+R = \frac{2\pi c\hbar e^2}{L^3 n\varkappa} \left(1 - \frac{k_0^2}{KK'} - \frac{(\boldsymbol{k}\boldsymbol{\varkappa})(\boldsymbol{k}'\boldsymbol{\varkappa})}{\varkappa^2 KK'}\right). \tag{32,27}$$

Подставляя (32,27) в (32,21), найдем после суммирования по вектору $\boldsymbol{k}'$ и перехода к непрерывному спектру:

$$w = \frac{e^2}{2\pi\hbar} \int \left(1 - \frac{k_0^2}{KK'} - \frac{(\boldsymbol{k}\boldsymbol{\varkappa})(\boldsymbol{k}'\boldsymbol{\varkappa})}{\varkappa^2 KK'}\right) \delta\left(K' + \frac{\varkappa}{n} - K\right) \frac{d^3\varkappa}{n\varkappa}. \tag{32,28}$$

Перейдем далее к сферическим координатам, а интегрирование по углу θ произведем с помощью соотношения[1])

$$\int \varphi(x)\, \delta(f(x))\, dx = \frac{\varphi(x_0)}{|f'(x_0)|}, \tag{32,29}$$

причем $x = \cos\theta$, а значение для x_0 следует определить из уравнения

$$f(x_0) = 0.$$

---

[1]) См. «Классическая теория поля», стр. 31.

Тогда находим:

$$dw = \frac{e^2}{\hbar n} \frac{1 - \frac{k_0^2}{KK'} - \frac{(\boldsymbol{k}\boldsymbol{\varkappa})(\boldsymbol{k}'\boldsymbol{\varkappa})}{\varkappa^2 KK'}}{\frac{\varkappa k}{K'}} \varkappa\, d\varkappa, \tag{32,30}$$

где $\boldsymbol{k}' = \boldsymbol{k} - \boldsymbol{\varkappa}$, $K' = K - \varkappa/n$, а значение для величины $(\boldsymbol{k}\boldsymbol{\varkappa})/k\varkappa = \cos\vartheta$ определяется выражением (32,23).

С помощью (32,30) после ряда преобразований мы получим следующее выражение для энергии, излучаемой электроном в единицу времени [1]):

$$W = \int c\hbar \frac{\varkappa}{n} dw =$$

$$= \frac{e^2\beta}{c} \int\limits_0^{\omega_m} \omega \left[1 - \cos^2\vartheta + \frac{n^2\omega^2\hbar^2}{2p^2c^2}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\right] d\omega, \tag{32,31}$$

причем $\cos\vartheta$, характеризующий направление излучения,

$$\cos\vartheta = \frac{1}{\beta n} + \frac{n\omega\hbar}{2pc}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right), \tag{32,32}$$

зависит от круговой частоты излучаемого света ω $(\omega = c\varkappa/n)$. Максимальную частоту излучения ω_m мы найдем, полагая $\cos\vartheta = 1$ (порог излучения):

$$\omega_m = \frac{2pc}{n\hbar} \frac{1 - 1/\beta n}{1 - 1/n^2}. \tag{32,33}$$

При исследовании поляризационных свойств излучения Черенкова [2]) можно с помощью методов, изложенных в § 28 п. в), показать, что первая часть излучения (классическая) в формуле (32,31), пропорциональная $(1 - \cos^2\vartheta)$, не зависит от спина электрона и является линейно поляризованной, причем вектор напряженности электрического поля излучаемых фотонов (т. е. вектор поляризации) лежит в плоскости движения электрона и фотона $(\boldsymbol{\varkappa k})$, т. е. направлен по образующей конуса излучения.

Другая же часть излучения (квантовая), пропорциональная $\hbar^2(1 - 1/n^2)\,n^2\omega^2/2p^2c^2$, обязана спину электрона и является уже неполяризованной. В этом заключается качественное различие между классической и квантовой частями черенковского излучения.

Попутно подчеркнем, что на пороге излучения $(\cos\vartheta = 1)$ отличной от нуля будет только квантовая часть.

---

[1]) А. А. Соколов, ДАН 28, 415 (1940). Квантовая теория эффекта Черенкова для предельных случаев (нерелятивистского и ультрарелятивистского) была разработана также В. Л. Гинзбургом, ЖЭТФ 10, 589 (1940).

[2]) А. А. Соколов и Ю. М. Лоскутов, ЖЭТФ 32, 630 (1957).

Заметим, что при $\hbar \to 0$ формулы (32,31) и (32,32) для излучения «сверхсветового» электрона переходят в классические:

$$W = \frac{e^2\beta}{c} \int\limits_0^{\omega_m} \omega (1 - \cos^2 \vartheta)\, d\omega,$$

$$\cos\vartheta = \frac{1}{\beta n},$$

причем при $n = \mathrm{const}$ величина ω_m обращается в бесконечность, и поэтому выражение для интенсивности излучения будет расходиться. Случай $n = \mathrm{const}$ является нереальным, поскольку показатель преломления в области больших частот быстро спадает примерно до единицы, и поэтому в формулах излучения следует считать величину n зависящей от частоты ω, а верхний предел интеграла должен быть определен из уравнения

$$\beta n(\omega'_m) = 1.$$

Рассмотренный феноменологический метод подсчета, помимо выяснения ряда принципиальных вопросов, связанных с излучением свободными частицами, оказался весьма продуктивным также и при вычислении общей потери энергии движущимися в среде электронами (см. также § 37).

§ 33. Дисперсия света

При прохождении сквозь вещество свет претерпевает рассеяние. В теории рассеяния следует различать два случая: 1) Энергия фотонов имеет тот же порядок, что и энергия связи электронов в атоме. Это условие примерно соответствует области видимого света вплоть до мягких рентгеновских лучей. В этом случае рассеяние зависит от дискретных состояний атома, что приводит или к дисперсии, или к комбинационному рассеянию света. 2) Энергия фотонов во много раз превышает энергию связи электронов в атоме. При этом мы вообще можем пренебречь энергией связи и рассматривать электроны атома как свободные.

а) Нерелятивистская теория. В первом случае, т. е. при рассеянии света сравнительно большой длины волны, мы можем пренебречь релятивистскими и спиновыми поправками и ограничиться при построении теории нерелятивистским уравнением Шредингера

$$\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t} - \mathrm{H}\right)\psi = \left(\frac{e}{m_0 c}(\mathbf{A}\mathbf{p}) + \frac{e^2}{2m_0 c^2}A^2\right)\psi, \tag{33,1}$$

где

$$\mathbf{A} = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\varkappa} \sqrt{\frac{2\pi c\hbar}{\varkappa}} \left(\mathbf{a} e^{-ic\varkappa t + i\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{r}} + \mathbf{a}^+ e^{ic\varkappa t - i\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{r}}\right) \tag{33,2}$$

является вектор-потенциалом квантованного поля фотонов.

Рассеяние света является процессом второго порядка и сводится к поглощению атомом первичного фотона ($\varkappa$) с последующим испусканием вторичного (рассеянного) фотона ($\varkappa'$).

Первый член правой части уравнения (33,1) описывает два процесса первого порядка, а именно: поглощение света

$$\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}-\mathrm{H}\right)\psi(N-1)=\frac{e}{m_0c}\frac{1}{L^{3/2}}\sqrt{\frac{2\pi c\hbar}{\varkappa}}\,e^{-ic\varkappa t+i\varkappa r}(\boldsymbol{a}\mathrm{p})\,\psi(N) \quad (33,3)$$

и испускание света (знак суммы по $\varkappa'$ мы опускаем)

$$\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}-\mathrm{H}\right)\psi(N+1)=$$
$$=\frac{e}{m_0c}\frac{1}{L^{3/2}}\sqrt{\frac{2\pi c\hbar}{\varkappa'}}\,e^{ic\varkappa' t-i\varkappa' r}(\boldsymbol{a}'^{+}\mathrm{p})\,\psi(N). \quad (33,4)$$

Второй же член правой части уравнения (33,1) описывает три различных процесса второго порядка, а именно: рассеяние света

$$\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}-\mathrm{H}\right)\psi(N)=$$
$$=\frac{e^2}{2m_0c^2}\frac{1}{L^3}\frac{4\pi c\hbar}{\sqrt{\varkappa\varkappa'}}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}'^{+})\,e^{-ict\,(\varkappa-\varkappa')+ir\,(\varkappa-\varkappa')}\,\psi(N), \quad (33,5)$$

а также непосредственное испускание ($\sim(\boldsymbol{a}^{+}\boldsymbol{a}'^{+})$) или поглощение ($\sim(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}')$) двух фотонов. Два последних процесса в данном случае нас не интересуют, и поэтому мы их здесь рассматривать не будем.

Из уравнений (33,3) и (33,4), описывающих процессы первого порядка — поглощение и испускание света, — мы можем составить два уравнения, которые наряду с уравнением (33,5) будут также описывать процессы дисперсии, т. е. процессы второго порядка.

При отсутствии возмущающей силы (т. е. когда вектор-потенциал $\boldsymbol{A}$ равен нулю) собственные значения (т. е. возможные значения энергии E_b электрона в атоме) и собственные функции ψ_b связаны между собою уравнением Шредингера (невозмущенное состояние)

$$(E_b-\mathrm{H})\,\psi_b=0. \quad (33,6)$$

Если при $t=0$ электрон находится в некотором состоянии a ($b=a$), то начальная волновая функция будет иметь вид

$$\psi_0=e^{-i\frac{E_a}{\hbar}t}\,\psi_a(\boldsymbol{r})=e^{-ic\varkappa_a t}\,\psi_a(\boldsymbol{r}).$$

Обозначим через $\hbar\boldsymbol{\varkappa}$ и $\hbar\boldsymbol{\varkappa}'$ импульсы фотонов соответственно в начальном (до рассеяния) и в конечном (после рассеяния) состояниях. Процесс рассеяния, складываясь из двух процессов первого порядка, может происходить двояким путем: во-первых, атом вначале может поглотить фотон $\varkappa$ (в промежуточном состоянии фотоны отсутствуют) и затем испустить рассеянный фотон $\varkappa'$; во-вторых,

атом вначале может испустить рассеянный фотон $\varkappa'$ (в промежуточном состоянии будут два фотона $\varkappa$ и $\varkappa'$), после чего поглотить первичный фотон $\varkappa$.

Исследуем прежде всего процесс рассеяния первым способом. Соответствующие выражения для волновой функции найдем по методу теории возмущений:

$$\psi = \psi_0 + \psi_1' + \psi_2' + \ldots,$$

причем согласно (33,3) и (33,4) имеем:

$$\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t} - \mathrm{H}\right)\psi_1' = \frac{e}{m_0 c}\frac{1}{L^{3/2}}\sqrt{\frac{2\pi c\hbar}{\varkappa}}\, e^{-ic\varkappa t + i\varkappa r}(a\mathrm{p})\,\psi_0, \qquad (33,7)$$

$$\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t} - \mathrm{H}\right)\psi_2' = \frac{e}{m_0 c}\frac{1}{L^{3/2}}\sqrt{\frac{2\pi c\hbar}{\varkappa'}}\, e^{ic\varkappa' t - i\varkappa' r}(a'^{+}\mathrm{p})\,\psi_1'. \qquad (33,8)$$

Функция числа фотонов должна быть включена в волновые функции ψ. Так, например, волновая функция ψ_0 описывает состояние, в котором имеется лишь первоначальный фотон $\varkappa$; функция ψ_1' описывает состояние, в котором фотоны отсутствуют; наконец, состояние ψ_2' соответствует наличию одного рассеянного фотона $\varkappa'$. Учитывая правила действия вторично квантованных амплитуд a и a'^{+} на функцию числа частиц, мы получим, что в правых и левых частях последних равенств будет стоять одно и то же выражение для функции числа фотонов, которую, таким образом мы можем не принимать во внимание при дальнейших вычислениях.

Решение для промежуточного состояния ψ_1' будем искать в виде

$$\psi_1' = C_b'(t)\, e^{-ic\varkappa_b t}\,\psi_b(r),$$

где

$$\varkappa_b = \frac{E_b}{c\hbar}.$$

Подставляя выражение для ψ_1' в уравнение (33,7) и принимая во внимание соотношение (33,6), а также условие ортонормированности, получаем:

$$-\frac{\hbar}{i}\dot{C}_b' = \frac{e}{m_0 c}\frac{1}{L^{3/2}}\sqrt{\frac{2\pi c\hbar}{\varkappa}}\,(a p_{ba})\, e^{-ict(\varkappa - \varkappa_{ba})}, \qquad (33,8а)$$

где

$$\varkappa_{ba} = \varkappa_b - \varkappa_a = \frac{E_b - E_a}{c\hbar}, \quad p_{ba} = \int \psi_b^{+} e^{i\varkappa r}\mathrm{p}\psi_a\, d^3x.$$

Если длина волны $\lambda \sim 1/\varkappa$ фотона велика по сравнению с размерами атома, то экспоненциальный множитель $e^{i\varkappa r}$ можно положить равным единице (дипольное излучение; см. более подробно § 27). Тогда матричный элемент принимает вид

$$p_{ba} = \int \psi_b^{+}\,\mathrm{p}\psi_a d^3x. \qquad (33,9)$$

Из уравнения (33,8а) находим:

$$C_b' = -\frac{e}{\hbar m_0 c}\frac{1}{L^{3/2}}\sqrt{\frac{2\pi c\hbar}{\varkappa}}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{p}_{ba})\frac{e^{-ic(\varkappa-\varkappa_{ba})t}}{c(\varkappa_{ba}-\varkappa)}. \qquad (33,10)$$

Подставляя функцию ψ_1' с найденным выражением для коэффициента C_b' в уравнение (33,8), получаем уравнение второго порядка, описывающее процесс рассеяния:

$$\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t} - \mathrm{H}\right)\psi_2' = -\frac{e^2}{m_0^2c^2}\frac{1}{L^3}\frac{2\pi}{\sqrt{\varkappa\varkappa'}}(\boldsymbol{a}'^{+}\mathbf{p})(\boldsymbol{a}\boldsymbol{p}_{ba})\,e^{-ict(\varkappa-\varkappa'+\varkappa_a)}\frac{\psi_b}{\varkappa_{ba}-\varkappa}. \qquad (33,11)$$

Аналогичным способом мы можем найти уравнение, описывающее другой процесс рассеяния (вначале испускается фотон $\varkappa'$):

$$\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t} - \mathrm{H}\right)\psi_2'' = -\frac{e^2}{m_0^2c^2}\frac{1}{L^3}\frac{2\pi}{\sqrt{\varkappa\varkappa'}}(\boldsymbol{a}\mathbf{p})(\boldsymbol{a}'^{+}\boldsymbol{p}_{ba})\,e^{-ict(\varkappa-\varkappa'+\varkappa_a)}\frac{\psi_b}{\varkappa_{ba}+\varkappa'}. \qquad (33,12)$$

Наконец, третий возможный процесс рассеяния определяется непосредственно уравнением (33,5)

$$\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t} - \mathrm{H}\right)\psi_2''' = \frac{e^2}{m_0 c}\frac{1}{L^3}\frac{2\pi\hbar}{\sqrt{\varkappa\varkappa'}}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}'^{+})\,e^{-ict(\varkappa-\varkappa'+\varkappa_a)}\psi_a, \qquad (33,13)$$

причем в последнем выражении мы положили, как и в предыдущих случаях, экспоненциальные члены $e^{i\varkappa r}$ и $e^{-i\varkappa' r}$ равными единице (дипольное излучение).

Общая волновая функция ψ_2, описывающая все три возможных процесса рассеяния, будет равна сумме

$$\psi_2 = \psi_2' + \psi_2'' + \psi_2'''.$$

Для ее нахождения мы имеем уравнение

$$\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t} - \mathrm{H}\right)\psi_2 = \frac{2\pi\hbar e^2}{m_0 c L^3\sqrt{\varkappa\varkappa'}}\left[-\frac{(\boldsymbol{a}'^{+}\mathbf{p})(\boldsymbol{a}\boldsymbol{p}_{ba})\psi_b}{c\hbar m_0(\varkappa_{ba}-\varkappa)} - \frac{(\boldsymbol{a}\mathbf{p})(\boldsymbol{a}'^{+}\boldsymbol{p}_{ba})\psi_b}{c\hbar m_0(\varkappa_{ba}+\varkappa')} + (\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}'^{+})\psi_a\right]e^{-ict(\varkappa-\varkappa'+\varkappa_a)}. \qquad (33,14)$$

Решение уравнения (33,14) ищем в виде

$$\psi_2 = C_{a'}(t)\,e^{-ic\varkappa_{a'}t}\psi_{a'}(\boldsymbol{r}).$$

Заметим, что конечное состояние a' отличается от начального a даже в том случае, когда $E_a = E_{a'}$ (когерентное рассеяние). В самом деле, в состоянии a мы имеем фотон с импульсом $\hbar\boldsymbol{\varkappa}$, а в состоянии a' — с импульсом $\hbar\boldsymbol{\varkappa}'$.

На коэффициент $C_{a'}(t)$ мы должны наложить условие

$$C_{a'}(0) = 0, \qquad (33,15)$$

отражающее то обстоятельство, что при $t=0$ вся система с достоверностью находится в состоянии a.

Заметим, что мы не ввели начального условия (33,15) при вычислении коэффициентов C_b промежуточных состояний, что является допустимым лишь в случае отсутствия резонанса ($\varkappa \neq |\varkappa_{ba}|$, $\varkappa' \neq |\varkappa_{ba}|$), когда вероятности процессов первого порядка практически обращаются в нуль [1]).

Повторяя вычисления, которые мы произвели при выводе формулы (33,10), получаем для коэффициента $C_{a'}(t)$ выражение

$$C_{a'}(t) = \frac{2\pi e^2}{icm_0 L^3 \sqrt{\varkappa\varkappa'}} R \int_0^t e^{-ict(\varkappa - \varkappa' + \varkappa_{aa'})}\, dt,$$

где

$$R = -\frac{(\boldsymbol{a}'^{+}\boldsymbol{p}_{a'b})(\boldsymbol{a}\boldsymbol{p}_{ba})}{c\hbar m_0(\varkappa_{ba} - \varkappa)} - \frac{(\boldsymbol{a}\boldsymbol{p}_{a'b})(\boldsymbol{a}'^{+}\boldsymbol{p}_{ba})}{c\hbar m_0(\varkappa_{ba} + \varkappa')} + (\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}'^{+})\delta_{aa'}. \tag{33,16}$$

Отсюда с помощью соотношений (29,13) и (27,27) находим эффективное сечение:

$$\sigma = \frac{L^3}{c}\frac{\partial}{\partial t}\sum_{\varkappa'} C_{a'}^{+}C_{a'} = r_0^2 \oint d\Omega' \int_0^\infty R^{+}R\,\delta(\varkappa' - \varkappa - \varkappa_{aa'})\frac{\varkappa'\, d\varkappa'}{\varkappa}. \tag{33,17}$$

При вычислении эффективного сечения мы произвели суммирование по всем импульсам $\hbar\varkappa'$ рассеянного фотона. При вычислении же этой суммы мы сделали переход к непрерывному спектру.

б) Дисперсионные формулы. В случае когерентного рассеяния, т. е. дисперсии света, атом после рассеяния переходит в первоначальное энергетическое состояние ($E_{a'} = E_a$, $\varkappa_{aa'} = 0$).

В результате интегрирования δ-функции мы найдем частоту рассеянного фотона, которая будет совпадать с частотой первоначального фотона ($\varkappa = \varkappa'$).

Согласно (33,17) будем иметь дисперсионную формулу

$$\sigma = r_0^2 \oint R^{+}R\, d\Omega', \tag{33,18}$$

причем в случае вещественных матричных элементов ($\boldsymbol{p}_{ab} = \boldsymbol{p}_{ba}$)

$$R = \frac{2\varkappa_{ba}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{p}_{ba})(\boldsymbol{a}'^{+}\boldsymbol{p}_{ba})}{c\hbar m_0(\varkappa^2 - \varkappa_{ba}^2)} + (\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}'^{+}). \tag{33,19}$$

Если частота падающего света сравнима с квантовой частотой излучения ($\varkappa \sim |\varkappa_{ba}|$), но не равна ей [2]), то в равенстве (33,19) мы можем пренебречь вторым членом по сравнению с первым.

---

[1]) Вычисления вероятности процессов первого порядка при наличии резонанса (спонтанное испускание и поглощение) были рассмотрены нами в § 27. Исследование же рассеяния при наличии резонанса будет произведено в § 35.

[2]) Случай резонанса ($\varkappa = |\varkappa_{ba}|$) будет рассмотрен нами в § 35.

Перестановочные соотношения амплитуд неполяризованного света имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} a_{s'}^{+} a_s &= \frac{1}{2}\left(\delta_{ss'} - \varkappa_s^0 \varkappa_{s'}^0\right), \\ a'_s a'^{+}_{s'} &= \delta_{ss'} - \varkappa'^0_s \varkappa'^0_{s'}. \end{aligned}\right\} \qquad (33,20)$$

Появление множителя 1/2 связано с усреднением по состояниям поляризации падающего фотона.

С помощью последних перестановочных соотношений легко показать, что

$$\left(a' p_{ba}\right)\left(a'^{+} p_{ba}\right) = p_{ba}^2 \sin^2 \theta',$$

где θ' — угол между направлением распространения рассеянного фотона и вектором p_{ba}.

Рассмотрим далее частный случай, когда падающий фотон линейно поляризован, благодаря чему вектор электрической напряженности будет совпадать с вектором p_{ba}. Тогда вместо перестановочных соотношений (33,20) будем иметь $a_p^+ a_p = 1$. В этом случае

$$(a^+ p_{ba})(a p_{ba}) = p_{ba}^2.$$

Отсюда

$$R^+ R = \frac{\sin^2 \theta' \varkappa_{ba}^4}{\left(\varkappa_{ba}^2 - \varkappa^2\right)^2} f_{ba}^2. \qquad (33,21)$$

Величина

$$f_{ba} = \frac{2 p_{ba}^2}{c\hbar m_0 \varkappa_{ba}} \qquad (33,22)$$

получила название «силы осциллятора».

Подставляя (33,21) в (33,18), найдем после интегрирования по телесному углу Ω' и суммирования по всем промежуточным состояниям b следующее выражение для эффективного сечения:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \sum_b \frac{f_{ba}^2 \varkappa_{ba}^4}{\left(\varkappa_{ba}^2 - \varkappa^2\right)^2}. \qquad (33,23)$$

Как было отмечено выше, случай резонанса $\varkappa = |\varkappa_{ba}|$ требует дополнительного рассмотрения.

Сравним дисперсионную формулу, полученную по квантовой теории, с классической.

Как известно, эффективное сечение рассеяния света гармоническим осциллятором, вычисленное по классической теории, имеет вид

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \frac{\varkappa^4}{\left(\varkappa_0^2 - \varkappa^2\right)^2 + \frac{\varkappa^2 \gamma^2}{c^2}}, \qquad (33,24)$$

где $c\varkappa_0$ — круговая частота колебания гармонического осциллятора, а $\gamma = {}^2/_3 r_0 c\varkappa_0^2$ — коэффициент затухания (см. также § 30). В областях, для которых $\varkappa \sim \varkappa_0$, но лежащих вне резонанса ($c|\varkappa - \varkappa_0| \gg \gamma$), мы имеем:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \frac{\varkappa_0^4}{(\varkappa_0^2 - \varkappa^2)^2}. \qquad (33,25)$$

Из сопоставления формулы (33,23) с формулой (33,25) мы видим, что квантовая формула переходит в классическую, если квантовую частоту колебания заменить классической, а «силу осциллятора» положить равной числу рассеивающих частиц, т. е. в данном случае единице:

$$\left.\begin{aligned} \varkappa_{ba} &\to \varkappa_0, \\ f_{ba} &\to N_a = 1. \end{aligned}\right\} \qquad (33,26)$$

Найдем для примера значение величины f_{ba} невозбужденного гармонического осциллятора ($a = 0$). Принимая во внимание известное из квантовой механики соотношение

$$|p_{ba}| = c\varkappa_{ba} m_0 |x_{ba}|, \qquad (33,27)$$

мы можем «силу осциллятора» представить в виде

$$f_{ba} = \frac{2c\varkappa_{ba} m_0 |x_{ba}|^2}{\hbar}. \qquad (33,28)$$

В частности, когда состояние b соответствует n', а состояние a соответствует 0, имеем

$$f_{n'0} = \frac{2c\varkappa_{n'0} m_0 |x_{n'0}|^2}{\hbar}.$$

В квантовой теории энергия гармонического осциллятора может принимать значения:

$$E_{n'} = \hbar\varkappa_0 c\left(n' + \frac{1}{2}\right),$$

где $c\varkappa_0$ — круговая частота его колебания, а отличными от нуля могут быть только квантовые переходы между соседними уровнями. Поэтому для невозбужденного гармонического осциллятора ($a = 0$) единственным отличным от нуля будет матричный элемент при $n' = 1$:

$$|x_{01}|^2 = \frac{\hbar}{2c\varkappa_0 m_0}. \qquad (33,29)$$

Соответствующее значение для квантовой частоты излучения равно

$$\varkappa_{10} = \frac{E_1 - E_0}{c\hbar} = \varkappa_0,$$

т. е. совпадает с классической частотой излучения.

Отсюда для «силы осциллятора», т. е., в терминологии классической электродинамики, числа рассеивающих частиц, мы получаем значение

$$f_{10}=1. \qquad (33,30)$$

Таким образом, нерелятивистская квантовая теория рассеяния на невозбужденных гармонических осцилляторах приводит к классическому результату (33,25).

Несмотря на то, что общая структура квантовой и классической формул дисперсии совпадают друг с другом, между ними имеются следующие различия. В классической теории в «резонансном знаменателе» стоит механическая частота колебаний $\omega_0 = c\varkappa_0$; в квантовой же теории — частота перехода $\omega_{ba}=(E_b-E_a)/\hbar$. Обе эти частоты в частном случае гармонического осциллятора совпадают друг с другом. В общем же случае опыты по аномальной дисперсии (наблюдаемой вблизи резонансной частоты) целиком подтвердили квантовые выводы. Наиболее убедительными в этом отношении оказались опыты Д. С. Рождественского, который применил для исследования аномальной дисперсии особый метод крюков[1]).

Второе отличие квантового результата от классического заключается в следующем. Значение для числа N_a рассеивающих частиц в единице объема заменяется в квантовом случае силой осциллятора N_af_{ba}. Заметим, что величины N_a и N_af_{ba} связаны между собою соотношением[2])

$$N_a\sum_b f_{ba}=N_a. \qquad (33,31)$$

Однако величина N_a является целым положительным числом, в то время как сила осциллятора N_af_{ba} может принимать не только дробные, но даже и отрицательные значения.

Особенно отчетливо это различие проявляется при исследовании величины показателя преломления. Как известно, электронная теория Лоренца приводит к следующей формуле для показателя преломления:

$$n^2-1=\frac{4\pi e^2}{m_0}\frac{N_a}{\omega_0^2-\omega^2}. \qquad (33,32)$$

В квантовом же случае мы имеем:

$$n^2-1=\frac{4\pi e^2}{m_0}\sum_b\frac{N_af_{ba}}{\omega_{ba}^2-\omega^2}. \qquad (33,33)$$

---

[1]) Д. С. Рождественский, ЖРФХО (часть физическая) 42 (1910)

[2]) Доказательство равенства $\sum_b f_{ba}=1$ в общем случае дано в книге Г. Бете, Квантовая механика простейших систем, ОНТИ, 1935, стр. 223. В частном случае гармонического осциллятора это условие мы только что доказали (см. формулу (33,30))].

Классическая формула (33,32) написана для частного случая, когда колебания всех электронов происходят с одной и той же частотой ω_0, а квантовая (33,33) — когда все электроны находятся в состоянии a. В противном случае мы должны были бы еще взять сумму по частотам (классический случай) или по начальным состояниям электрона (квантовый случай). Для гармонического осциллятора квантовая частота излучения равна классической: $\omega_{ba} = \omega_0$. Поэтому, принимая во внимание еще соотношение (33,31), мы найдем, что при рассеянии на гармонических осцилляторах квантовая формула дисперсии переходит в классическую.

Как видно из формулы (33,28), при $E_b > E_a$ (например, дисперсия на невозбужденных атомах) сила осциллятора f_{ba} будет величиной положительной ($f_{ba} > 0$), и мы получаем кривую для положительной дисперсии (рис. 8,*а*)[1]. В этом случае по внешнему виду

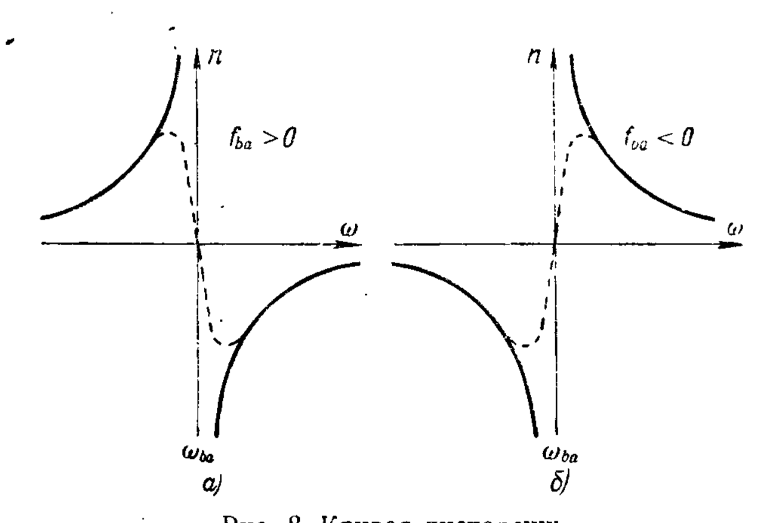


Рис. 8. Кривая дисперсии:

а) положительная дисперсия, *б*) отрицательная дисперсия.

кривая дисперсии по квантовой теории целиком повторяет классическую.

Наоборот, при $E_b < E_a$ (эти члены могут появиться при рассмотрении дисперсии на возбужденных атомах) сила осциллятора принимает отрицательное значение, и мы получаем кривую для отрицательной дисперсии (рис. 8,*б*), которую совершенно нельзя объяснить с помощью классической теории. Обнаружение в опытах Ладенбурга явлений отрицательной дисперсии окончательно подтвердило выводы квантовой теории.

Все рассмотренные выше выводы справедливы только в случае рассеяния света с частотой, имеющей порядок частоты, излучаемой

[1]) Пунктиром проведена кривая, характеризующая аномальную дисперсию. Для ее получения необходимо учесть члены с затуханием.

атомом. С увеличением частоты падающих фотонов до значений $\varkappa \gg |\varkappa_{ba}|$ (например, рассеяние рентгеновских лучей) наше приближение (33,21) для вычисления матричного элемента R становится непригодным.

В этом случае мы можем пренебречь в равенстве (33,19) первым членом по сравнению со вторым и написать для величины R следующее приближенное выражение:

$$R = (\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}'^{+}),$$

откуда, принимая во внимание перестановочные соотношения (33,20), находим:

$$R^{+}R = \frac{1}{2}(1 + \cos^2\theta), \tag{33,34}$$

где θ — угол между направлениями движения падающего и рассеянного фотонов. Подставляя (33,34) в (33,18), найдем после интегрирования по сферическим углам выражение для эффективного сечения (формулу Томсона):

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_0^2. \tag{33,35}$$

Формула Томсона была получена также и в классической теории рассеяния света свободными электронами, т. е. когда можно пренебречь энергией связи электронов в атоме. Формула Томсона имеет весьма узкие границы применимости. С одной стороны, она ограничена, как мы только что показали, малыми частотами колебаний электронов в атоме, а с другой — большими частотами, соответствующими собственной энергии электрона ($\nu = m_0c^2/\hbar$). В самом деле, формула Томсона описывает когерентное рассеяние ($\varkappa' = \varkappa$); если же энергия первичного фотона $\hbar\nu$ сравнима с энергией электрона m_0c^2, то при рассеянии мы должны наблюдать изменение частоты (эффект Комптона). В этом случае следует учитывать эффект отдачи, что будет подробно рассмотрено нами в следующем параграфе.

в) Комбинационное рассеяние. Если после рассеяния электрон в атоме переходит на уровень a', не совпадающий с первоначальным уровнем a ($E_a \neq E_{a'}$), то согласно (33,16) и (33,17) частота рассеянного света ($\nu' = c\varkappa'/2\pi$) будет отличаться от частоты падающего ($\nu = c\varkappa/2\pi$), причем

$$\varkappa' = \varkappa - \varkappa_{a'a} = \varkappa - \frac{E_{a'} - E_a}{c\hbar}. \tag{33,36}$$

Такое рассеяние с изменением частоты называется комбинационным. При $E_{a'} > E_a$ мы должны наблюдать красное смещение ($\varkappa' < \varkappa$), а при $E_{a'} < E_a$ — фиолетовое ($\varkappa' > \varkappa$). Комбинационное рассеяние (или Раман-эффект) было обнаружено экспериментально в жидкостях Раманом [1]), а в твердых телах — Мандельштамом и Ландсбергом [2]).

---

[1]) C. V. Raman and K. S. Krishnan, Nature **121**, 501 (1928).

[2]) Г. С. Ландсберг и Л. И. Мандельштам, Naturwiss. **16**, 557 (1928)

Оно играет важную роль при исследовании строения молекул. В самом деле, многие частоты колебаний молекул, лежащие в инфракрасной части, трудно было обнаружить оптическим путем, а некоторые вообще являлись оптически неактивными.

При исследовании же комбинационного рассеяния частоты молекулярных колебаний накладываются на основную частоту и поэтому могут быть обнаружены (включая даже оптически неактивные) в видимой части спектра. Комбинационное рассеяние представляет собою большую и важную главу современной физики, связанную с изучением строения молекул.

§ 34. Рассеяние света свободными электронами

а) Общие формулы. Как было показано в предыдущем параграфе, при рассеянии света веществом в том случае, когда энергия фотонов во много раз превышает энергию связи электронов в атоме, оказывается возможным рассматривать электроны как свободные. Исследуя подобную задачу в нерелятивистском случае, мы нашли, что частота рассеянного света равна частоте падающего ($\varkappa' = \varkappa$), а для эффективного сечения получили формулу Томсона.

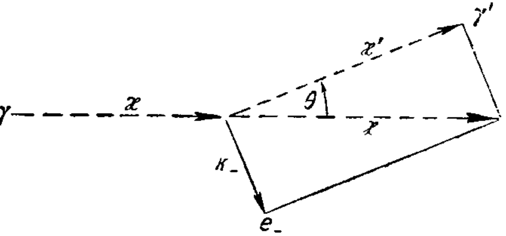


Рис. 9. Эффект Комптона.

Однако такое приближение годится лишь в том случае, когда энергия фотонов ε много меньше собственной энергии электронов m_0c^2 ($\varepsilon \ll m_0c^2$, или $\varkappa \ll k_0$). В противном случае мы должны решать всю проблему с помощью релятивистских уравнений. Релятивистское уравнение позволяет при любых энергиях учитывать отдачу (эффект Комптона; см. рис. 9), а также найти более точное значение эффективного сечения σ (формула Клейна — Нишины).

Частота рассеянного света может быть найдена с помощью законов сохранения энергии и импульса. Выбирая, в частности, систему координат, в которой до рассеяния электрон покоится ($\boldsymbol{k} = 0$, $K = k_0$), мы имеем:

$$\varkappa - \varkappa' = K' - k_0, \tag{34,1}$$

$$\boldsymbol{\varkappa} - \boldsymbol{\varkappa}' = \boldsymbol{k}', \tag{34,2}$$

где величины $\hbar\boldsymbol{k}'$ и $c\hbar(K' - k_0)$ являются импульсом и энергией, которые получает электрон в результате рассеяния.

Возводя равенства (34,1) и (34,2) в квадрат и вычитая из второго равенства первое, находим:

$$\varkappa\varkappa'(1 - \cos\theta) = k_0(K' - k_0) = k_0(\varkappa - \varkappa'), \tag{34,3}$$

где θ — угол рассеяния. Отсюда получаем:

$$\varkappa' = \frac{k_0 \varkappa}{k_0 + \varkappa(1 - \cos\theta)}. \tag{34,4}$$

Из последнего равенства видно, что в нерелятивистском случае ($\varkappa \ll k_0$) частóты падающего и рассеянного излучений совпадают ($\varkappa' = \varkappa$). В ультрарелятивистском же случае ($\varkappa \gg k_0$) лишь для очень малых углов рассеяния $(1 - \cos\theta) \ll k_0/\varkappa$ имеем совпадение частот ($\varkappa' = \varkappa$). Для больших же углов рассеяния $[(1 - \cos\theta) \gg k_0/\varkappa]$ частота $\varkappa'$ не будет зависеть от частоты падающего света и определится выражением

$$\varkappa' = \frac{k_0}{1 - \cos\theta}. \tag{34,5}$$

Вводя вместо волнового числа $\varkappa$ длину волны $\lambda = 2\pi/\varkappa$, мы легко преобразуем формулу (34,4) к известному виду:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_0(1 - \cos\theta), \tag{34,6}$$

где $\lambda_0 = 2\pi/k_0 = h/m_0 c = 2{,}4 \cdot 10^{-10}$ *см* — комптоновская длина волны. Заметим, что эффективное сечение можно рассматривать как площадку, расположенную перпендикулярно к направлению скорости фотона. Поэтому при переходе к системе координат, в которой покоится центр инерции (соответствующие величины мы будем обозначать со звездочкой), поперечные размеры, а следовательно, и эффективное сечение, должны оставаться инвариантными.

Общий импульс системы (электрон — фотон) до рассеяния, а значит, согласно закону сохранения импульса, и после рассеяния, должен быть равен нулю:

$$\boldsymbol{\varkappa}^* + \boldsymbol{k}^* = \boldsymbol{\varkappa}'^* + \boldsymbol{k}'^* = 0. \tag{34,7}$$

Из закона сохранения энергии находим:

$$\varkappa^* + \sqrt{(\varkappa^*)^2 + k_0^2} = \varkappa^{*\prime} + \sqrt{(\varkappa^{*\prime})^2 + k_0^2},$$

т. е. частота рассеянного света будет равна частоте падающего:

$$\varkappa^{*\prime} = \varkappa^*. \tag{34,7а}$$

Направляя ось x по движению частиц, получим формулы преобразования начальных импульсов фотона и электрона при изменении системы координат:

$$k_x^* = \frac{-k_0\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \varkappa_x^* = \frac{\varkappa_x(1-\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

причем $\varkappa_x = \varkappa$. Приравнивая сумму импульсов $\varkappa_x^*$ и k_x^* нулю, находим:

$$\beta = \frac{\varkappa}{k_0 + \varkappa}. \tag{34,8}$$

Отсюда получаем связь между частотами первичных фотонов, а также углами рассеяния в обеих системах координат:

$$\varkappa^* = \frac{\varkappa k_0}{\sqrt{2k_0\varkappa + k_0^2}}, \qquad \cos\theta^* = \frac{(k_0 + \varkappa)\cos\theta - \varkappa}{k_0 + \varkappa - \varkappa\cos\theta}. \tag{34,9}$$

б) Формула Клейна — Нишины. Вычислим в общем случае эффективное сечение для рассеяния света свободными электронами, т. е. найдем обобщение формулы Томсона на случай релятивистской квантовой механики частиц со спином $^1/_2$.

Выберем систему координат, в которой первоначальный электрон покоится ($\boldsymbol{k} = 0$). Уравнение движения для свободных электронов, взаимодействующих с поперечным полем фотонов, может быть представлено в виде

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{D}\psi(N+1) &= U^+\psi(N), \\ \mathrm{D}\psi(N-1) &= U\psi(N). \end{aligned}\right\} \tag{34,10}$$

Здесь энергия взаимодействия U и U^+ определена формулами (27,7), а оператор Дирака D для свободных частиц имеет вид

$$\mathrm{D} = c\hbar\left(-\frac{1}{ic}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{i}(\boldsymbol{\alpha}\nabla) - \rho_3 k_0\right). \tag{34,11}$$

В дальнейшем в скобках мы будем указывать зависимость волновой функции лишь от числа фотонов N, подразумевая, что ψ, кроме того, является функцией от координат $\boldsymbol{r}$ и времени t электрона.

Как правило, рассмотрение процессов второго порядка требует введения промежуточного состояния. Однако мы можем воспользоваться операторным методом, позволяющим непосредственно написать уравнение Дирака, в которое функция U будет входить в виде квадратичных комбинаций. Именно, из уравнений (34,10) находим:

$$\left.\begin{aligned} \psi(N+1) &= \mathrm{D}^{-1}U^+\psi(N), \\ \psi(N-1) &= \mathrm{D}^{-1}U\psi(N), \end{aligned}\right\}$$

причем действие оператора D^{-1} на показательную функцию определено формулой (26,41).

Подставляя найденные значения для ψ в правую часть уравнений (34,10), имеем:

$$\mathrm{D}\psi(N+2) = U^+\mathrm{D}^{-1}U^+\psi(N), \tag{34,12а}$$

$$\mathrm{D}\psi(N-2) = U\ \mathrm{D}^{-1}U\ \psi(N), \tag{34,12б}$$

$$\mathrm{D}\psi'(N) = U^+\mathrm{D}^{-1}U\ \psi(N), \tag{34,12в}$$

$$\mathrm{D}\psi''(N) = U\ \mathrm{D}^{-1}U^+\psi(N). \tag{34,12г}$$

Общая волновая функция процесса второго порядка имеет вид

$$\psi = \psi(N+2) + \psi(N-2) + \psi'(N) + \psi''(N). \tag{34,13}$$

Функция $\psi(N+2)$ описывает появление двух фотонов. Нетрудно показать, что для свободных электронов, обладающих только положительной энергией, вероятность такого процесса обращается в нуль, так как невозможно удовлетворить двум законам сохранения (энергии и импульса). Функция $\psi(N-2)$ описывает поглощение двух фотонов. При наличии одного фотона вероятность этого процесса также равна нулю. Наконец, функции $\psi'(N)$ и $\psi''(N)$ описывают процессы рассеяния, которые, как было указано в предыдущем параграфе, могут происходить двояким путем: сначала первичный фотон поглощается, а затем испускается рассеянный (функция ψ') или, наоборот, сначала происходит испускание рассеянного фотона с последующим поглощением падающего (функция ψ'').

Отбрасывая функции $\psi(N+2)$ и $\psi(N-2)$, мы найдем для определения волновой функции, описывающей рассеяние ($\psi = \psi' + \psi''$), следующее уравнение:

$$\mathrm{D}\psi(N) = W^{+}\psi(N), \tag{34,14}$$

где

$$W^{+}\psi(N) = (U^{+}\mathrm{D}^{-1}U + U\mathrm{D}^{-1}U^{+})\,\psi(N).$$

Будем решать уравнение (34,14) по методу теории возмущений, полагая[1])

$$\psi = \psi_0 + \psi_2 + \ldots \tag{34,15}$$

Отбрасывая функцию числа частиц, которая будет автоматически учитываться перестановочными соотношениями (34,27) и (34,28), имеем:

$$\psi_0 = \frac{1}{L^{3/2}}\, b e^{-ick_0 t}, \tag{34,16}$$

причем амплитуда b должна подчиняться уравнению

$$(1 - \rho_3)\, b = 0. \tag{34,17}$$

При наличии в начальный момент фотона с волновым вектором $\boldsymbol{\varkappa}$ энергия возмущения будет иметь вид:

$$\left.\begin{aligned} U &= \frac{e}{L^{3/2}} \sqrt{\frac{2\pi c\hbar}{\varkappa}}\, (\boldsymbol{\alpha a})\, e^{-ic\varkappa t + i\boldsymbol{\varkappa r}}, \\ U^{+} &= \frac{e}{L^{3/2}} \sum_{\boldsymbol{\varkappa}'} \sqrt{\frac{2\pi c\hbar}{\varkappa'}}\, (\boldsymbol{\alpha a}'^{+})\, e^{ic\varkappa' t - i\boldsymbol{\varkappa}'\boldsymbol{r}}. \end{aligned}\right\} \tag{34,18}$$

---

[1]) В разложении (34,15), очевидно, должна отсутствовать функция ψ_1, описывающая процесс первого порядка.

Подставляя в правую часть уравнения (34,14) выражения для U и U^+ и принимая во внимание правило деления на оператор, даваемое формулой (26,41), найдем уравнение для ψ_2:

$$\mathrm{D}\psi_2 = W^+\psi_0, \qquad (34,19)$$

где

$$\left.\begin{aligned} W^+\psi_0 &= \sum_{\varkappa'} \frac{\pi e^2}{L^3 k_0 \sqrt{\varkappa\varkappa'}} [(\boldsymbol{\alpha a}'^+)(1+(\boldsymbol{\alpha\varkappa}^0))(\boldsymbol{\alpha a}) + \\ &+ (\boldsymbol{\alpha a})(1+(\boldsymbol{\alpha\varkappa}'^0))(\boldsymbol{\alpha a}'^+)]\, e^{ict(\varkappa'-\varkappa) - i(\boldsymbol{\varkappa}'-\boldsymbol{\varkappa})\boldsymbol{r}}\psi_0; \\ \boldsymbol{\varkappa}^0 &= \frac{\boldsymbol{\varkappa}}{\varkappa}, \quad (\boldsymbol{\varkappa}^0\boldsymbol{\varkappa}'^0) = \cos\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (34,20)$$

При выводе последнего соотношения было принято во внимание тождество

$$\frac{(\varkappa + k_0) + (\boldsymbol{\alpha\varkappa}) + \rho_3 k_0}{(\varkappa + k_0)^2 - \varkappa^2 - k_0^2}(\boldsymbol{\alpha a})\, b = \frac{1 + (\boldsymbol{\alpha\varkappa}^0)}{2k_0}(\boldsymbol{\alpha a})\, b,$$

которое легко получить, учитывая равенство (34,17).

С помощью соотношений

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha} &= \rho_1\boldsymbol{\sigma}, \\ (\boldsymbol{\sigma b})(\boldsymbol{\sigma c}) &= (\boldsymbol{bc}) + i(\boldsymbol{\sigma}[\boldsymbol{bc}]), \\ (\boldsymbol{\varkappa}^0\boldsymbol{a}) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (34,21)$$

выражение (34,20) легко привести к виду

$$W^+ = \sum_{\varkappa'} \frac{\pi e^2}{L^3 k_0 \sqrt{\varkappa\varkappa'}} (A^+ + (\boldsymbol{\alpha B}^+) + i\rho_1 C^+)\, e^{ict(\varkappa'-\varkappa) - i\boldsymbol{r}(\boldsymbol{\varkappa}'-\boldsymbol{\varkappa})}, \qquad (34,22)$$

где

$$\left.\begin{aligned} A^+ &= 2(\boldsymbol{aa}'^+), \\ \boldsymbol{B}^+ &= [\boldsymbol{h}'^+\boldsymbol{a}] + [\boldsymbol{ha}'^+], \\ C^+ &= (\boldsymbol{h}'^+\boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{ha}'^+), \\ \boldsymbol{h} &= [\boldsymbol{\varkappa}^0\boldsymbol{a}], \quad \boldsymbol{h}'^+ = [\boldsymbol{\varkappa}'^0\boldsymbol{a}'^+]. \end{aligned}\right\} \qquad (34,23)$$

Вероятность рассеяния мы можем определить с помощью формулы (32,7), полагая в последней

$$\boldsymbol{k} = 0, \quad \boldsymbol{l} = \boldsymbol{\varkappa}' - \boldsymbol{\varkappa}, \quad L = \varkappa' - \varkappa, \quad l_3 = \varkappa_3'.$$

В результате получаем:

$$w = \frac{2\pi}{c\hbar^2} \sum_{K'} \sum_{\varkappa'} R^+ R \delta_{0,\, \boldsymbol{K}' + \boldsymbol{\varkappa}' - \boldsymbol{\varkappa}}\, \delta(k_0 - K' - \varkappa' + \varkappa). \qquad (34,24)$$

где

$$R^+R=\frac{\pi^2e^4}{L^6k_0^2\varkappa\varkappa'}F,$$

$$F=b^+(A+(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{B})-i\rho_1C)\,b'b'^+\left(A^++\left(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{B}^+\right)+i\rho_1C^+\right)b. \quad (34,25)$$

При вычислении величины F мы воспользуемся методом, изложенным в § 21. Суммируя по конечным спиновым состояниям ($s'=\pm1$) и усредняя по начальным состояниям (в начальном состоянии имеется один электрон), находим[1]):

$$F=\frac{1}{8}\sum_{s,\,s'=\pm1}\left(AA^+\rho_{44}\sigma_{44}+B_nB_{n'}^+\rho_{11}\sigma_{nn'}+CC^+\rho_{11}\sigma_{44}+AB_n^+\rho_{41}\sigma_{4n}+\right.$$

$$\left.+B_nA^+\rho_{14}\sigma_{n4}+AC^+i\rho_{41}\sigma_{44}-iCA^+\rho_{14}\sigma_{44}+iB_nC^+\rho_{11}\sigma_{n4}-iCB_n^+\rho_{11}\sigma_{4n}\right).$$

С помощью формул (21,17) и (21,18) легко показать, что при $\boldsymbol{k}=0$:

$$\frac{1}{8}\sum_{s,\,s'}\rho_{44}\sigma_{44}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{k_0}{K'}\right),$$

$$\frac{1}{8}\sum_{s,\,s'}\rho_{11}\sigma_{nn'}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{k_0}{K'}\right)\delta_{nn'},$$

$$\frac{1}{8}\sum_{s,\,s'}\rho_{11}\sigma_{44}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{k_0}{K'}\right),$$

$$\frac{1}{8}\sum_{s,\,s'}\rho_{41}\sigma_{4n}=\frac{1}{8}\sum_{s,\,s'}\rho_{14}\sigma_{n4}=\frac{1}{2}\frac{k_n'}{K'},$$

$$\frac{1}{8}\sum_{s,\,s'}\rho_{41}\sigma_{44}=\frac{1}{8}\sum_{s,\,s'}\rho_{14}\sigma_{44}=\frac{1}{8}\sum_{s,\,s'}\rho_{11}\sigma_{n4}=\frac{1}{8}\sum_{s,\,s'}\rho_{11}\sigma_{4n}=0,$$

откуда

$$F=\frac{1}{2}\left\{AA^+\left(1+\frac{k_0}{K'}\right)+\left[\left(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^+\right)+CC^+\right]\left(1-\frac{k_0}{K'}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{A\left(\boldsymbol{k}'\boldsymbol{B}^+\right)+\left(\boldsymbol{k}'\boldsymbol{B}\right)A^+}{K'}\right\}, \quad (34,26)$$

При вычислении квадратичных форм квантованных фотонных амплитуд мы должны учесть отсутствие в начальный момент времени рассеянного фотона:

$$a_s'\,a_{s'}'^+=\delta_{ss'}-\chi_s'^0\chi_{s'}'^0. \quad (34,27)$$

---

[1]) Выражение для F может быть также вычислено с помощью формулы (21,21).

Кроме того, следует также произвести усреднение по двум возможным состояниям поляризации первичного фотона:

$$a_{s'}^{+}a_s = \frac{1}{2}\left(\delta_{ss'} - \varkappa_s^0\varkappa_{s'}^0\right). \tag{34,28}$$

С помощью формул (34,23), (34,27) и (34,28) получаем:

$$AA^+ = 4a_{s'}^{+}a_s a'_{s'}a_s'^{+} = 2(1+\cos^2\theta).$$

Аналогичным способом находим:

$$(BB^+) + CC^+ = 4,$$

$$A(\boldsymbol{k}'B^+) + (\boldsymbol{k}'B)A^+ = 2A\left((\boldsymbol{\varkappa} - \boldsymbol{\varkappa}')B^+\right) = \\ = -2(\varkappa - \varkappa')(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta).$$

Принимая во внимание еще закон сохранения энергии

$$k_0 + \varkappa - K' - \varkappa' = 0,$$

мы можем преобразовать функцию F к виду

$$F = \frac{1}{K'}\left[4k_0 + 2(\varkappa - \varkappa')(1 - \cos\theta) - 2k_0(1 - \cos^2\theta)\right].$$

Согласно формуле (34,4) имеем:

$$1 - \cos\theta = \frac{k_0(\varkappa - \varkappa')}{\varkappa\varkappa'}, \tag{34,29}$$

откуда получаем:

$$F = \frac{2k_0}{K'}\left(\frac{\varkappa}{\varkappa'} + \frac{\varkappa'}{\varkappa} - \sin^2\theta\right). \tag{34,30}$$

Суммируя выражение (34,24) по вектору $\boldsymbol{k}'$ и переходя далее от суммы к интегралу $\left(\frac{1}{L^3}\sum_{\varkappa'} \to \frac{1}{8\pi^3}\int d^3\varkappa'\right)$, находим:

$$w = \frac{r_0^2 c}{2L^3}\oint d\Omega \int_0^\infty \frac{\varkappa' k_0}{\varkappa K'}\left(\frac{\varkappa}{\varkappa'} + \frac{\varkappa'}{\varkappa} - \sin^2\theta\right)\delta(\varkappa' + K' - \varkappa - k_0)\,d\varkappa', \tag{34,31}$$

где $K' = \sqrt{(\boldsymbol{\varkappa}' - \boldsymbol{\varkappa})^2 + k_0^2}$, а $r_0 = e^2/m_0c^2$ является классическим радиусом электрона.

Учитывая, что K' является функцией $\varkappa'$, интегрирование по $\varkappa'$ мы можем произвести с помощью следующей формулы:

$$\int_0^\infty f(\varkappa')\,\delta(\varkappa' + K' - \varkappa - k_0)\,d\varkappa' = \frac{f(\varkappa')}{\left|\frac{\partial(\varkappa' + K')}{\partial\varkappa'}\right|} = \frac{K'\varkappa'}{k_0\varkappa} f(\varkappa'),$$

причем в правой части равенства величина $\varkappa'$ определяется формулой (34,29) как функция $\cos\theta$. Тогда для вероятности излучения внутри телесного угла $d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ находим:

$$dw = \frac{r_0^2 c \varkappa'^2}{2L^3\varkappa^2}\left(\frac{\varkappa}{\varkappa'} + \frac{\varkappa'}{\varkappa} - \sin^2\theta\right) d\Omega. \qquad (34,32)$$

Дифференциальное эффективное сечение $d\sigma$ равно вероятности рассеяния dw, отнесенной к числу частиц N_γ (фотонов), которые падают на единицу площади, расположенной перпендикулярно к направлению их движения. Само собой разумеется, что dw и N_γ должны быть отнесены к единице времени.

В единицу времени на единичную площадь S ($S = 1$) попадут частицы, которые находятся в объеме $V_0 = cS = c$. Вероятность нахождения первичного фотона в объеме L^3 основного параллелепипеда равна единице. Поэтому вероятность нахождения в объеме c (что соответствует искомому числу N_γ) будет равна

$$N_\gamma = \frac{c}{L^3},$$

откуда получаем для дифференциального эффективного сечения формулу Клейна—Нишины [1]):

$$d\sigma = \frac{dw}{N_\gamma} = \frac{r_0^2\varkappa'^2}{2\varkappa^2}\left(\frac{\varkappa}{\varkappa'} + \frac{\varkappa'}{\varkappa} - \sin^2\theta\right) d\Omega. \qquad (34,33)$$

В частности, при переходе к нерелятивистскому случаю, когда можно пренебречь отдачей ($\varkappa = \varkappa'$), формула (34,33) переходит в классическую формулу Томсона:

$$d\sigma_0 = \frac{r_0^2}{2}(1 + \cos^2\theta)\, d\Omega, \qquad (34,34)$$

или

$$\sigma_0 = \frac{8\pi}{3} r_0^2 .$$

Подставляя в (34,33) вместо $\varkappa'$ выражение (34,4), получаем явную зависимость дифференциального эффективного сечения от угла

---

[1]) O. Klein und I. Nischina, Zs. f. Phys. 52, 853 (1929); см. также И. Е. Тамм, Zs. f. Phys. 62, 545 (1930). Если первичный фотон продольно поляризован (l), а покоящийся электрон обладает ориентированным спином ($\boldsymbol{s} = s\boldsymbol{k}/k$), то в скобках правой части (34, 33) следует добавить член

$$-l\left[\left(\frac{\varkappa}{\varkappa'} - \frac{\varkappa'}{\varkappa}\right)\cos\theta\cos\psi + \left(1 - \frac{\varkappa'}{\varkappa}\right)\sin\theta\sin\psi\cos\varphi\right], \qquad (34,33\text{a})$$

который и характеризует влияние продольно-поляризационных свойств на формулу Клейна — Нишины. Здесь ψ — угол между $\boldsymbol{\varkappa}$ и $\boldsymbol{s}$, а φ — угол между плоскостями ($\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{\varkappa}'$) и ($\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{s}$).

рассеяния:

$$d\sigma = \frac{r_0^2}{2}\left[\frac{[\gamma(1-\cos\theta)+\cos^2\theta][1+\gamma(1-\cos\theta)]+1}{[1+\gamma(1-\cos\theta)]^3}\right]d\Omega, \qquad (34,35)$$

где

$$\gamma = \frac{\varkappa}{k_0} = \frac{\varepsilon}{m_0c^2}.$$

Интегрируя выражение (34,35) по телесному углу $d\Omega$, находим эффективное сечение в релятивистском случае:

$$\sigma = \sigma_0\frac{3}{4}\left\{\frac{1+\gamma}{\gamma^3}\left[\frac{2\gamma(1+\gamma)}{1+2\gamma}-\ln(1+2\gamma)\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2\gamma}\ln(1+2\gamma)-\frac{1+3\gamma}{(1+2\gamma)^2}\right\}. \qquad (34,36)$$

Асимптотические выражения формулы (34,36) имеют вид: для малых значений энергии ($\gamma \ll 1$)

$$\sigma = \sigma_0\left(1-2\gamma+\frac{26}{5}\gamma^2-\ldots\right); \qquad (34,36а)$$

для больших значений энергии ($\gamma \gg 1$; ультрарелятивистский случай)

$$\sigma = \frac{3}{8}\sigma_0\frac{1}{\gamma}\left(\ln 2\gamma+\frac{1}{2}\right). \qquad (34,36б)$$

Из формулы (34,36а) видно, что в нерелятивистском случае $\gamma = 0$ мы вновь получаем формулу Томсона

$$\sigma = \sigma_0. \qquad (34,37)$$

Таким образом, в нерелятивистском случае эффективное сечение остается величиной постоянной и не зависит от частоты падающего света. В этом случае величина σ_0 имеет порядок площади поперечника электрона $\sim r_0^2$, хотя с самого начала никаких размеров электрону не приписывалось.

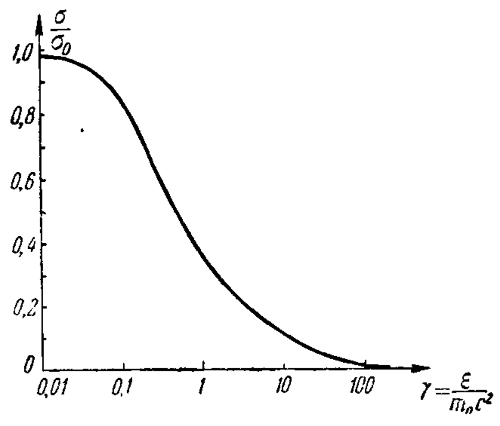


Рис. 10. Рассеяние γ-квантов свободными электронами.

С увеличением величины γ, когда γ становится порядка единицы или больше, начинают сказываться квантовые поправки, которые приводят к уменьшению числа рассеянных фотонов по сравнению с классической формулой Томсона.

Кривая, изображающая отношение σ к σ_0, приведена на рис. 10. Из этой кривой видно, что релятивистские и спиновые эффекты объясняют большую проникающую способность жестких фотонов.

Экспериментальной проверкой результатов квантовой теории являются опыты, связанные с измерением коэффициентов поглощения рентгеновских лучей, а также γ-лучей в различных веществах.

Коэффициент поглощения τ 1 *см* вещества благодаря комптоновскому рассеянию равен

$$\tau_c = N_a Z \sigma, \tag{34,38}$$

где N_a — число атомов в единице объема (1 *см*^{3}), Z — порядковый номер элемента, равный числу электронов в атоме.

Подставляя в (34,38) значение для эффективных сечений, найдем: для нерелятивистского случая

$$\tau_c = \frac{8\pi}{3} r_0^2 N_a Z, \tag{34,39}$$

для ультрарелятивистского случая

$$\tau_c = \pi r_0^2 \frac{1}{\gamma}\left(\ln 2\gamma + \frac{1}{2}\right) N_a Z. \tag{34,40}$$

Заметим, что для рентгеновских лучей сильное поглощение дает также фотоэффект. Коэффициент поглощения рентгеновских лучей связан с эффективным сечением фотоэффекта с K-слоя соотношением

$$\tau_f = \frac{5}{4} N_a \sigma, \tag{34,41}$$

где коэффициент 5/4 дает грубую оценку увеличения вероятности фотоэффекта с учетом всех слоев атома (см. § 29).

Подставляя сюда значение σ для фотоэффекта [см. соотношения (29,14) и (29,20)], имеем:

в нерелятивистском случае

$$\tau_f = \frac{40\sqrt{2}}{3} \pi r_0^2 \alpha^4 Z^5 \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{7/2} N_a, \tag{34,42}$$

в ультрарелятивистском случае

$$\tau_f = 5\pi r_0^2 \alpha^4 Z^5 \frac{1}{\gamma} N_a. \tag{34,43}$$

Сравнивая между собою нерелятивистские формулы (34,42) и (34,39), находим:

$$\frac{\tau_f}{\tau_c} = 5\sqrt{2}\,(\alpha Z)^4 \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{7/2}. \tag{34,44}$$

Приравнивая последнее отношение единице, находим критическую энергию фотонов:

$$\varepsilon_c = m_0 c^2 \left(5\sqrt{2}\right)^{2/7} (\alpha Z)^{8/7}. \tag{34,45}$$

При энергии фотона ε, меньшей критической ($\varepsilon < \varepsilon_c$), поглощение рентгеновских лучей будет происходить главным образом за

счет фотоэффекта. Напротив, в другом случае ($\varepsilon > \varepsilon_c$) поглощение будет обязано главным образом комптоновскому рассеянию. Для углерода ($Z = 6$) эта критическая энергия равна примерно $0{,}1\ m_0c^2$. С увеличением Z критическая энергия возрастает примерно по линейному закону.

Сравнение формул (34,40) и (34,43) показывает, что в ультрарелятивистском случае отношение

$$\frac{\tau_f}{\tau_c} = \frac{5\alpha^4 Z^4}{\ln 2\gamma + 1/2}$$

будет много меньше единицы, т. е. поглощением, обязанным фотоэффекту, мы можем вообще пренебречь. Это связано с тем обстоятельством, что при очень больших энергиях падающих фотонов электроны атома можно считать свободными. Свободные же электроны не могут поглощать фотоны.

§ 35. Рассеяние света с учетом затухания

В §§ 33 и 34 мы исследовали рассеяние света, пренебрегая обратным воздействием поля. Как видно из формулы (33,23), в случае дисперсии света, когда частота падающего света приближается к резонансной частоте атома ($\varkappa \sim \varkappa_{ab}$), эффективное сечение неограниченно возрастает. В классической теории эта трудность устраняется путем учета лучистого трения [см. формулу (33,24)]. Точно так же в квантовой теории учет обратного действия рассеянного света (затухание) на атом оказывается особенно существенным в области резонанса, где обычная теория возмущения приводит к расходящимся интегралам.

При рассмотрении рассеяния света (π-мезонов) свободными электронами (нуклонами) явление резонанса будет отсутствовать, и поэтому мы как будто можем вообще пренебречь затуханием. Однако в области больших энергий падающих π-мезонов учет обратного воздействия поля становится весьма существенным. Более того, этот вопрос оказывается самым тесным образом связанным с проблемой собственной массы частицы.

При рассмотрении дисперсии следует развить теорию затухания для дискретного спектра, а при рассмотрении рассеяния света на свободных электронах — для непрерывного. Рассмотрим более подробно каждый из этих случаев в отдельности.

а) Теория затухания для дискретного спектра. В основу теории положим уравнения (33,3) и (33,4), решение которых будем искать в виде:

для начального состояния

$$\psi_0 = C_a^{\varkappa}(t)\, e^{-ic\varkappa_a t}\, \psi_a, \tag{35,1}$$

для промежуточных состояний

$$\psi_1 = \sum_{\varkappa'}{}' C_b^0(t)\, e^{-i\varkappa_b ct}\psi_b, \quad \psi_1' = \sum_{\varkappa'}{}' C_b^{\varkappa\varkappa'}(t)\, e^{-i\varkappa_b ct}\psi_b, \tag{35,2}$$

для конечного состояния

$$\psi_2 = \sum_{\varkappa'} C_a^{\varkappa'}(t)\, e^{-i\varkappa_a ct}\psi_a, \tag{35,3}$$

где $\varkappa_a = E_a/c\hbar$ и т. д.

Наличие двух возможных типов промежуточных состояний связано с двумя возможными способами рассеяния, на которых мы подробно останавливались при рассмотрении дисперсии (см. § 33). При первом способе рассеяния (волновая функция ψ_1) в промежуточном состоянии фотоны должны отсутствовать (поглощается первичный фотон). При втором (ψ_1') — в промежуточном состоянии должно появляться два фотона (испускается рассеянный фотон).

Рассмотрим случай рассеяния света на невозбужденных атомах, когда для нерелятивистского приближения существен лишь первый способ рассеяния[1]). В самом дале, невозбужденные атомы не могут вначале испустить рассеянный фотон $\varkappa'$, и поэтому мы должны положить $\psi_1' = 0$.

Подставляя последние соотношения в (33,3) и (33,4), получаем следующую систему уравнений для определения искомых коэффициентов C:

$$-\frac{1}{ic}\dot{C}_a = \frac{1}{L^{3/2}}(a^+P)\,C_b e^{ict(\varkappa-\varkappa_{ba})}, \tag{35,4}$$

$$-\frac{1}{ic}\dot{C}_b = \frac{1}{L^{3/2}}(aP)\,C_a e^{-ict(\varkappa-\varkappa_{ba})} + \frac{1}{L^{3/2}}\sum_{\varkappa'}{}'\sqrt{\frac{\varkappa}{\varkappa'}}(a'P)\,C_a' e^{-ict(\varkappa'-\varkappa_{ba})}, \tag{35,5}$$

$$-\frac{1}{ic}\dot{C}_a' = \frac{1}{L^{3/2}}\sum_{\varkappa'}{}'\sqrt{\frac{\varkappa}{\varkappa'}}(a'^+P)\,C_b e^{ict(\varkappa'-\varkappa_{ba})}, \tag{35,6}$$

где $C_a = C_a^{\varkappa}$, $C_b = C_b^0$ и $C_a' = C_a^{\varkappa'}$. Кроме того, при выводе последних уравнений мы ограничились рассмотрением дипольного излучения, когда можно положить $e^{i\varkappa r} \approx 1$, а также предположением, что рассматриваемые волновые функции являются вещественными. В этом случае

$$P = \frac{e}{m_0 c}\sqrt{\frac{2\pi}{c\hbar\varkappa}}\,p_{ba}, \tag{35,7}$$

где

$$p_{ba} = p_{ab} = \int \psi_b \mathbf{p} \psi_a \, d^3x. \tag{35,8}$$

[1]) Точнее, мы рассматриваем случай сравнительно малых энергий фотона, когда электроны атома нельзя рассматривать как свободные.

При определении коэффициентов C следует ввести начальные условия

$$C_a(0)=1, \quad C'_a(0)=0, \quad C_b(0)=0, \tag{35,9}$$

которые соответствуют достоверному нахождению электрона при $t=0$ в состоянии a, а фотона — в состоянии $\varkappa$. Как мы отмечали, условие $C_b(0)=0$ для промежуточных состояний следует вводить лишь в том случае, когда вероятность для промежуточного процесса будет отлична от нуля.

При рассмотрении дисперсии в области резонанса вероятность поглощения света (процесс первого порядка) становится заметной величиной. Поэтому, чтобы исключить из рассмотрения этот процесс, мы должны были на коэффициент C_b наложить условие (35,9), поскольку при наличии резонанса он в нуль не обращается.

При решении задачи по методу теории возмущений (см. § 33) мы полагали в правой части уравнения (35,5)

$$C_a=1, \quad C'_a=0,$$

т. е. считали, что вероятность перехода системы в состояние a' является малой величиной.

При этом методе исследования в области резонанса коэффициенты C'_a неограниченно возрастают, вследствие чего наше приближение становится незаконным. В этом случае мы должны решить систему дифференциальных уравнений (35,4), (35,5) и (35,6) относительно коэффициента C_a, т. е. следует учитывать возможность обратного влияния конечного состояния a' на начальное a (квантовая теория затухания).

Попробуем решения дифференциальных уравнений (35,4) и (35,5) искать в виде[1])

$$C_a=e^{\frac{-\gamma_a t}{2}}, \tag{35,10}$$

$$C_b=\beta\left(e^{-\gamma_a t/2-ict\,(\varkappa-\varkappa_{ba})}-e^{\frac{-\gamma_b t}{2}}\right), \tag{35,11}$$

удовлетворяющем начальным условиям (35,9). Тогда для коэффициента C'_a из (35,6) находим:

$$C'_a=\frac{1}{L^{3/2}}\beta\sum_{\varkappa'}{}'\sqrt{\frac{\varkappa}{\varkappa'}}\,(a'+P)\left[\frac{e^{-\frac{\gamma_a t}{2}-ict\,(\varkappa-\varkappa')}-1}{\varkappa-\varkappa'-\frac{i\gamma_a}{2c}}-\right.$$
$$\left.-\frac{e^{-\frac{\gamma_b t}{2}-ict\,(\varkappa_{ba}-\varkappa')}-1}{\varkappa_{ba}-\varkappa'-\frac{i\gamma_b}{2c}}\right]. \tag{35,12}$$

---

[1]) V. Weisskopf, Ann. d. Phys. 9, 23 (1931).

Подставляя эти выражения для коэффициентов C в уравнение (35,5), мы должны получить тождественные соотношения, имеющие место для любых значений времени t. Приравнивая в обеих частях уравнения (35,5) коэффициенты при одинаковых временны́х множителях, находим два уравнения для определения величин γ_b и β:

$$\gamma_b = \frac{c}{4\pi^2}\int \frac{\varkappa}{\varkappa'}(\boldsymbol{a}'\boldsymbol{P})(\boldsymbol{a}'^{+}\boldsymbol{P})\,\delta(\varkappa' - \varkappa_{ba})\,d^3\varkappa', \tag{35,13}$$

$$\beta\left(\varkappa - \varkappa_{ba} + \frac{\gamma_a}{2ic}\right) =$$
$$= \frac{1}{L^{3/2}}(\boldsymbol{aP}) - \beta\frac{i}{8\pi^2}\int \frac{\varkappa}{\varkappa'}(\boldsymbol{a}'\boldsymbol{P})(\boldsymbol{a}'^{+}\boldsymbol{P})\,\delta(\varkappa' - \varkappa)\,d^3\varkappa'. \tag{35,14}$$

При выводе последних соотношений мы сделали переход к непрерывному спектру $\left(\frac{1}{L^3}\sum_{\boldsymbol{\varkappa}'} = \frac{1}{8\pi^3}\int d^3\varkappa'\right)$. Кроме того, мы воспользовались равенством

$$\frac{1 - e^{\frac{\gamma t}{2} - ict(\varkappa' - \varkappa_{ba})}}{\varkappa' - \varkappa_{ba} + \frac{i\gamma}{2c}} = \pi i\delta(\varkappa' - \varkappa_{ba}), \tag{35,15}$$

причем в формулах (35,13) и (35,14) мы соответственно положили $\gamma = \gamma_b$ и $\gamma = \gamma_a$.

Принимая во внимание перестановочные соотношения (33,20), получаем:

$$(\boldsymbol{a}'\boldsymbol{P})(\boldsymbol{a}'^{+}\boldsymbol{P}) = \frac{2\pi e^2}{c\hbar\varkappa}\left(\boldsymbol{\alpha}^{0\,2}_{b\alpha} - (\boldsymbol{\varkappa}'^0\boldsymbol{\alpha}^0_{b\cdot})^2\right),$$

причем в нашем случае

$$\boldsymbol{\alpha}^0_{ba} = \frac{1}{m_0 c}\,\boldsymbol{p}_{ba} = \boldsymbol{\alpha}^0_{ab}.$$

Тогда после интегрирования с учетом наличия δ-функции находим:

$$\gamma_b = \frac{e^2\varkappa_{ba}}{2\pi\hbar}\oint\left(\boldsymbol{\alpha}^{0\,2}_{ab} - \left(\boldsymbol{\varkappa}'^0\boldsymbol{\alpha}^0_{ab}\right)^2\right)d\Omega',$$

т. е. величина γ_b равна вероятности спонтанного перехода с промежуточного уровня (b) на начальный (a) [см. (27,30)]:

$$\gamma_b = w_{ba}.$$

Далее, с помощью формулы (35,14) находим:

$$\beta = -\frac{1}{L^{3/2}}(\boldsymbol{aP})\frac{1}{\varkappa_{ba} - \varkappa + \frac{i}{2c}\left(\gamma_a - \gamma'_b\right)}, \tag{35,16}$$

где

$$\gamma'_b = \frac{c}{4\pi^2}\int \frac{\varkappa}{\varkappa'}(\boldsymbol{a}'\boldsymbol{P})(\boldsymbol{a}'^{+}\boldsymbol{P})\,\delta(\varkappa' - \varkappa)\,d^3\varkappa'.$$

Сопоставляя последнее выражение с формулой (35,13), мы видим, что для области, близкой к резонансу, $\varkappa \sim \varkappa_{ba}$, коэффициент γ_b' можно приравнять коэффициенту γ_b.

Наконец, для определения коэффициента γ_a мы должны подставить (35,10) и (35,11) в (35,4). Тогда, полагая в (35,15) $\gamma = \gamma_a - \gamma_b$, находим:

$$\gamma_a = \frac{2\pi c}{L^3} \sum_{\varkappa} (a^+ P)(aP)\, \delta(\varkappa - \varkappa_{ba}). \tag{35,17}$$

Как мы указывали в § 30, строго монохроматических спектральных линий нет. Поэтому первичное излучение частоты $c\varkappa$ должно также обладать определенной шириной, благодаря чему в выражение (35,17) мы поставили знак суммы.

Переход к δ-функции в формуле (35,17) имеет смысл делать лишь в том случае, когда интенсивность первичного излучения в области естественной ширины является постоянной. Тогда сумма по волновому вектору $\boldsymbol{\varkappa}$ первичного излучения может быть заменена интегралом [1]).

Принимая во внимание перестановочные соотношения (27,10), имеем:

$$(a^+ P)(aP) = \frac{2\pi e^2 N(\boldsymbol{\varkappa})}{c\hbar\varkappa} \left[\boldsymbol{\varkappa}^0 \boldsymbol{\alpha}^0_{ab}\right]^2.$$

Переходя в выражении (35,17) к интегралу ($1/L^3 \to d^3\varkappa/8\pi^3$), получаем:

$$\gamma_a = \frac{e^2}{2\pi\hbar} \int N(\boldsymbol{\varkappa}) \left[\boldsymbol{\varkappa}^0 \boldsymbol{\alpha}^0_{ab}\right]^2 \delta(\varkappa - \varkappa_{ba}) \frac{d^3\varkappa}{\varkappa}.$$

Отсюда видно [см. (27, 40)], что величина γ_a равна вероятности поглощения первичного фотона:

$$\gamma_a = w_{ab}$$

и обусловливает естественную ширину линии поглощения. Величина γ_a пропорциональна плотности $N(\boldsymbol{\varkappa})$, и поэтому, когда интенсивность первичного пучка мала, соответствующая линия поглощения является практически резкой.

Найдем теперь распределение интенсивности излучения для момента $t = \infty$, когда процесс рассеяния заведомо окончился. С помощью формул (35,12) и (35,16) получаем:

$$\sum_{\varkappa, \varkappa'} |C_a'(\infty)|^2 = \sum_{\varkappa, \varkappa'} \frac{1}{L^6} \frac{\varkappa}{\varkappa'} \frac{(a^+ P)(aP)(a' P)(a'^+ P)}{\left[(\varkappa - \varkappa')^2 + \frac{\gamma_a^2}{4c^2}\right]\left[(\varkappa_{ba} - \varkappa')^2 + \frac{\gamma_b^2}{4c^2}\right]}. \tag{35,18}$$

[1]) Случай, когда первичная линия резка по сравнению с естественной шириной, рассмотрен в только что цитированной работе Вайскопфа.

Заметим, что при малых значениях коэффициентов γ_a и γ_b мы имеем для функции, стоящей под знаком суммы, острый максимум при $\varkappa=\varkappa'=\varkappa_{ba}$. Поэтому, переходя к непрерывному спектру, мы можем положить согласно (35,13) и (35,17):

$$\gamma_b=\frac{c}{4\pi^2}\varkappa_{ba}^2\oint(\boldsymbol{a}'\boldsymbol{P})(\boldsymbol{a}'^{+}\boldsymbol{P})\,d\Omega',$$

$$\gamma_a=\frac{c}{4\pi^2}\varkappa_{ba}^2\oint(\boldsymbol{a}^{+}\boldsymbol{P})(\boldsymbol{a}\boldsymbol{P})\,d\Omega,$$

где Ω' и Ω — телесные углы векторов $\boldsymbol{\varkappa}'$ и $\boldsymbol{\varkappa}$. Выражение (35,18) мы можем представить в виде

$$\sum_{\varkappa,\varkappa'}|C_a'(\infty)|^2=\int\limits_0^\infty d\varkappa\int\limits_0^\infty d\varkappa' f(\varkappa,\varkappa'),$$

причем функция $f(\varkappa,\varkappa')$, характеризующая распределение интенсивности излучения, имеет вид

$$f(\varkappa,\varkappa')=\frac{\gamma_a\gamma_b}{4\pi^2c^2\left[(\varkappa-\varkappa')^2+\frac{\gamma_a^2}{4c^2}\right]\left[(\varkappa_{ba}-\varkappa')^2+\frac{\gamma_b^2}{4c^2}\right]}. \qquad (35{,}19)$$

Для того чтобы получить кривую, характеризующую распределение интенсивности рассеянного света по частотам, мы должны выражение (35,19) проинтегрировать по частотам первичного излучения:

$$f(\varkappa')=\int\limits_0^\infty f(\varkappa,\varkappa')\,d\varkappa=\frac{\gamma_b}{2\pi c\left[(\varkappa_{ba}-\varkappa')^2+\frac{\gamma_b^2}{4c^2}\right]}. \qquad (35{,}20)$$

Эта формула совпадает с формулой распределения интенсивности спонтанного излучения. Таким образом, распределение интенсивности рассеянного света по частотам не зависит от способа возбуждения атома.

Интегрируя, далее, выражение (35,20) по частотам $\varkappa'$ рассеянного света, находим:

$$\int\limits_0^\infty f(\varkappa')\,d\varkappa'=1.$$

Отсюда видно, что по прошествии бесконечного времени, как и следовало ожидать, вероятность рассеяния равна единице.

Аналогичным способом мы можем получить форму кривой поглощения. С этой целью выражение (35,19) следует проинтегриро-

вать по $\varkappa'$ рассеянного света:

$$f(\varkappa) = \int_0^\infty f(\varkappa, \varkappa')\, d\varkappa' =$$

$$= \int_0^\infty \frac{\gamma_a \gamma_b\, d\varkappa'}{4\pi^2 c^2 \left[(\varkappa - \varkappa')^2 + \frac{\gamma_a^2}{4c^2}\right]\left[(\varkappa_{ba} - \varkappa')^2 + \frac{\gamma_b^2}{4c^2}\right]}. \qquad (35{,}21)$$

Интегрирование последнего выражения сильно упрощается в том случае, когда вероятность вынужденного излучения много меньше вероятности спонтанного:

$$\gamma_a \ll \gamma_b. \qquad (35{,}22)$$

Это имеет место при сравнительно слабой интенсивности первичного излучения. Тогда во втором сомножителе знаменателя величину $\varkappa'$ мы можем заменить на $\varkappa$, при которой все подынтегральное выражение достигает резкого максимума. В этом случае находим:

$$f(\varkappa) = \frac{\gamma_b}{2\pi c \left[(\varkappa_{ba} - \varkappa)^2 + \frac{\gamma_b^2}{4c^2}\right]}. \qquad (35{,}23)$$

Таким образом, для непрерывного спектра первичного излучения формы кривых поглощения и рассеяния совпадают.

б) Теория затухания для непрерывного спектра[1]**.** При рассмотрении рассеяния света свободными электронами мы должны учесть, что квантовые состояния электронов образуют непрерывный спектр (свободные состояния). В этом случае ни о каких резонансных частотах речи быть не может. Однако при очень больших частотах первичного излучения члены с затуханием начинают оказывать свое влияние. Теория затухания для непрерывного спектра является далеко еще не закончённой. К тому же вычисление эффективных сечений с учетом затухания в релятивистском случае оказалось сложной задачей (см. § 46), в связи с чем мы здесь ограничимся рассмотрением нерелятивистского приближения, позволяющего в наиболее простом виде ознакомить читателя с этими идеями. В конце параграфа мы дадим оценку результата в общем случае.

В нерелятивистском случае движение электрона характеризуется уравнением

$$\left[-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2m_0}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2\right]\psi = 0. \qquad (35{,}24)$$

---

[1]) Литература по теории затухания приведена в § 31.

Ограничиваясь членами второго порядка ($\sim A^2$), которые приводят к рассеянию, имеем [1]):

$$\left(-\frac{1}{ic}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\nabla^2}{2k_0}\right)\psi=\frac{e^2}{2k_0\hbar^2c^2}A^2\psi, \qquad (35,25)$$

где

$$A^2=\frac{1}{L^3}\sum_{\varkappa',\varkappa''}\frac{2\pi c\hbar}{\sqrt{\varkappa'\varkappa''}}[(\boldsymbol{a}''\boldsymbol{a}'^+)+(\boldsymbol{a}'^+\boldsymbol{a}'')]e^{-ict(\varkappa''-\varkappa')+ir(\boldsymbol{\varkappa}''-\boldsymbol{\varkappa}')}. \qquad (35,26)$$

Решение уравнения (35,25) будем искать в виде

$$\psi=\sum_{k''}C''(t)\psi_{k''}f(N), \qquad (35,27)$$

причем величина $\psi_{k''}=\frac{1}{L^{3/2}}e^{-ict\frac{k''^2}{2k_0}+i\boldsymbol{k}''\boldsymbol{r}}$ является решением уравнения (35,25) без правой части, а $f(N)$ — функция числа фотонов.

Подставляя (35,26) и (35,27) в (35,25), находим уравнение для определения коэффициентов C:

$$-\frac{1}{ic}\dot{C}'f(N)=\frac{\pi e^2}{c\hbar k_0}\frac{1}{L^3}\sum_{\varkappa',\varkappa''}\frac{1}{\sqrt{\varkappa'\varkappa''}}[(\boldsymbol{a}''\boldsymbol{a}'^+)+(\boldsymbol{a}'^+\boldsymbol{a}'')]C''f(N)\,e^{ict(\Gamma'-\Gamma'')}, \qquad (35,28)$$

где

$$\Gamma'=\varkappa'+\frac{k'^2}{2k_0}-\varkappa, \quad \boldsymbol{\varkappa}'+\boldsymbol{k}'=\boldsymbol{\varkappa}''+\boldsymbol{k}''=\boldsymbol{\varkappa}.$$

Последнее соотношение выражает собою закон сохранения импульса, причем сумма импульсов рассеянного фотона и электрона равна импульсу начального фотона ($\sim\boldsymbol{\varkappa}$), поскольку первоначальный импульс электрона мы полагаем равным нулю ($\boldsymbol{k}=0$).

Функцию $f(N)$ числа частиц при рассеянии следует выбрать в виде

$$f(N)=\delta_{N1}\prod{}'\delta_{N'0}. \qquad (35,29)$$

Мы получим в обеих частях равенства (35,28) одно и то же значение для функции числа частиц, если положим:

$$C''\sim aa''^+, \quad C'\sim aa'^+.$$

Выделяя в уравнении (35,28) коэффициент C, соответствующий начальному состоянию ($\boldsymbol{k}=0$) и сокращая обе части равенства на

---

[1]) Члены первого порядка малости [пропорциональные $(\boldsymbol{Ap})$], которые во втором приближении могут привести к рассеянию, в данном случае нас не интересуют, поскольку при малых значениях импульса электрона ($p\to 0$) их можно вообще отбросить.

функцию числа частиц, находим:

$$-\frac{i}{ic}\dot{C}'=k_0^{\perp}C'+\frac{2\pi e^2}{c\hbar k_0}\frac{1}{L^3}e^{ict\Gamma'}\left(\frac{(aa'^+)}{\sqrt{\varkappa'\varkappa}}C+\sum_{\varkappa''}{}''\frac{(a''a'^+)}{\sqrt{\varkappa'\varkappa''}}C''e^{-ict\Gamma''}\right),\tag{35,30}$$

$$-\frac{1}{ic}\dot{C}=k_0^{\perp}C+\frac{2\pi e^2}{c\hbar k_0}\frac{1}{L^3}\sum_{\varkappa''}{}'\frac{(a^+a'')}{\sqrt{\varkappa\varkappa''}}C''e^{-ict\Gamma''},\tag{35,31}$$

где

$$k_0^{\perp}=\frac{\pi e^2}{c\hbar k_0}\frac{1}{L^3}\sum_{\varkappa'}\frac{(a'a'^+)}{\varkappa'}.$$

Последнее уравнение мы должны решать при условии, что в начальный момент в состоянии $\varkappa$ имеется один фотон:

$$a_s^+a_{s'}=\frac{1}{2}\left(\delta_{ss'}-\frac{\varkappa_s\varkappa_{s'}}{\varkappa^2}\right),\tag{35,32}$$

а во всех других состояниях ($\varkappa'\neq\varkappa$) фотоны отсутствуют:

$$a_{s'}'^+a_s'=0,\quad a_s'a_{s'}'^+=\delta_{ss'}-\frac{\varkappa_s'\varkappa_{s'}'}{\varkappa'^2}.\tag{35,33}$$

Для коэффициентов C мы должны ввести условия, соответствующие наличию в начальный момент $t=0$ электрона в состоянии $k=0$:

$$C(0)=1,\quad C'(0)=0.\tag{35,34}$$

В теории затухания мы должны учесть, что на изменение коэффициента C' влияет не только первоначальное состояние C, но также все другие состояния C'', которые могут возникнуть в результате рассеяния, т. е. рассматриваемая амплитуда конечного состояния C' связана с амплитудой бесчисленного множества других возможных конечных состояний (затухание для непрерывного спектра). Кроме того, в этих уравнениях учитывается уменьшение вероятности пребывания электрона в первоначальном состоянии.

Прежде всего заметим, что члены, пропорциональные бесконечной собственной поперечной массе:

$$k_0^{\perp}=\frac{m_0^{\perp}c}{\hbar}=\frac{e^2}{c\hbar k_0\pi}\int_0^{\infty}\varkappa\,d\varkappa,$$

должны, как было указано в § 26, появляться при вычислении любых эффектов второго порядка, связанных с квантованным электромагнитным полем. Эта бесконечная масса совершенно не зависит от присутствия в начальный момент фотонов и представляет собою специфическую трудность квантовой теории, которая отсутствовала в классической электродинамике.

Значение для величины $k_0^{\perp}$ должно в будущей теории или стать конечным (полевая теория массы), или обратиться в нуль (неполевая теория). Хотя этот вопрос до настоящего времени является еще окончательно не разрешенным, тем не менее теория собственной массы за последнее время достигла определенных успехов, причем появляется все большее число аргументов в пользу того, что продольную и поперечную массы частиц следует полагать равными нулю [1]).

Отбрасывая в (35,30) поперечную массу, получаем [см. также (31,3) и (31,4)]:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{ic}\dot{C}' &= \frac{2\pi e^2}{c\hbar k_0 L^3} e^{ict\Gamma'}\left(\frac{(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}'^{+})}{\sqrt{\varkappa\varkappa'}}C + \sum_{\varkappa''}{}' \frac{(\boldsymbol{a}''\boldsymbol{a}'^{+})}{\sqrt{\varkappa'\varkappa''}}C''e^{-ict\Gamma''}\right), \\ -\frac{1}{ic}\dot{C} &= \frac{2\pi e^2}{c\hbar k_0 L^3}\sum_{\varkappa''}{}' \frac{(\boldsymbol{a}^{+}\boldsymbol{a}'')}{\sqrt{\varkappa\varkappa''}}C''e^{-ict\Gamma''}. \end{aligned}\right\} \qquad (35,35)$$

Решение уравнений (35,35) будем искать в виде [2]):

$$C = e^{-c\beta t} = e^{-c\beta_1 t + ict\beta_2},$$

$$C' = \begin{cases} \dfrac{2\pi e^2}{c\hbar k_0 L^3}\varepsilon\dfrac{(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}'^{+})}{\sqrt{\varkappa\varkappa'}}\dfrac{1 - e^{-c\beta_1 t + ict(\Gamma' + \beta_2)}}{\Gamma' + \beta_2 + i\beta_1} & \text{при } |\Gamma'| < |\Gamma_0|, \\ 0 & \text{при } |\Gamma'| > |\Gamma_0|. \end{cases} \qquad (35,36)$$

Подставляя (35,36) в (35,35), получаем уравнения для определения коэффициентов ε и β:

$$(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}'^{+})(\varepsilon - 1) = \frac{2\pi e^2}{c\hbar k_0 L^3}\varepsilon\sum_{\varkappa''}{}' \frac{(\boldsymbol{a}''\boldsymbol{a}'^{+})(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}''^{+})}{\varkappa''}\,\frac{e^{\beta_1 ct - ict(\Gamma'' + \beta_2)} - 1}{\Gamma'' + \beta_2 + i\beta_1},$$

$$\frac{\beta}{i} = \frac{4\pi^2 e^4}{c^2\hbar^2 k_0^2 L^6}\varepsilon\sum_{\varkappa''}\frac{(\boldsymbol{a}^{+}\boldsymbol{a}'')(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}''^{+})}{\varkappa\varkappa''}\,\frac{e^{\beta_1 ct - ict(\Gamma'' + \beta_2)} - 1}{\Gamma'' + \beta_2 + i\beta_1}.$$

Переходя к непрерывному спектру и интегрируя по телесному углу $d\Omega''$ вектора $\boldsymbol{\varkappa}''$ с помощью соотношения

$$\oint (\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}'')(\boldsymbol{a}''^{+}\boldsymbol{B})\,d\Omega'' = \frac{8\pi}{3}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) \qquad (35,37)$$

---

[1]) Кроме продольной и поперечной масс, возникающих благодаря взаимодействию электрона с виртуальным электромагнитным полем, может появиться еще третья полевая масса, связанная с наличием электрон-позитронного вакуума. Последняя полевая масса не превосходит $^1/_{137}$ собственной массы электрона и поэтому на данные расчеты не может оказать существенного влияния (более подробно см. §§ 42 и 44).

[2]) См. также (31,7) и (31,8). Там же оговорен смысл величины Γ_0.

и учитывая, кроме того, равенство (35,15), находим:

$$\left.\begin{aligned} (\varepsilon-1) &= \frac{2e^2\varepsilon}{3c\hbar k_0 l}\int\limits_0^\infty \varkappa''\delta(\Gamma''+\beta_2)\,d\varkappa'', \\ \beta &= \frac{4\pi\varepsilon e^4}{3c^2\hbar^2 k_0^2}\frac{1}{L^3}\int\limits_0^\infty \frac{\varkappa''}{\varkappa}\delta(\Gamma''+\beta_2)\,d\varkappa''. \end{aligned}\right\} \quad (35,38)$$

Принимая во внимание, что в нерелятивистском случае $\Gamma''=\varkappa''-\varkappa$, мы получим после интегрирования по $\varkappa''$:

$$\varepsilon - 1 \cong \frac{2r_0\varepsilon\varkappa}{3l}, \quad (35,39)$$

$$c\beta = c(\beta_1 - l\beta_2) \cong \frac{4\pi\varepsilon r_0^2}{3}N_0, \quad (35,40)$$

где $r_0=e^2/m_0c^2=e^2/c\hbar k_0$, а $N_0=c/L^3$ — число падающих частиц в начальный момент времени на единицу поверхности. Как видно из формулы (35,40), величина β_2, определяющая, по существу, ширину линии, имеет порядок $1/L^3\to 0$.

Из формул (35,39) и (35,40) получаем:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon = \frac{1}{1+2lr_0\varkappa/3}, \quad c\beta_1 &= \frac{4\pi r_0^2 N_0}{3\left(1+4r_0^2\varkappa^2/9\right)}, \\ c\beta_2 &= c\beta_1\frac{2}{3}r_0\varkappa. \end{aligned}\right\} \quad (35,41)$$

Согласно формуле (35,36) для вероятности рассеяния имеем:

$$w = \frac{\partial}{\partial t}\sum_{\varkappa'} C'^{+}C' = \frac{r_0^2\varepsilon^{+}\varepsilon}{2\pi L^3}\int\left\{\frac{(a^+a')(aa'^+)}{\varkappa\varkappa'}\frac{\partial}{\partial t}\left|\frac{1-e^{-c\beta_1 t+ict(\Gamma'+\beta_2)}}{\Gamma'+\beta_2+l\beta_1}\right|^2\right\}d^3\varkappa'.$$

Учитывая равенство

$$\frac{\partial}{\partial t}\left|\frac{1-e^{-c\beta_1 t+ict(\Gamma'+\beta_2)}}{\Gamma'+\beta_2+l\beta_1}\right|^2 = 2\pi c e^{-2c\beta_1 t}\delta(\Gamma'+\beta_2) \approx 2\pi c e^{-2c\beta_1 t}\delta(\Gamma'), \quad (35,42)$$

[см. (31,13)], а также принимая во внимание, что

$$(a^+a')(aa'^+) = \frac{1}{2}(1+\cos^2\theta),$$

где θ — угол рассеяния, находим:

$$w = \frac{8\pi}{3}\frac{r_0^2\varepsilon^{+}\varepsilon c}{L^3}e^{-2c\beta_1 t}. \quad (35,43)$$

Как известно, эффективное сечение σ равно отношению вероятности w к числу N_γ фотонов, которые падают в единицу времени на единицу поверхности:

$$N_\gamma = N_0 C^+ C = \frac{c}{L^3} e^{-2c\beta_1 t}.$$

Отсюда имеем:

$$\sigma' = \frac{\sigma}{1 + \frac{2\pi}{3}\frac{\sigma}{\lambda^2}}, \tag{35,44}$$

где $\sigma = 8\pi r_0^2/3$ — эффективное сечение без учета затухания, а $\lambda = 2\pi/\varkappa$ — длина волны падающего света.

Как видно из формулы (35,44), при больших значениях λ,

$$\lambda^2 \gg \sigma, \tag{35,45}$$

мы можем пренебречь членом, характеризующим затухание. Тогда для σ мы получаем известную формулу Томсона:

$$\sigma' = \sigma. \tag{35,46}$$

В другом предельном случае, когда $\lambda^2 \ll \sigma_0$, эффективное сечение σ' становится равным

$$\sigma' = \frac{3}{2\pi}\lambda^2. \tag{35,47}$$

Заметим, что аналогичное выражение для эффективного сечения получается также и по классической теории[1]), если пренебречь в последней полевой массой. Экспериментальная проверка формулы (35,47) позволила бы в значительной мере разъяснить вопрос о природе собственной массы электрона.

В пользу формулы (35,44), т. е. в пользу неполевой собственной массы, говорит еще следующее теоретическое обстоятельство. Несмотря на то, что вероятность пребывания электрона в первоначальном состоянии экспоненциально спадает:

$$C^+ C = e^{-\sigma' N_0 t},$$

сумма вероятностей начального и конечного состояний всегда точно равна единице. В самом деле, для вероятности пребывания в конечном состоянии мы имеем:

$$\sum_{\varkappa'}{}' C'^+ C' = \int_0^t \sigma N_0 e^{-\sigma' N_0 t}\, dt = 1 - e^{-\sigma' N_0 t}.$$

Отсюда находим, что сумма обеих вероятностей

$$C^+ C + \sum_{\varkappa'}{}' C'^+ C' = 1. \tag{35,48}$$

[1]) См., например, «Классическая теория поля», стр. 249.

Следует заметить, что при $\lambda \ll r_0$, т. е. при $\lambda \ll \alpha/k_0$ ($\alpha = 1/137$), энергия падающего света достигает порядка $h\nu = 137 m_0 c^2$, и поэтому мы должны рассматривать всю проблему с учетом комптоновского изменения длины волны. Однако, если производить вычисления в системе координат, где покоится центр инерции системы (электрон плюс фотон), то при рассеянии мы не получим изменения частоты [см. (34,7а)], благодаря чему при $\lambda \ll \sigma_0$ выражение для эффективного сечения с учетом затухания должно сохранить вид (35,47) с другим численным коэффициентом порядка единицы, стоящим при λ^2, т. е.

$$\sigma' = \mathrm{const} \cdot \lambda^2;$$

значение же для σ без учета затухания может быть определено из формул (34,36б) и (34,9):

$$\sigma = \frac{\alpha^2}{4\pi}\lambda^2\left(\ln\frac{2\lambda_c}{\lambda} + \frac{1}{4}\right),$$

где $\alpha = e^2/\hbar c$ — постоянная тонкой структуры, а $\lambda_c = R/m_0 c$ — комптоновская длина волны.

Условие, при котором начинает сказываться затухание,

$$\lambda^2 \sim \sigma, \tag{35,49}$$

приводит к слишком большим значениям для энергии падающих фотонов. Эти значения энергии находятся пока что вне пределов экспериментальных наблюдений и значительно больше, чем соответствующее значение, найденное классическим путем.

Таким образом, поправки на затухание оказываются малыми при всех энергиях. Тем же способом можно показать, что затухание несущественно и в тормозном излучении, рождении пар и т. д. Полученный результат обосновывает законность применения теории возмущений к этим электромагнитным процессам даже при очень больших энергиях, например в каскадных ливнях (см. § 41).

Заметим, что условие (35,49) наступает значительно быстрее при квазимагнитном взаимодействии нуклонов с полем π-мезонов (сильное взаимодействие). Например, квазимагнитное взаимодействие нуклона с полем векторных мезонов:

$$U = -f(\sigma H),$$

где f — квазимагнитный заряд нуклона, связанный с квазиэлектрическим зарядом соотношением $f = g/\varkappa_0$ ($\hbar\varkappa_0/c = m_\mu$ — масса мезона), приводит при нерелятивистских скоростях нуклона к следующему значению эффективного сечения рассеяния мезонов:

$$\sigma' = \frac{64}{3}\frac{\pi f^4}{c^2\hbar^2}\frac{\varkappa^4}{\varkappa^2 + \varkappa_0^2}; \tag{35,50}$$

здесь $2\pi/\varkappa = \Lambda$ — длина волны падающих мезонов.

Как видно из формулы (35,50), эффективное сечение неограниченно возрастает с увеличением частоты мезонных волн. Подобное возрастание является совершенно недопустимым, так как число рассеянных мезонов может стать больше числа падающих.

Один из вариантов разрешения подобной трудности сводится к учету затухания при рассеянии. Как видно из (35,48), при учете затухания общее число рассеянных и падающих частиц для любого момента времени равно единице, и поэтому указанная трудность не может возникнуть. В этом случае условие (35,49), при котором необходимо учитывать затухание, наступает при сравнительно малых значениях энергии падающих мезонов:

$$E \sim \sqrt{\frac{1}{\alpha_\mu}}\, m_\mu c^2, \tag{35,51}$$

где $\alpha_\mu = g^2/c\hbar > 1$ — мезонная постоянная тонкой структуры.

Отсюда видно, что при энергиях порядка собственной энергии мезона мы уже должны учитывать влияние затухания.

При энергиях мезона, превышающих значение (35,51), эффективное сечение становится равным

$$\sigma' = \frac{3}{2\pi}\lambda^2, \tag{35,52}$$

т. е. учет силы трения устраняет указанную трудность, которая возникла при построении квазимагнитного рассеяния мезонов.

§ 36. Упругое рассеяние заряженных частиц кулоновским центром

Развитие теории прохождения заряженных частиц через вещество всегда было самым тесным образом связано с развитием учения об атоме. Большая часть методов экспериментального исследования строения атома основана на прохождении быстрых частиц через вещество. Достаточно указать, что классические опыты Рёзерфорда 1911 г. по прохождению α-частиц позволили окончательно установить планетарную модель атома, а также определить заряд атомного ядра. Опыты по прохождению пучка электронов, например через поликристаллы, позволили проверить существование волновых свойств пучка электронов (дифракция электронов). С помощью электронного просвечивания паров ртути удалось экспериментально обнаружить существование дискретных состояний в атоме (опыт Франка — Герца). Эксперименты, связанные с прохождением частиц через вещество, играют значительную роль в изучении космических лучей и строения атомных ядер. Открытие деления ядер позволило изучать прохождение частиц с массой и зарядом, во много раз большими, чем у частиц, которые могли быть использованы ранее (протоны, α-ча-

стицы и т. д.). В настоящей монографии мы не собираемся останавливаться особенно подробно на всех этих вопросах[1]).

Прежде всего мы рассмотрим теорию упругого рассеяния электронов и α-частиц кулоновским центром, которая сыграла существенную роль при интерпретации классических опытов Рёзерфорда. Далее мы рассмотрим неупругое рассеяние и найдем потери энергии быстрых электронов. Теория неупругих столкновений, в частности, играет весьма важную роль при исследовании космических лучей и позволяет установить ряд закономерностей, связанных с взаимным превращением элементарных частиц (более подробно см. § 41).

а) Вывод формул Рёзерфорда по классической теории. При построении теории взаимодействия заряженных частиц с веществом большое значение имеет задача о столкновении двух частиц, между которыми действуют кулоновские силы.

В классической механике (нерелятивистский случай) задача столкновения двух частиц, между которыми действуют силы, обратно пропорциональные квадрату расстояния, имеет весьма простое решение, а именно: в системе координат, в которой центр инерции покоится, обе частицы будут двигаться по гиперболическим траекториям с общим фокусом в центре инерции.

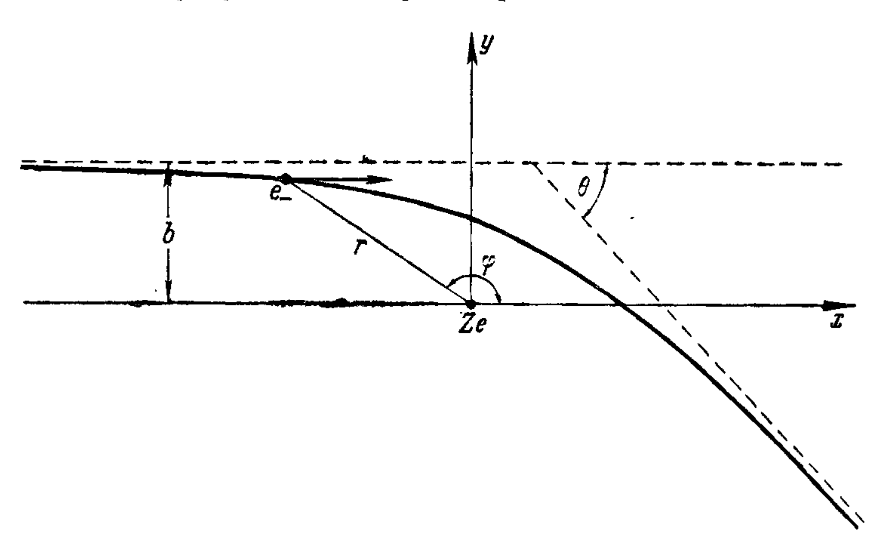


Рис. 11. Рассеяние быстрого электрона ядром.

Пусть рассеивающее ядро заряда Ze находится в начале координат (рис. 11). По направлению к нему из бесконечности со скоростью v движется электрон заряда $-e$. В том случае, когда масса M ядра много больше массы m_0 электрона ($M \gg m_0$), рассеивающее

[1]) Более подробно см. Н. Бор, Прохождение атомных частиц через вещество, М., 1950; Э. Ферми, Ядерная физика, М., 1951; см. также Экспериментальная ядерная физика, под редакцией Э. Сегре, т. 1, ИЛ, 1955, стр. 215.

ядро можно принять за неподвижный центр (совпадающий с центром инерции). Получаемые при этом результаты могут быть использованы также в общем случае ($M \sim m_0$), если вместо массы m_0 электрона в окончательные формулы подставить приведенную массу

$$m_{\text{прив}} = \frac{Mm_0}{M+m_0},$$

которая в случае $M \gg m_0$ будет равна массе m_0.

Если пренебречь взаимодействием, то электрон будет двигаться по прямой (пунктирная прямая на рис. 11) и пройдет на расстоянии b (называемом прицельным расстоянием) от ядра. При наличии же кулоновского взаимодействия траектория электрона будет представлять собой гиперболу, причем в нашем случае, когда между частицами действуют силы притяжения (рассеяние β-частиц), ядро будет являться фокусом основной гиперболы, а для сил отталкивания (рассеяние α-частиц) — фокусом сопряженной гиперболы. На рис. 11 мы изобразили траекторию для сил притяжения, хотя, как будет показано ниже, общее выражение для эффективного сечения в первом приближении не зависит от знака заряда.

Для нахождения траектории мы имеем следующие два уравнения, выражающие собою законы сохранения энергии и момента количества движения:

$$\frac{m_0}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{Ze^2}{r} = E, \tag{36,1}$$

$$r^2\dot{\varphi} = -vb, \tag{36,2}$$

где r и φ — полярные координаты, $\dot{r} = dr/dt$, $\dot{\varphi} = d\varphi/dt$, а v является начальной скоростью, связанной с энергией E соотношением

$$\frac{m_0v^2}{2} = E. \tag{36,3}$$

Кроме того, мы учли, что при движении частицы угол φ уменьшается, и поэтому угловая скорость $\dot{\varphi}$ должна быть отрицательной величиной.

Вводя новую пременную

$$u = \frac{1}{r} \tag{36,4}$$

и исключая из уравнений (36,1) и (36,2) время t с помощью соотношений

$$\dot{\varphi} = -\frac{vb}{r^2} = -vbu^2,$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}\dot{\varphi} = vbu',$$

где $u' = du/d\varphi$, найдем уравнение для определения траектории движения:

$$u'' + u = \frac{Ze^2}{m_0b^2v^2}. \tag{36,5}$$

Решение последнего уравнения имеет вид:

$$u = A\cos\varphi + B\sin\varphi + \frac{Ze^2}{m_0 b^2 v^2}. \tag{36,6}$$

Постоянные A и B могут быть найдены из начальных условий:

$$\lim_{\varphi\to\pi} r = \lim_{\varphi\to\pi} \frac{1}{u} = \infty,$$

$$\lim_{\varphi\to\pi} r\sin\varphi = \lim_{\varphi\to\pi} \frac{\sin\varphi}{u} = b.$$

Отсюда находим:

$$A = \frac{Ze^2}{m_0 b^2 v^2}, \quad B = \frac{1}{b}. \tag{36,7}$$

Угол рассеяния θ равен углу φ ($\varphi \neq \pi$), при котором радиус обращается в бесконечность ($u = 1/r = 0$). Учитывая соотношения (36,7), получаем связь между углом рассеяния θ и прицельным расстоянием b:

$$\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = -\frac{B}{A} = -\frac{m_0 b v^2}{Ze^2}. \tag{36,8}$$

Для того чтобы обобщить эту формулу на рассеяние α-частиц заряда $2e$, мы должны в формуле сделать следующую замену:

$$Ze^2 \to -2Ze^2.$$

Тогда находим:

$$\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} = \frac{m_0 b v^2}{2Ze^2}. \tag{36,8a}$$

Из формулы (36,8) видно, что чем меньше прицельное расстояние b, тем больше угол рассеяния θ. Эта формула непосредственно проверялась опытным путем Блэккеттом, заснявшим пути α-частиц в камере Вильсона. Блэккетт определил наименьшее прицельное расстояние b, при котором еще имеет место взаимодействие по закону Кулона. Для воздуха это прицельное расстояние оказалось примерно равным $3\cdot 10^{-12}$ *см*. Для других ядер оно имеет тот же порядок величины. На расстояниях, меньших 10^{-12} *см*, обнаруживается действие быстро убывающих с расстоянием ядерных сил притяжения.

В опытах Рёзерфорда определялось среднее число частиц, рассеиваемых на угол θ, точнее, внутрь телесного угла

$$d\Omega = 2\pi\sin\theta\, d\theta.$$

Относительное число рассеиваемых частиц характеризуется дифференциальным эффективным сечением $d\sigma$, равным отношению числа отклоняемых частиц dN в единицу времени на угол θ к числу падающих частиц N в единицу времени на единицу поверхности,

расположенной перпендикулярно к направлению их первоначального движения,

$$d\sigma = \frac{dN}{N}.$$

Для того чтобы отклониться на угол θ, электроны должны до взаимодействия проходить внутри кольца между кругами с радиусами b и $b - db$. Площадь такого кольца равна $2\pi b\, db$. Поэтому мы можем утверждать, что число α-частиц, попадающих в единицу времени на эту площадь, а затем летящих после рассеяния внутри телесного угла $d\Omega$, будет равно

$$dN = N 2\pi\, |b\, db|. \tag{36,8б}$$

Для дифференциального эффективного сечения $d\sigma$ имеем значение

$$d\sigma = \pi\, |db^2| = \pi \left(\frac{Ze^2}{m_0 v^2}\right)^2 \left| d \operatorname{ctg}^2 \frac{\theta}{2} \right|. \tag{36,8в}$$

Отсюда получаем формулу Рёзерфорда для упругого рассеяния заряженных частиц:

$$d\sigma = \left(\frac{Ze^2}{4T}\right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}, \tag{36,9}$$

где $T = m_0 v^2/2$ является начальной кинетической энергией частиц.

Формула Рёзерфорда подвергалась дальнейшей экспериментальной проверке в опытах по рассеянию α-частиц ($Ze^2 \to -2Ze^2$). Соотношение

$$\sin^4 \frac{\theta}{2}\, d\sigma = \text{const}, \tag{36,10}$$

определяющее зависимость числа рассеянных частиц от угла θ, было полностью подтверждено рядом классических экспериментов. Было также показано, что заряд ядра равняется Ze, где Z — порядковый номер элемента. Опыты Рёзерфорда в целом подтвердили теорию планетарной модели атома, доказав, что положительный заряд атома сосредоточен в ядре, имеющем размеры $10^{-13} \div 10^{-12}$ *см*, и что внутри атома действуют кулоновские силы, которые удерживают вращающиеся электроны в атоме.

б) Квантовая теория рассеяния. Рассмотрим упругое рассеяние потока заряженных частиц (электронов) тяжелым ядром с зарядом Ze по квантовой теории.

Потенциальную энергию взаимодействия

$$V = -\frac{Ze^2}{r}$$

представим в виде разложения в ряд Фурье:

$$V = -\frac{4\pi Ze^2}{L^3} \sum_{\varkappa} \frac{e^{-i\varkappa r}}{\varkappa^2}. \tag{36,11}$$

Для определения вероятности рассеяния мы можем воспользоваться формулой (32,7), положив в ней: $\boldsymbol{l}=\boldsymbol{\varkappa}$, $L=0$[1]), а

$$W^+(l_s)=-\frac{4\pi Ze^2}{L^3\varkappa^2}. \qquad (36,12)$$

Тогда для вероятности рассеяния находим

$$w=\frac{2\pi}{c\hbar^2}\sum_{k'}\sum_{\varkappa}R^+R\delta_{k,\,k'+\varkappa}\delta(K-K'), \qquad (36,13)$$

где

$$R=-b'^+\frac{4\pi Ze^2}{L^3\varkappa^2}b. \qquad (36,14)$$

Проводя суммирование в выражении (36,13) по величине $\boldsymbol{\varkappa}$ и переходя при суммировании по $\boldsymbol{k}'$ к непрерывному спектру, получаем:

$$w=\frac{4Z^2e^4}{c\hbar^2L^3}\int\frac{b^+b'b'^+b}{(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')^4}\delta(K'-K)\,d^3k'. \qquad (36,15)$$

Суммируя по конечным состояниям спина и усредняя по возможным начальным [см. соотношения (21,17) и (21,18)], имеем:

$$b^+b'b'^+b=\frac{1}{2}\sum_{s,\,s'}b^+b'b'^+b=\frac{1}{8}\sum_{s,\,s'}\rho_{44}\sigma_{44}=$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{k_0^2}{KK'}+\frac{(\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}')}{KK'}\right). \qquad (36,15а)$$

Переходя, далее, к полярным координатам вектора $\boldsymbol{k}'$, найдем после интегрирования по переменной k':

$$w=\frac{Z^2e^4}{2c\hbar^2L^3}\oint\frac{2k_0^2+k^2(1+\cos\theta)}{Kk^3(1-\cos\theta)^2}\,d\Omega, \qquad (36,16)$$

где $d\Omega$ — элемент телесного угла, а θ — угол рассеяния.

Отсюда для дифференциального эффективного сечения, равного отношению вероятности рассеяния внутри телесного угла $d\Omega$ к числу частиц N_e, падающих в единицу времени на единицу поверхности, причем

$$N_e=\frac{ck}{L^3K}, \qquad (36,17)$$

находим следующее выражение:

$$d\sigma=\frac{Z^2e^4m_0^2}{4p^4\sin^4\frac{\theta}{2}}\left(1+\frac{p^2}{m_0^2c^2}\cos^2\frac{\theta}{2}\right)d\Omega, \qquad (36,18)$$

где $p=\hbar k$ — начальный импульс электрона.

---

[1]) Не путать энергию $c\hbar L$ с объемом основного параллелепипеда L^3.

В нерелятивистском случае ($p \ll m_0 c$) последнее выражение переходит в обычную формулу Резерфорда для сравнительно малых скоростей [см. соотношение (36,9)][1]).

Таким образом, квантовомеханическое рассмотрение задачи о столкновении двух частиц в нерелятивистском приближении без учета обменного эффекта дает тот же результат, что и классическое рассмотрение.

Напротив, в ультрарелятивистском случае ($p \gg m_0 c$) получаем:

$$d\sigma \cong \frac{Z^2 e^4 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{4c^2 p^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} d\Omega. \tag{36,19}$$

Следовательно, эффективное сечение в ультрарелятивистском случае, так же как и в нерелятивистском случае, обратно пропорционально квадрату кинетической энергии, однако угловая зависимость, определяемая формулой Резерфорда, сохраняется лишь при малых углах θ, а при больших углах спадание становится более быстрым. В обратном же направлении ($\theta = \pi$) электроны вообще почти не рассеиваются.

В наших вычислениях мы предполагали, что как начальные, так и конечные состояния описываются плоской волной. Более строгое решение задачи[2]) с волновыми функциями непрерывного спектра приводит к тем же результатам.

в) Учет электронной оболочки. Эффективное сечение (36,9) при малых углах θ ($\theta \to 0$) расходится. В этом случае следует учитывать поле, создаваемое электронной оболочкой атома. Влияние электронной оболочки может быть учтено лишь приближенно или с помощью самосогласованного поля Фока — Хартри или с помощью метода Томаса — Ферми. Оба метода приводят в основном к одинаковым результатам. Остановимся кратко на последнем способе расчета, являющемся более простым.

Мы предположим, что распределение электронов вокруг ядра обладает шаровой симметрией. Тогда потенциальная энергия электронов

$$V = -e\Phi \tag{36,20}$$

будет функцией только расстояния r от ядра.

Нормируя потенциал Φ таким образом, чтобы он исчезал при $r \to \infty$, мы найдем, что в атоме могут удерживаться электроны, обладающие отрицательной энергией:

$$E = \frac{p^2}{2m_0} - e\Phi \leqslant 0. \tag{36,21}$$

---

[1]) Энергия E и импульс p связаны в нерелятивистском приближении соотношением $E = p^2/2m_0$. При исследовании рассеяния α-частиц в формуле (36,18) величину Z^2e^4 следует заменить на $4Z^2e^4$.

[2]) См., например, Г. Бете, Квантовая механика простейших систем, стр. 310.

Отсюда находим максимальный импульс ($E=0$):

$$P=\sqrt{2m_0e\Phi}. \tag{36,22}$$

Таким образом, концы вектора импульса будут заключены внутри сферы объема

$$\frac{4}{3}\pi P^3=\frac{4}{3}\pi(2m_0e\Phi)^{3/2}. \tag{36,23}$$

Как известно, согласно принципу Паули в каждом квантовом состоянии, фазовый объем которого равен h^3, может находиться не более двух электронов, обладающих противоположными спинами. Предполагая, что все фазовые клетки в атоме заполнены (полное вырождение), найдем число электронов в единице объема:

$$n=2\frac{4\pi P^3}{3h^3}=\frac{8\pi}{3h^3}(2m_0e\Phi)^{3/2}. \tag{36,24}$$

Отсюда плотность электрических зарядов будет равна:

$$\rho=-en=-\frac{8\pi e}{3h^3}(2m_0e\Phi)^{3/2}. \tag{36,25}$$

Подставляя эти значения в уравнение Пуассона

$$\nabla^2\Phi=-4\pi\rho, \tag{36,26}$$

получим дифференциальное уравнение для определения искомого потенциала Φ (уравнение Томаса — Ферми):

$$\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(r\Phi)=\frac{32\pi^2e}{3h^3}(2m_0e\Phi)^{3/2}, \tag{36,27}$$

которое мы должны решить при следующих граничных условиях. При $r\to 0$ потенциал Φ должен переходить в кулоновский:

$$\lim_{r\to 0} r\Phi(r)=Ze, \tag{36,28}$$

а при $r\to\infty$ потенциал должен обращаться в нуль. Второе граничное условие может быть сформулировано более точно. В самом деле, для нейтрального атома мы имеем:

$$4\pi\int_0^\infty \rho r^2\,dr=-Ze. \tag{36,29}$$

Как видно из формулы (36,25), последнее условие может иметь место, если на бесконечности

$$\lim_{r\to\infty} r^2\Phi\to 0. \tag{36,30}$$

Уравнение Томаса — Ферми (36,27) с граничными условиями (36,28) и (36,30) не может быть точно решено аналитическим путем.

Однако довольно хорошее приближение может быть найдено с помощью численного интегрирования. При этом решение ищется в виде

$$\Phi(r)=\frac{Ze}{r}f(x), \tag{36,31}$$

где $x=r/a$, а величина a связана с радиусом первой боровской орбиты $a_0=\hbar^2/m_0e^2=0{,}53\cdot 10^{-8}$ *см* соотношением

$$a=a_0\left(\frac{9\pi^2}{128Z}\right)^{1/3}=\frac{0{,}885a_0}{Z^{1/3}}. \tag{36,32}$$

Легко показать, что функция f будет удовлетворять уравнению

$$\sqrt{x}\,\frac{d^2f}{dx^2}=f^{3/2} \tag{36,33}$$

с граничными условиями

$$\lim_{x\to 0} f(x)=1, \quad \lim_{x\to\infty} xf(x)=0. \tag{36,34}$$

Уравнение (36,33) имеет следующее частное решение:

$$f=\frac{144}{x^3}, \tag{36,35}$$

которое удовлетворяет граничному условию на бесконечности и определяет поэтому поведение функции при $x\to\infty$. Однако при $x=0$ это решение обладает особенностью, и поэтому другое граничное условие при $x=0$ не выполняется.

При малых x ($r\ll a$) хорошим приближением решения уравнения (36,33), удовлетворяющим граничному условию при $x=0$, является выражение

$$f=1+\frac{4}{3}x^{3/2}. \tag{36,36}$$

С помощью существующих приближенных методов можно несколько уточнить, а затем и сшить оба крайних решения[1]).

Для того чтобы исследовать рассеяние заряженных частиц атомом с учетом электронной оболочки, мы должны амплитуду Фурье кулоновского потенциала заменить амплитудой Фурье потенциала Томаса — Ферми:

$$\frac{Ze}{\varkappa^2}\to\int_0^\infty r'^2\,\frac{\sin\varkappa r'}{\varkappa r'}\,\Phi(r')\,dr'=I. \tag{36,37}$$

Благодаря законам сохранения величина $\varkappa$ принимает значение

$$\varkappa=\sqrt{(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')^2}=2k\sin\frac{\theta}{2}=\frac{2p}{\hbar}\sin\frac{\theta}{2}. \tag{36,38}$$

---

[1]) См., например, П. Гамбош, Статистическая теория атома и ее применения, М., 1951, стр. 52.

Из формул (36,32) и (36,34) видно, что в качестве эффективного радиуса, характеризующего экранирование, следует выбрать длину

$$a \sim \frac{a_0}{Z^{1/3}}. \tag{36,39}$$

Это означает, что при $r < a$ мы можем ограничиться кулоновским выражением для потенциала $\Phi(r)$ и только при $r \sim a$ и $r > a$ учитывать поправку на экранирование.

Поэтому, принимая во внимание осциллирующий характер функции $\sin y/y$, в силу чего интеграл при $y \gg 1$ практически обрывается, мы можем в формуле (36,37) при $\varkappa a \gg 1$ $\left(p \gg \hbar Z^{1/3}/2a_0 \sin\frac{\theta}{2}\right)$ вообще пренебречь влиянием экранирования.

Только в случае слишком малых энергий ($p \ll \hbar Z^{1/3}/2a_0$) для любых углов рассеяния имеет место неравенство

$$\varkappa a \ll 1, \tag{36,40}$$

при котором в формуле (36,37) мы вообще можем положить

$$\frac{\sin \varkappa r'}{\varkappa r'} = 1. \tag{36,41}$$

Подставляя тогда в матричный элемент (36,37) вместо потенциала φ выражение (36,31), найдем:

$$I = Zea^2 \int_0^\infty xf(x)\,dx. \tag{36,42}$$

Таким образом, переход от формул для рассеяния кулоновским центром к формулам для рассеяния полностью экранированным атомом может быть совершен путем замены

$$\frac{1}{\varkappa^2} \to a^2 \int_0^\infty xf(x)\,dx. \tag{36,43}$$

Поскольку эффективное сечение (36,18) при отсутствии экранирования может быть представлено в виде

$$d\sigma = \frac{4Z^2\,d\Omega}{\varkappa^4 a_0^2}, \tag{36,44}$$

то отсюда в случае полного экранирования мы получаем[1]):

$$d\sigma = \frac{1}{4}\left(\frac{3\pi}{4}\right)^{8/3} a_0^2 Z^{2/3} \left| \int_0^\infty xf(x)\,dx \right|^2 d\Omega = 21{,}6 \cdot 10^{-16} Z^{2/3}\,d\Omega. \tag{36,45}$$

---

[1]) См. Мотт и Месси, Теория атомных столкиовеиий, ИЛ, 1951, стр. 229.

Таким образом, в случае полного экранирования мы будем иметь изотропное (по направлениям) рассеяние, что является весьма характерным при рассеянии под действием короткодействующих сил.

При сравнительно больших энергиях (порядка 1 *Мэв*), когда можно наблюдать рёзерфордовское рассеяние электронов тяжелыми ядрами, эффект экранирования будет заметен лишь при малых углах θ, удовлетворяющих неравенству

$$\sin\frac{\theta}{2} < \frac{\hbar Z^{1/3}}{2a_0 p}.$$

При $\theta = 0$ эффект экранирования приводит к тому, что вместо расходящегося эффективного сечения (36,18) следует взять его предельное значение (36,45).

Все эксперименты, опубликованные до 1947 г., не дали каких-либо количественных подтверждений релятивистской теории рассеяния Мотта. В 1947 г. Бюхнер и Ван де Грааф [1]) исследовали рассеяние быстрых электронов на бериллии, алюминии, меди, серебре, платине и золоте. Они получили на генераторе Ван де Граафа большие интенсивности пучков электронов с энергиями от 1,27 до 2,27 *Мэв* и, используя современную технику регистрации, нашли хорошее согласие с теорией в среднем диапазоне углов (от 20° до 50°). Опыты Чемпиона и Роя [2]) дали первое экспериментальное подтверждение теоретических формул [3]) при больших углах рассеяния.

Весьма интересные опыты по рассеянию быстрых электронов с энергией 200, 300, 400, 500 и 550 *Мэв* протонами были выполнены группой Гофштадтера [4]). В области больших энергий и больших углов рассеяния $40° \leqslant \theta_{лаб} \leqslant 140°$ было обнаружено отступление от формулы Мотта — Рёзерфорда, описывающей рассеяние электронов на точечном заряде. Это говорит о том, что либо протон имеет размеры (т. е. является размазанным) со среднеквадратичным радиусом распределения заряда и магнитного момента, равным $r_e = r_\eta = 0{,}77 \cdot 10^{-13}$ *см*, либо при больших энергиях имеется отступление от закона Кулона на малых расстояниях (меньших 10^{-13} *см*).

В работе [4]) для объяснения экспериментальных результатов проведена феноменологическая точка зрения относительно неточности заряда и магнитного момента для протона, т. е. впервые на основе пока что первых экспериментов поставлен вопрос о структуре протона.

---

[1]) W. Buechner, R. Van de Graaf и др., Phys. Rev. 72, 678 (1947).

[2]) F. Champion and R. Roy, Proc. Phys. Soc. 61, 532 (1948).

[3]) Более подробно о прохождении β-частиц через вещество см. Экспериментальная ядерная физика, под редакцией Э. Сегре, т. 1, стр. 215 (статья Г. Бете и Ю. Ашкина).

[4]) E. Chambers and R. Hofstadter, Phys. Rev. 103, 1454 (195).

В работе [1]) особенно подробно исследовалось рассеяние быстрых электронов с энергией 139,5 *Мэв* на протонах. В этой работе была учтена размазанность заряда и магнитного момента протона по некоторому конечному объему радиуса $0{,}77 \cdot 10^{-13}$ *см*, а также отдача, которую получает протон при излучении реальных фотонов. Кроме того, были приняты во внимание так называемые радиационные поправки, речь о которых будет идти в § 37, п. г). В результате учета всех этих поправок авторы нашли хорошее совпадение эксперимента с теорией

$$\frac{\sigma_{\text{эксп}}}{\sigma_{\text{теор}}} \approx 0{,}988.$$

При помощи релятивистской теории электрона Дирака удалось [2]) найти следующий член разложения по αZ. С учетом этой поправки основную формулу (36,18) можно представить в виде

$$d\sigma = \frac{\pi e^4 Z^2}{2m_0^2 v^4}(1-\beta^2)\frac{\sin\theta\, d\theta}{\sin^4\frac{\theta}{2}}\left\{1-\beta^2\sin^2\frac{\theta}{2}+\pi Z\beta\alpha\left(\sin\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\right\}. \tag{36,46}$$

Последняя формула интересна в том отношении, что она дает различные значения для рассеяния электронов и позитронов на тяжелых ядрах (при рассеянии позитронов мы должны перед дополнительным членом, пропорциональным Z, взять знак минус). Поэтому эффективное сечение рассеяния позитронов при одинаковых энергии и угле должно быть несколько меньше соответствующего эффективного сечения рассеяния электронов.

Каких-либо экспериментальных подтверждений асимметрии рассеяния электронов и позитронов тяжелыми ядрами пока что не обнаружено.

г) Исследование поляризационных свойств пучка электронов. Так же как и в случае электромагнитного поля, поляризационные свойства дираковских частиц связаны с наличием спина у сопоставленных полю частиц, т. е. в данном случае электронов.

Для рассмотрения поляризационных свойств сохраним в решении (20,17) уравнения Дирака для свободных частиц состояния с положительной энергией. Тогда будем иметь

$$\psi = \frac{1}{L^{3/2}}\sum_{k}\sum_{s=\pm 1} C(s)\, b(s)\, e^{-icKt+i\boldsymbol{kr}}. \tag{36,47}$$

Квадраты модулей амплитуд

$$C^+(-1)\,C(-1) = |C(-1)|^2, \qquad C^+(1)\,C(1) = |C(1)|^2 \tag{36,48}$$

---

[1]) G. Tautfest and W. Panofsky, Phys. Rev. **105**, 1356 (1957).
[2]) W. McKinley and H. Feshbach, Phys. Rev. **74**, 1759 (1948).

будут характерзиовать числа электронов, спины которых направлены по и против волнового вектора $\boldsymbol{k}$. Если проводить параллель между поляризацией поля поперечных электромагнитных волн (т. е. поля фотонов) и электронными волнами, то квадраты указанных амплитуд будут характеризовать степень амплитудной (круговой) поляризации.

Однако для полной характеристики поляризационных свойств электронных волн мы должны знать еще сдвиг фазы между состояниями $s=1$ и $s=-1$. С этой целью мы можем написать

$$C(\pm 1)=|C(\pm 1)|\, e^{i\varphi \pm 1}, \quad C^{+}(\pm 1)=|C(\pm 1)|\, e^{-i\varphi \pm 1}. \tag{36,49}$$

Тогда фазовая поляризация будет характеризоваться величинами

$$\left.\begin{aligned} C^{+}(1)\,C(-1)&=|C(1)|\,|C(-1)|\, e^{-i(\varphi_1-\varphi_{-1})},\\ C^{+}(-1)\,C(1)&=|C(1)|\,|C(-1)|\, e^{i(\varphi_1-\varphi_{-1})}. \end{aligned}\right\} \tag{36,50}$$

Степень поляризации электронных волн (т. е. амплитудная и фазовая поляризации) будет полностью определяться четырьмя величинами (36,48) и (36,50).

Для неполяризованных волн имеем

$$C^{+}(1)\,C(1)=C^{+}(-1)\,C(-1), \tag{36,51}$$

$$C^{+}(1)\,C(-1)=C^{+}(-1)\,C(1)=0. \tag{36,52}$$

Равенство (36,52) означает, что в случае неполяризованных волн, фаза $\delta=\varphi_1-\varphi_{-1}$ принимает произвольные значения, и поэтому в среднем $e^{\pm i\delta}$ обращается в нуль.

Для примера исследуем влияние поляризации (т. е. спиновых эффектов) на упругое рассеяние частиц, когда энергия взаимодействия равна

$$V_{\text{вз}}=\gamma V(\boldsymbol{r}), \tag{36,53}$$

где γ — одна из матриц Дирака, а выражение $V(\boldsymbol{r})$ зависит только от координат электрона. Тогда основные формулы (31,7) и (31,8) для упругого рассеяния без учета затухания ($\beta_1=\beta_2=0$, $\varepsilon_j=1$) можно представить в виде

$$C(s)=f_s, \tag{36,54}$$

$$C'(s')=\frac{1-e^{ic\Gamma' t}}{c\hbar L^3\Gamma'}V_{\boldsymbol{k}',\boldsymbol{k}}f'_{s'}. \tag{36,55}$$

Здесь мы представим матричный элемент $H^{s's}_{\boldsymbol{k}',\boldsymbol{k}}$ в виде произведения координатной и спиновой частей

$$H^{s's}_{\boldsymbol{k}',\boldsymbol{k}}f_s=V_{\boldsymbol{k}',\boldsymbol{k}}f'_{s'}, \tag{36,55a}$$

где

$$V_{\boldsymbol{k}',\boldsymbol{k}}=\int e^{-i(\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{k})\boldsymbol{r}}V(\boldsymbol{r})\,d^3x, \tag{36,56}$$

$$f'_{s'}=\sum_{s=+1,\,-1} b'^{+}(s')\,\gamma b(s)\,f_s. \tag{36,56a}$$

Тогда для эффективного сечения с учетом спиновых эффектов получаем следующее выражение:

$$\sigma = \frac{L^3K}{ck}\frac{1}{\sum\limits_s f_s^+ f_s}\sum_{k',\, s'}\frac{\partial}{\partial t}C'^+(s')C'(s') =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{\sum\limits_s f_s^+ f_s}\frac{K}{c^2\hbar^2 k}\int d\Omega'\, dk' k'^2 \delta(\Gamma')\,|V_{k',\,k}|^2 \sum_{s'=\pm 1} f_{s'}'^+ f_{s'}'. \qquad (36{,}57)$$

Отсюда после интегрирования по δ-функции найдем следующее выражение для дифференциального эффективного сечения:

$$d\sigma = \frac{K^2}{4\pi^2 c^2\hbar^2 \sum\limits_s f_s^+ f_s}|V_{k',\,k}|^2 \sum_{s'=\pm 1} f_{s'}'^+ f_{s'}'\, d\Omega'. \qquad (36{,}58)$$

Мы введем величины (для падающего пучка будем писать их без штриха, а для рассеянного — со штрихом)

$$\left.\begin{aligned} p &= f_1^+ f_1 + f_{-1}^+ f_{-1}, \\ p_1 &= f_1^+ f_1 - f_{-1}^+ f_{-1}, \\ p_2 &= f_1^+ f_{-1}, \quad p_2^+ = f_{-1}^+ f_1, \end{aligned}\right\} \qquad (36{,}59)$$

которые будут характеризовать общую интенсивность (p), амплитудную поляризацию (p_1) и фазовые поляризации (p_2 и p_2^+) пучка.

В частности, для неполяризованного падающего пучка электронов

$$p = 1, \quad p_1 = p_2 = p_2^+ = 0. \qquad (36{,}60)$$

Рассмотрим для примера рассеяние частиц на силовом центре, обладающем сферической симметрией. Этому условию удовлетворяет, например, кулоновский потенциал [1])

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{r}, \qquad V_{k',\,k} = -\frac{4\pi Ze^2}{|\boldsymbol{k}' - \boldsymbol{k}|^2}, \qquad \gamma = I. \qquad (36{,}61)$$

---

[1]) Формулой (36,58) мы можем также пользоваться, если предположить согласно Гофштадтеру [см. выше, п. в)], что протон имеет размеры порядка $0{,}77 \cdot 10^{-13}$ *см*.

В этом случае при больших значениях энергии электрона

$$E = c\hbar k\left(k > \frac{1}{0{,}77}10^{13}\right)$$

для формфактора $V_{k',\,k}$ [см. (36,56)] мы получим значение, отличное от кулоновского.

Тогда с помощью равенства (20,13) мы находим ($\theta = \varphi = 0$):

$$\left.\begin{aligned} f'_1 &= \cos\frac{\theta'}{2} f_1 - \frac{k_0}{K}\sin\frac{\theta'}{2} e^{-i\varphi'} f_{-1}, \\ f'_{-1} &= \frac{k_0}{K}\sin\frac{\theta'}{2} f_1 + \cos\frac{\theta'}{2} e^{-i\varphi'} f_{-1}. \end{aligned}\right\} \qquad (36,62)$$

Из последних формул легко определить величину, характеризующую интенсивность рассеянного пучка:

$$p' = f_1'^{+} f_1' + f_{-1}'^{+} f'_{-1} = \left(\cos^2\frac{\theta'}{2} + \frac{k_0^2}{K^2}\sin^2\frac{\theta'}{2}\right) p, \qquad (36,63)$$

а также величины, характеризующие поляризационные свойства рассеянного пучка:

$$\left.\begin{aligned} p_1' &= \left(\cos^2\frac{\theta'}{2} - \frac{k_0^2}{K^2}\sin^2\frac{\theta'}{2}\right) p_1 - 2\frac{k_0}{K}\sin\frac{\theta'}{2}\cos\frac{\theta'}{2}\left(e^{-i\varphi'} p_2 + e^{i\varphi'} p_2^{+}\right), \\ p_2' &= \frac{k_0}{K}\sin\frac{\theta'}{2}\cos\frac{\theta'}{2} p_1 + \cos^2\frac{\theta'}{2} e^{-i\varphi'} p_2 - \frac{k_0^2}{K^2}\sin^2\frac{\theta'}{2} e^{i\varphi'} p_2^{+}, \\ p_2'^{+} &= \frac{k_0}{K}\sin\frac{\theta'}{2}\cos\frac{\theta'}{2} p_1^{+} + \cos^2\frac{\theta'}{2} e^{i\varphi'} p_2^{+} - \frac{k_0^2}{K^2}\sin^2\frac{\theta'}{2} e^{-i\varphi'} p_2. \end{aligned}\right\} \qquad (36,64)$$

Отсюда видно, что поляризационные эффекты совершенно не должны сказываться на дифференциальном эффективном сечении первичного рассеяния.

В первом борновском приближении поляризационные эффекты также не должны иметь места при рассеянии неполяризованного падающего пучка ($p = 1$, $p_1 = p_2 = p_2^{+} = 0$) на сферически симметричном силовом центре.

При наличии лишь амплитудной поляризации мы будем иметь

$$p_2 = p_2^{+} = 0, \qquad p_1 \neq 0.$$

Тогда из формул (36,63) и (36,64) следует:

$$\left.\begin{aligned} f_1'^{+} f_1' + f_{-1}'^{+} f'_{-1} &= \left(\cos^2\frac{\theta'}{2} + \frac{k_0^2}{K^2}\sin^2\frac{\theta'}{2}\right)\left(f_1^{+} f_1 + f_{-1}^{+} f_{-1}\right), \\ f_1'^{+} f_1' - f_{-1}'^{+} f'_{-1} &= \left(\cos^2\frac{\theta'}{2} - \frac{k_0^2}{K^2}\sin^2\frac{\theta'}{2}\right)\left(f_1^{+} f_1 - f_{-1}^{+} f_{-1}\right), \end{aligned}\right\} \qquad (36,65)$$

или

$$f_{s'}'^{+} f'_{s'} = \frac{1}{2}\sum_{s}\left((1 + ss')\cos^2\frac{\theta'}{2} + \frac{k_0^2}{K^2}(1 - ss')\sin^2\frac{\theta'}{2}\right) f_s^{+} f_s.$$

Заметим, что последнее выражение может быть получено из формул (21,17) и (21,18). В этом случае необходимо в последних формулах положить

$$f'^{+}_{s'}f'_{s'}=\frac{1}{4}\sum_{s}\rho_{44}\sigma_{44}f_s^{+}f_s.$$

Из формулы (36,65) следует, что отношение дифференциального эффективного сечения без переворачивания спина $d\sigma^{\uparrow\uparrow}$ к соответствующему дифференциальному эффективному сечению с переворачиванием спина $d\sigma^{\uparrow\downarrow}$,

$$\frac{d\sigma^{\uparrow\uparrow}}{d\sigma^{\uparrow\downarrow}}=\frac{K^2\cos^2\frac{\theta'}{2}}{k_0^2\sin^2\frac{\theta'}{2}}. \tag{36,66}$$

Отсюда видно, что в ультрарелятивистском случае ($K\gg k_0$) рассеяние будет происходить исключительно без переворачивания спина (если $\theta'\neq\pi$).

д) Поляризационные эффекты в следующем приближении. Замечание о том, что при рассеянии неполяризованного пучка электронов силовым центром, обладающим сферической симметрией, не могут возникнуть поляризационные эффекты, справедливо лишь для первого борновского приближения.

Для того чтобы определить поляризацию в следующем приближении, мы для величины $f'_{s'}$ используем не приближенное равенство (36,56а), а интегральное уравнение теории затухания, которое получается в результате подстановки (36,55) в исходное уравнение (31,3):

$$(f'_{s'}-b'^{+}(s')\,b(s)\,f_s)\,V_{k',k}=$$
$$=\frac{kK}{8\pi^2c\hbar i}\oint d\Omega''V_{k',k''}V_{k'',k}\sum_{s''}b'^{+}(s')\,b''(s'')\,f''_{s''}. \tag{36,67}$$

Последнее выражение совпадает с основным уравнением теории затухания (см. § 31), если в нем пренебречь размазыванием непрерывного спектра, т. е. положить $\beta_1=\beta_2=0$. Уравнение (36,67) легко может быть решено точно, когда частицы рассеиваются δ-потенциалом

$$V=V_0\delta(r),\qquad V_{k'',k'}=V_{k',k}=V_0.$$

Для этого введем две функции [см. также (31,23)]:

$$\left.\begin{aligned}F^{1}_{s's''}&=\frac{1}{2}\left(1+\frac{k_0}{K}\right)(\cos\theta'_{s'}\cos\theta''_{s''}+\sin\theta'_{s'}\sin\theta''_{s''}e^{i(\varphi''-\varphi')}),\\ F^{2}_{s's''}&=\frac{1}{2}s's''\left(1-\frac{k_0}{K}\right)(\cos\theta'_{s'}\cos\theta''_{s''}+\sin\theta'_{s'}\sin\theta''_{s''}e^{i(\varphi''-\varphi')}).\end{aligned}\right\} \tag{36,68}$$

Легко показать, что

$$b'^{+}(s')\,b''(s'')=F^{1}_{s's''}+F^{2}_{s's''}. \qquad (36,69)$$

Искомое решение будем искать в виде

$$f'_{s'}=\left(\varepsilon_1 F^{1}_{s's}+\varepsilon_2 F^{2}_{s's}\right) f_s. \qquad (36,70)$$

Подставляя (36,70) в исходное уравнение (36,67) и принимая во внимание условие ортогональности (31,24), которое в нашем случае имеет вид

$$\sum_{s''}\oint d\Omega'' F^{j}_{s's''}F^{j'}_{s''s}=2\pi\left[1-(-1)^{j}\frac{k_0}{K}\right]F^{j}_{s's}\delta_{jj'},$$

получим значения коэффициентов ε_1 и ε_2, определяемых формулой (31,25):

$$\varepsilon_{1,2}=\frac{1}{1+i\delta_{1,2}}, \qquad \delta_{1,2}=\frac{V_0 k\,(K\pm k_0)}{4\pi c\hbar}. \qquad (36,71)$$

Отсюда для коэффициентов f'_1 и f'_{-1}, характеризующих поляризацию рассеянного пучка, находим следующие выражения:

$$f'_1=(1-i\beta')\left[(1+i\alpha')\cos\frac{\theta'}{2}f_1-\frac{k_0}{K}\sin\frac{\theta'}{2}e^{-i\varphi'}f_{-1}\right], \qquad (36,72)$$

$$f'_{-1}=(1-i\beta')\left[\frac{k_0}{K}\sin\frac{\theta'}{2}f_1+(1+i\alpha')\cos\frac{\theta'}{2}e^{-i\varphi'}f_{-1}\right],$$

где

$$\beta'=\frac{V_0 kK}{2\pi c\hbar}, \qquad \alpha'=\frac{V_0 k^3}{4\pi c\hbar K}. \qquad (36,73)$$

В выражении (36,72) мы отбросили величины второго порядка относительно α' и β'.

Расчеты, выполненные для произвольного рассеивающего центра, обладающего сферической симметрией, дают следующие значения коэффициентов β' и α' [см. [1]]:

$$\beta'=\frac{kK}{8\pi^2 c\hbar V_{k'k}}\oint d\Omega'' V_{k'k''}V_{k''k},$$

$$\alpha'=\frac{k^3}{16\pi^2 c\hbar K V_{k'k}}\oint d\Omega'' V_{k'k''}V_{k''k}\frac{((\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'')(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}'))}{(\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}'))}. \qquad (36,74)$$

В частности, в случае кулоновского поля [см. (36,61)] мы найдем, что выражение для коэффициента β' будет расходящимся, а коэффициент α' останется конечным и определится выражением [2]

$$\alpha'=-\frac{Ze^2 k}{c\hbar K}\,\mathrm{tg}^2\frac{\theta'}{2}\ln\operatorname{cosec}\frac{\theta'}{2}. \qquad (36,75)$$

---

[1] А. Соколов, J. Phys. USSR **9**, 363 (1945).

[2] Это значение для α' было получено несколько другим путем Моттом [N. Mott, Proc. Roy. Soc. **(A) 124**, 425 (1929); **(A) 135**, 429 (1932), см. также A. Mohr, Proc. Roy. Soc. **(A) 182**, 189 (1943)]. Мы нашли эту величину с помощью теории затухания.

Заметим, что на поляризационных эффектах коэффициент β' не скажется, поскольку он входит совершенно одинаково в выражения для f'_1 и f'_{-1}. Оказать влияние на поляризационные эффекты может только величина α', которая остается конечной даже для кулоновского поля.

Явление поляризации может быть обнаружено в результате изучения двойного рассеяния[1]). Пусть первичный пучок является неполяризованным $(p=1,\ p_1=p_2=p_2^+=0)$. Тогда в результате первого рассеяния, как легко получить из формулы (36,72), возникнет фазовая поляризация

$$p'_2=-i\frac{k_0}{2K}\alpha'\sin\theta' p,\quad p'^+_2=i\frac{k_0}{2K}\alpha'\sin\theta' p, \qquad (36,76)$$

которая приведет к тому, что вторичное рассеяние будет обладать азимутальной асимметрией

$$p''=\left(\cos^2\frac{\theta''}{2}+\frac{k_0^2}{K^2}\sin^2\frac{\theta''}{2}\right)p'+i\alpha''\frac{k_0}{K}\sin\theta''\left(e^{-i\varphi''}p'_2-p'^+_2e^{i\varphi''}\right)=$$

$$=\left[\left(\cos^2\frac{\theta''}{2}+\frac{k_0^2}{K^2}\sin^2\frac{\theta''}{2}\right)\left(\cos^2\frac{\theta'}{2}+\frac{k_0^2}{K^2}\sin^2\frac{\theta'}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+\alpha'\alpha''\frac{k_0^2}{K^2}\sin\theta'\sin\theta''\cos\varphi''\right]p, \qquad (36,77а)$$

где угол φ'', определяющий асимметрию вторичного рассеяния, может быть найден из соотношения

$$\cos\varphi''=(\boldsymbol{n}'\boldsymbol{n}''). \qquad (36,77б)$$

Здесь

$$\boldsymbol{n}'=\frac{[\boldsymbol{k}'\boldsymbol{k}]}{|[\boldsymbol{k}'\boldsymbol{k}]|}\quad \text{и}\quad \boldsymbol{n}''=\frac{[\boldsymbol{k}''\boldsymbol{k}']}{|[\boldsymbol{k}''\boldsymbol{k}']|}$$

— единичные векторы нормалей к плоскостям первого и второго рассеяний.

Как было показано Ферми[2]), для того чтобы объяснить явление поляризации при рассеянии нуклонов на ядрах в первом борновском приближении, необходимо ввести спин-орбитальные силы

$$\left(\sim\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}(\boldsymbol{\sigma}'\boldsymbol{l})\right).$$

Как известно, спин-орбитальные силы получаются автоматически из уравнения Дирака при переходе к нерелятивистскому приближению с учетом членов порядка $(v/c)^2$ [см. § 50, п. а)]. Поэтому

---

[1]) Поляризация электронных волн при двойном рассеянии впервые исследовалась Моттом (см., например, Н. Мотт и Г. Месси, Теория атомных столкновений, стр. 99).

[2]) E. Fermi, Nuovo Cim. 11, 407 (1954).

в теории затухания, в которой учитываются и следующие (по сравнению с борновским приближением) члены разложения, оказалось возможным описать явление поляризации при рассеянии[1]).

е) Поляризационные эффекты при рассеянии пучка электронов силовым центром, обладающим электрическим зарядом и магнитным моментом[2]). Поляризационные эффекты можно описать даже в первом борновском приближении при рассеянии пучка электронов неподвижным центром, обладающим электрическим зарядом e' и магнитным моментом μ'.

Учитывая, что в этом случае скалярный потенциал Φ и вектор-потенциал A будут соответственно равны

$$\Phi = \frac{e'}{r}, \qquad A = [\mu'\nabla]\frac{1}{r}, \tag{36,78}$$

для энергии взаимодействия падающих электронов ($e^- = -e$) с рассеивающим центром получим выражение

$$V(r) = e\alpha_\mu A_\mu = -ee'\left(I + \left(\alpha\left[\frac{\mu'}{e'}\nabla\right]\right)\right)\frac{1}{r}. \tag{36,79}$$

В этом случае для матричного элемента (36,55а) будем иметь:

$$H^{s's}_{k'k} = V_{k'k} b'^+(s')\gamma b(s), \tag{36,80}$$

где

$$\varkappa = k - k', \quad V_{k'k} = -\frac{4\pi ee'}{\varkappa^2} = -\frac{\pi ee'}{k^2\sin^2\frac{\theta'}{2}}, \tag{36,81}$$

$$\gamma = I - i\left(\alpha\left[\frac{\mu'}{e'}\varkappa\right]\right).$$

Для упрощения дальнейших расчетов предположим, что магнитный момент рассеивающего центра направлен по движению электрона ($\mu' \| k$), т. е. по оси z. В этом случае имеем:

$$\gamma = I - i\frac{\mu'}{e'}k\sin\theta'(\alpha_1\sin\varphi' - \alpha_2\cos\varphi'). \tag{36,82}$$

Тогда для спиновой части амплитуд рассеяния

$$f'_{s'} = \sum_{s=\pm 1} b'^+(s')\gamma b(s) f_s, \tag{36,83}$$

характеризующих поляризационные эффекты, найдем следующие выражения:

$$\begin{aligned} f'_1 &= (1-\alpha')\cos\frac{\theta'}{2}f_1 - \frac{k_0}{K}\sin\frac{\theta'}{2}e^{-i\varphi'}f_{-1}, \\ f'_{-1} &= (1+\alpha')\cos\frac{\theta'}{2}e^{-i\varphi'}f_{-1} + \frac{k_0}{K}\sin\frac{\theta'}{2}f_1, \end{aligned} \tag{36,84}$$

---

[1]) А. А. Соколов и Б. К. Керимов, ЖЭТФ 33, 827 (1957).

[2]) А. Соколов, J. Phys. USSR 9, 363 (1945); В. Кан, ДАН СССР 50, 139 (1945); R. Newton, Phys. Rev. 103, 385 (1956).

где

$$\alpha' = 2\frac{\mu'}{e'}\frac{k^2}{K}\sin^2\frac{\theta'}{2}. \tag{36,85}$$

Из (36,84) следует, что в результате первичного рассеяния неполяризованного пучка $(p_1 = p_2 = p_2^+ = 0)$ должны возникнуть как амплитудная, так и фазовая поляризация[1]):

$$p' = \left[(1+\alpha'^2)\cos^2\frac{\theta'}{2} + \frac{k_0^2}{K^2}\sin^2\frac{\theta'}{2}\right]p, \tag{36,86}$$

$$p_1' = -2\alpha'\cos^2\frac{\theta'}{2}p, \tag{36,87}$$

$$p_2' = p_2'^+ = -\alpha'\frac{k_0}{K}\sin\frac{\theta'}{2}\cos\frac{\theta'}{2}p. \tag{36,88}$$

Поэтому при вторичном рассеянии должна наблюдаться угловая асимметрия, пропорциональная $\cos\varphi''$:

$$p'' = \left[\left(1+\alpha''^2\right)\cos^2\frac{\theta''}{2} + \frac{k_0^2}{K^2}\sin^2\frac{\theta''}{2}\right]p' - 2\alpha''\cos^2\frac{\theta''}{2}p_1' +$$
$$+ 2\alpha''\frac{k_0}{K}\cos\frac{\theta''}{2}\sin\frac{\theta''}{2}\left(e^{-i\varphi''}p_2' + e^{i\varphi''}p_2'^+\right) =$$
$$= \left\{\left[\left(1+\alpha''^2\right)\cos^2\frac{\theta''}{2} + \frac{k_0^2}{K^2}\sin^2\frac{\theta''}{2}\right]\left[\left(1+\alpha'^2\right)\cos^2\frac{\theta'}{2} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{k_0^2}{K^2}\sin^2\frac{\theta'}{2}\right] + 4\alpha'\alpha''\cos^2\frac{\theta'}{2}\cos^2\frac{\theta''}{2} - \alpha'\alpha''\frac{k_0^2}{K^2}\sin\theta'\sin\theta''\cos\varphi''\right\}p, \tag{36,89}$$

где значение $\cos\varphi''$ определяется выражением (36,77б).

Отсюда видно, что если рассеивающий центр обладает одновременно электрическим зарядом $(e' \neq 0)$ и магнитным моментом $(\mu' \neq 0)$, то в первом борновском приближении должны возникать поляризационные эффекты. Заметим, что асимметрию для вторичного рассеяния дает лишь фазовая поляризация (p_2').

При наличии лишь одного заряда или одного магнитного момента асимметрия при двойном рассеянии может быть учтена лишь следующим приближением.

---

[1]) Напомним, что дифференциальное эффективное сечение связано с величиной

$$p' = \sum_{s'=\pm 1} f_{s'}'^+ f_{s'}'$$

соотношением (36,58).

§ 37. Тормозное излучение

При рассеянии кулоновским центром электроны претерпевают отклонение, т. е. получают ускорение. Согласно классической теории ускоренно движущиеся электроны должны излучать. Аналогичным образом и по квантовой теории при рассеянии электрона должна существовать известная вероятность перехода его в более низкие энергетические состояния, сопровождающегося испусканием фотонов.

Рассмотрим некоторые вопросы, связанные с тормозным излучением, как по квазиклассической, так и по квантовой теории.

а) Квазиклассическая теория. Электрон, пролетающий в поле ядра (рис. 12) заряда Ze, испытывает ускорение

$$\dot{w} = -\frac{eE}{m_0} = -\frac{Ze^2}{m_0 r^2} r^0,$$

благодаря чему в течение времени dt испускает электромагнитную энергию

$$dE = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\frac{Z^2 e^4}{m_0^2 r^4} dt.$$

Из уравнений (36,1) и (36,2), определяющих движение электрона, находим:

$$\dot{r} = \mp c\sqrt{\beta^2 + \frac{2Zr_0}{r} - \frac{\beta^2 b^2}{r^2}},$$

где $\beta = v/c$, $r_0 = e^2/m_0 c^2$. При движении электрона к ядру вплоть до минимального расстояния, которое определяется из условия $\dot{r} = 0$, мы должны перед корнем брать знак минус (радиус r уменьшается), а после прохождения ядра — знак плюс.

Тогда для полной энергии излучения мы находим выражение

$$\Delta E = \frac{4}{3} e^2 Z^2 r_0^2 \int_a^\infty \frac{dr}{r^4\sqrt{\beta^2 + \frac{2Zr_0}{r} - \frac{\beta^2 b^2}{r^2}}},$$

где a определяется из условия $\dot{r}(a) = 0$, т. е. является положительным корнем уравнения

$$\beta^2 + \frac{2Zr_0}{a} - \frac{\beta^2 b^2}{a^2} = 0.$$

Вычисляя интеграл в предположении, что прицельное расстояние b много больше, чем отношение $r_0 Z/\beta$, найдем:

$$\Delta E = \frac{\pi}{3}\frac{e^2 Z^2 r_0^2}{\beta b^3}.$$

Для того чтобы получить эффективное сечение тормозного излучения, необходимо это выражение умножить на вероятность попадания электрона в площадку $2\pi b\, db$, разделить на полную начальную

энергию, которая в нерелятивистском случае будет равна $E_0 = m_0c^2$, и, наконец, проинтегрировать по возможным значениям прицельного расстояния:

$$\sigma_{\text{рад}} = \frac{2\pi^2}{3} r_0^3 Z^2 \frac{c}{v} \int\limits_{b_0}^{\infty} \frac{db}{b^2}.$$

Нижнюю границу мы положили равной тому расстоянию, при котором законы классической механики перестают иметь место. Как известно из квантовой механики, эта граница определяется условием, что расстояния b_0 становятся сравнимыми с дебройлевской длиной волны (h/m_0v).

Полагая

$$b_0 = \frac{h}{m_0v},$$

находим порядок величины эффективного сечения по классической теории:

$$\sigma_{\text{рад}} \approx r_0^2 Z^2 \alpha. \qquad (37,1)$$

Квантовая теория в нерелятивистском приближении дает аналогичное выражение для $\sigma_{\text{рад}}$, но позволяет вместе с тем найти значение численного коэффициента, оставшегося в классической теории неопределенным [см. формулу (37,30)].

б) Квантовая теория. Пусть электрон с импульсом $\boldsymbol{p} = \hbar\boldsymbol{k}$ пролетает около ядра Ze. В результате рассеяния, когда импульс электрона становится равным $\boldsymbol{p}' = \hbar\boldsymbol{k}'$, он может испустить фотон с волновым вектором $\boldsymbol{\varkappa}$ (рис. 12), т. е. произойдет реакция появления фотона по схеме

$$e^- + Ze \to e^{-'} + Ze + \gamma.$$

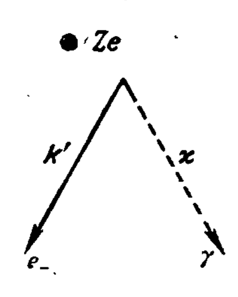


Рис. 12. Тормозное излучение.

Найдем энергию, теряемую электроном посредством излучения фотонов. При вычислении эффективного сечения по квантовой теории мы должны учесть, что электрон взаимодействует, с одной стороны, с кулоновским полем ядра [см. соотношение (36,11)]

$$V = -\frac{4\pi Ze^2}{L^3} \sum_{\varkappa'} \frac{e^{-i\varkappa' r}}{\varkappa'^2}, \qquad (37,2а)$$

а с другой — с полем виртуальных фотонов

$$U^+ = \frac{e}{L^{3/2}} \sum_{\varkappa} \sqrt{\frac{2\pi c\hbar}{\varkappa}} (\boldsymbol{\alpha a}^+)\, e^{ic\varkappa t - i\varkappa r}. \qquad (37,2б)$$

Поскольку кулоновское взаимодействие (37,2а) представляет собой эффект уже второго порядка (испускание «продольного» фотона

одним зарядом с последующим его поглощением другим), мы должны тормозное излучение рассматривать как эффект третьего порядка, так как соответствующее выражение для матричного элемента будет пропорционально e^3.

Волновое уравнение, определяющее движение электрона при взаимодействии с этими двумя полями, будет следующим:

$$\mathrm{D}\psi(N+1)=W^{+}\psi(N), \tag{37,3}$$

причем оператор энергии взаимодействия имеет вид

$$W^{+}\psi(N)=(U^{+}\mathrm{D}^{-1}V+V\mathrm{D}^{-1}U^{+})\psi(N). \tag{37,4}$$

Как было указано в § 29, мы можем пренебречь кулоновским искажением волновых функций, когда выполняются условия

$$\xi=\frac{Ze^2}{\hbar v}\ll 1, \qquad \xi'=\frac{Ze^2}{\hbar v'}\ll 1, \tag{37,5}$$

где $v=ck/K$ и $v'=ck'/K'$ — скорости электрона до и после соударения. Решая задачу по методу теории возмущений, мы можем выбрать начальную $\psi_0=\psi(N)$ и конечную $\psi'=\psi(N+1)$ волновые функции в следующем виде:

$$\psi_0=\frac{1}{L^{3/2}}\,b e^{-icKt+i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}f(N),$$

$$\psi'=\frac{1}{L^{3/2}}\sum_{\boldsymbol{k}'}{}' C'(t)\,b'e^{-icK't+i\boldsymbol{k}'\boldsymbol{r}}f(N+1), \tag{37,6}$$

причем в функции числа частиц $f(N)$ мы должны положить N равным нулю. В начальный момент времени имеем:

$$C'(0)=0. \tag{37,7}$$

Подставляя (37,6) в (37,3), найдем для энергии взаимодействия следующее выражение:

$$W^{+}\psi_0=\sum_{\boldsymbol{\varkappa},\,\boldsymbol{\varkappa}'}W^{+}(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\varkappa}')\,e^{ic\varkappa t-i\boldsymbol{r}(\boldsymbol{\varkappa}+\boldsymbol{\varkappa}')}\psi_0, \tag{37,8}$$

где

$$W^{+}(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\varkappa}')=-\left(\frac{2\pi e^2}{c\hbar L^3}\right)^{3/2}2Zc\hbar\frac{1}{\varkappa'^2\sqrt{\varkappa}}\times$$
$$\times\left[\frac{K-\varkappa+(\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{\varkappa}))+\rho_3k_0}{(K-\varkappa)^2-(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{\varkappa})^2-k_0^2}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{a}^{+})+(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{a}^{+})\frac{K+(\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{\varkappa}'))+\rho_3k_0}{K^2-(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{\varkappa}')^2-k_0^2}\right]. \tag{37,9}$$

Отсюда для вероятности тормозного излучения согласно формуле (32,7) имеем:

$$w=\frac{2\pi}{c\hbar^2}\sum_{\boldsymbol{k}',\,\varkappa,\,\varkappa'}R^{+}R\delta_{\boldsymbol{k},\,\varkappa+\varkappa'+\boldsymbol{k}'}\delta(K-K'-\varkappa); \tag{37,10}$$

здесь

$$R = b'^{+} W^{+}(\varkappa, \varkappa') b = \left(\frac{2\pi e^2}{c\hbar L^3}\right)^{3/2} 2Zc\hbar \frac{1}{\varkappa'^2 \sqrt{\varkappa}} S.$$

Для дальнейших преобразований величины R воспользуемся законами сохранения[1]):

$$\left.\begin{aligned} K - K' - \varkappa &= 0, \\ \boldsymbol{k} - \boldsymbol{\varkappa} - \boldsymbol{\varkappa}' - \boldsymbol{k}' &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{37,11}$$

а также уравнениями, которым должны удовлетворять амплитуды b и b'^{+}:

$$\left.\begin{aligned} (K - (\boldsymbol{\alpha k}) - \rho_3 k_0)\, b &= 0, \\ b'^{+}(K' - (\boldsymbol{\alpha k}') - \rho_3 k_0) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{37,12}$$

Тогда находим:

$$S = -b'^{+}\left(\frac{-2(\boldsymbol{k a}^{+}) + i(\boldsymbol{\sigma}[\boldsymbol{\varkappa a}^{+}]) + \varkappa(\boldsymbol{\alpha a}^{+})}{2(K\varkappa - (\boldsymbol{k\varkappa}))} + \right.$$
$$\left. + \frac{2(\boldsymbol{k}'\boldsymbol{a}^{+}) - i(\boldsymbol{\sigma}[\boldsymbol{\varkappa a}^{+}]) + \varkappa(\boldsymbol{\alpha a}^{+})}{2(K'\varkappa - (\boldsymbol{k}'\boldsymbol{\varkappa}))}\right) b, \tag{37,13}$$

откуда

$$w = \frac{64\pi^4 Z^2 e^6}{c^2\hbar^3 L^9} \sum_{\boldsymbol{k}', \boldsymbol{\varkappa}} \frac{S^{+}S}{\varkappa'^4 \varkappa} \delta(K' - K + \varkappa), \tag{37,14}$$

где

$$\varkappa'^2 = k^2 + k'^2 + \varkappa^2 - 2(\boldsymbol{k\varkappa}) + 2(\boldsymbol{k}'\boldsymbol{\varkappa}) - 2(\boldsymbol{kk}'). \tag{37,15}$$

Определим эффективное сечение σ, которое связано с вероятностью излучения w и числом частиц, падающих в единицу времени на единицу поверхности, $N_e = ck/L^3K$, соотношением

$$\sigma_{\text{рад}} = \frac{w}{N_e} = \frac{L^3 wK}{ck}.$$

Переходя к непрерывному спектру $\left(\frac{1}{L^6}\sum\limits_{\boldsymbol{k}', \boldsymbol{\varkappa}} \to \frac{1}{(2\pi)^6}\int d^3k'\, d^3\varkappa\right)$, а затем к сферическим координатам $\boldsymbol{k}'(k', \theta, \varphi')$ и $\boldsymbol{\varkappa}(\varkappa, \vartheta, \varphi)$, получаем:

$$\sigma_{\text{рад}} = \frac{Z^2}{\pi^2}\left(\frac{e^2}{c\hbar}\right)^3 \int \frac{KK'k'\varkappa}{k\varkappa'^4} \sin\vartheta \sin\theta\, S^{+}S\, d\vartheta\, d\theta\, d\varphi\, d\varphi'\, d\varkappa; \tag{37,16}$$

---

[1]) Заметим, что при отсутствии кулоновского поля ($\boldsymbol{\varkappa}' = 0$) тормозное излучение становится невозможным, поскольку в этом случае одновременно не могут выполняться оба закона сохранения (37,11). Более подробно см. § 32. В кулоновском же поле ($\boldsymbol{\varkappa}' \neq 0$) некоторый импульс принимает на себя ядро.

здесь при интегрировании по переменной k' мы воспользовались равенством

$$\int_0^\infty f(k')\,\delta(K'-K+\varkappa)\,dk' = \frac{f(k')}{\partial K'/\partial k'} = \left(\frac{K'f(k')}{k'}\right)_{K'=K-\varkappa}.$$

в) Нерелятивистский случай (сплошной рентгеновский спектр). Дальнейшие вычисления мы произведем для нерелятивистского случая, когда матричные элементы, пропорциональные $\boldsymbol{\alpha}$, будут иметь порядок v/c относительно матричных элементов, пропорциональных I и σ (см. § 21). Тогда мы можем положить

$$S = b'^{+}\frac{((\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\,\boldsymbol{a}^{+})}{k_0\varkappa}\,b.$$

С помощью формулы (21,15) находим для квадрата матричного элемента:

$$S^{+}S = \frac{1}{k_0^2\varkappa^2}((\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\,\boldsymbol{a})((\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\,\boldsymbol{a}^{+})\frac{1}{8}\sum_{s,\,s'}\rho_{44}\sigma_{44}. \qquad (37,17)$$

Согласно формулам (21,17) и (21,18) после суммирования по конечным значениям спина ($s'=-1,\ 1$) и усреднения по возможным начальным значениям получаем:

$$\frac{1}{8}\sum_{s,\,s'}\rho_{44}\sigma_{44} = \frac{1}{8}\sum_{s,\,s'}\left(1+ss'\frac{kk'}{KK'}+\frac{k_0^2}{KK'}\right)\left(1+ss'\frac{(\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}')}{kk'}\right)\cong 1.$$

Далее, из соотношения

$$a_n a_{n'}^{+} = \delta_{nn'} - \frac{\varkappa_n\varkappa_{n'}}{\varkappa^2}$$

находим:

$$S^{+}S = \frac{1}{k_0^2\varkappa^2}((\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\,\boldsymbol{a})((\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\,\boldsymbol{a}^{+}) =$$

$$= \frac{1}{k_0^2\varkappa^2}\left[(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')^2 - \frac{((\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\,\boldsymbol{\varkappa})^2}{\varkappa^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{k_0^2\varkappa^2}(k^2+k'^2-2(\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}')-(\boldsymbol{k}\boldsymbol{\varkappa}^0)^2-(\boldsymbol{k}'\boldsymbol{\varkappa}^0)^2+2(\boldsymbol{k}\boldsymbol{\varkappa}^0)(\boldsymbol{k}'\boldsymbol{\varkappa}^0)), \qquad (37,18)$$

где $\boldsymbol{\varkappa}^0 = \boldsymbol{\varkappa}/\varkappa$ — единичный вектор, характеризующий направление вылета тормозного фотона.

Волновое число тормозного фотона

$$\varkappa = K - K' = \frac{k^2-k'^2}{2k_0}$$

имеет порядок βk, и поэтому (37,15) мы можем записать в виде

$$\varkappa'^2 = k^2+k'^2-2(\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}').$$

Тогда дифференциальное эффективное сечение тормозного испускания фотона с энергией $c\hbar\varkappa$ примет вид

$$d\sigma_{\text{рад}} = \frac{Z^2}{\pi^2}\left(\frac{e^2}{c\hbar}\right)^3 \frac{d\varkappa}{\varkappa}\frac{k'}{k} \oint \frac{k^2+k'^2-2(\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}')-(\boldsymbol{k}'\boldsymbol{\varkappa}^0)^2-(\boldsymbol{k}\boldsymbol{\varkappa}^0)^2+2(\boldsymbol{k}\boldsymbol{\varkappa}^0)(\boldsymbol{k}'\boldsymbol{\varkappa}^0)}{(k^2+k'^2-2(\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'))^2} \times$$
$$\times \sin\vartheta \sin\theta \, d\vartheta \, d\theta \, d\varphi \, d\varphi'. \quad (37,19)$$

Эта формула определяет излучение сплошного рентгеновского спектра, который возникает при тормозном излучении электронов с энергией, меньшей энергии покоя, т. е. в нерелятивистском случае. Для заданного направления рассеяния электронов (т. е. векторов $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{k}'$) максимум интенсивности излучения расположен в направлении, перпендикулярном к плоскости движения электронов [т. е. к плоскости $(\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}')$]. Этот результат следует также и из классической теории, согласно которой максимум интенсивности излучения перпендикулярен к направлению ускорения.

Полное же эффективное сечение может быть найдено в результате интегрирования (37,19) еще по величине $\varkappa$:

$$\sigma = \int_0^\infty \frac{d\sigma}{d\varkappa}\, d\varkappa.$$

Раскрывая интегралы в выражении (37,19), находим:

$$d\sigma_{\text{рад}} = \frac{16Z^2}{3k^2}\left(\frac{e^2}{c\hbar}\right)^3 \ln\left(\frac{k+k'}{k-k'}\right)\frac{d\varkappa}{\varkappa}. \quad (37,20)$$

Вводя кинетические энергии падающего и рассеянного электронов

$$T = E - m_0c^2 = \hbar c\,\frac{k^2}{2k_0},$$

$$T' = E' - m_0c^2 = \hbar c\,\frac{k'^2}{2k_0},$$

а также энергию тормозного фотона

$$\varepsilon = \hbar c\varkappa = T - T',$$

имеем:

$$d\sigma_{\text{рад}} = \frac{8}{3}\alpha r_0^2 Z^2 \frac{m_0c^2}{\varepsilon} \ln\frac{(\sqrt{T}+\sqrt{T-\varepsilon})^2}{\varepsilon}\, d\left(\frac{\varepsilon}{T}\right), \quad (37,21\text{a})$$

где

$$r_0 = \frac{e^2}{m_0c^2}, \qquad \alpha = \frac{e^2}{c\hbar}.$$

Из формулы (37,21a) видно, что вероятность испускания фотона обратно пропорциональна энергии ε. В предельном случае больших частот (когда $\varepsilon = T$) эффективное сечение $d\sigma$ просто исчезает, для малых же частот ($\varepsilon \to 0$) величина $\varepsilon\, d\sigma$ логарифмически расходится.

При малых энергиях падающего электрона мы не можем пользоваться плоскими волнами, и формула (37,21a) остается справедли-

вой, лишь если соблюдаются условия (37,5). При очень малых скоростях падающего или рассеянного электронов выражение (37,21а) мы должны умножить на поправочную функцию, определяющую искажение плоских волн кулоновским полем (см. также § 29). Эта функция, введенная Зоммерфельдом, имеет вид[1])

$$f(\xi, \xi') = \frac{2\pi\xi \cdot 2\pi\xi'}{(e^{2\pi\xi} - 1)(1 - e^{-2\pi\xi'})}, \quad (37,21б)$$

где

$$\xi = \frac{Ze^2}{\hbar v}, \qquad \xi' = \frac{Ze^2}{\hbar v'};$$

распределение по углам остается прежним.

При больших скоростях v электрона ($\xi \ll 1$) в начальном состоянии функция f обращается в единицу, если скорость рассеянного электрона также велика ($\xi' \ll 1$). Тогда мы получаем прежний результат. Влияние поправочной функции становится существенным, когда электрон излучает всю свою энергию, и поэтому скорость рассеянного электрона v' спадает до нуля ($\xi' \to \infty$). Тогда функция f обращается в бесконечность. Однако в этом случае эффективное сечение $d\sigma$ обращается в нуль, а произведение $d\sigma \cdot f(\xi, \xi')$ стремится к некоторому постоянному пределу. Наконец, при $v \to 0$ функция f, а вместе с ней и значение эффективного сечения стремятся к нулю по экспоненциальному закону.

г) «Инфракрасная катастрофа»[2]). Логарифмическая расходимость величины $\varepsilon\, d\sigma$ [см. (37,21а)] при тормозном излучении длинноволновых фотонов ($\varepsilon \to 0$, $\lambda = hc/\varepsilon \to \infty$) называется «инфракрасной катастрофой».

Прежде всего заметим, что этот вопрос носит чисто академический характер, поскольку разложение идет по величине

$$\frac{1}{137} \ln \frac{T}{\varepsilon} \sim \frac{1}{137} \ln \frac{\lambda m_0 c}{\hbar}, \quad (37,22)$$

(ради простоты кинетическую энергию мы положили равной собственной энергии электрона), которая остается много меньше единицы для λ, достигающих даже диапазона радиоволн. Однако возникающая трудность представляет большой теоретический интерес.

Она не связана с фундаментальными трудностями квантовой электродинамики, а именно с расходимостями в области больших импульсов виртуальных фотонов («ультрафиолетовая катастрофа»), для разрешения которых используются методы регуляризации, выходящие за рамки квантовой электродинамики (см. § 44). «Инфракрасная катастрофа» носит лишь кажу-

[1]) Как было отмечено в § 36, поправочная функция при упругом рассеянии даже в области малых скоростей равна единице.

[2]) F. Bloch and A. Nordsieck, Phys. Rev. 52, 54 (1937); W. Pauli nd M. Fierz, Nuovo Cim. 15, 167 (1938).

щийся характер и может быть устранена с помощью методов самой же квантовой электродинамики.

Поскольку мы интересуемся лишь принципиальной стороной вопроса, ограничимся рассмотрением нерелятивистского случая. Излучение длинноволнового фотона не должно влиять на движение электрона, и поэтому в формуле (37,19) можно положить

$$k = k', \quad (\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}') = k^2 \cos\theta,$$

$$\oint (\boldsymbol{k}\boldsymbol{\varkappa}^0)(\boldsymbol{\varkappa}'\boldsymbol{\varkappa}^0) \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = \frac{4\pi}{3} (\boldsymbol{k}\boldsymbol{\varkappa}').$$

Тогда эффективное сечение (37,19) для тормозного испускания длинноволнового фотона γ с волновым числом, лежащим в пределах между $\varkappa_0$ и $\varkappa$, в зависимости от угла рассеяния θ будет равно

$$d\sigma_{\text{рад}} \underset{\varkappa_0 \to 0}{=} \frac{4Z^2\alpha^3}{3\pi k^2} \frac{d\Omega}{(1-\cos\theta)} \int_{\varkappa_0}^{\varkappa} \frac{d\varkappa}{\varkappa} = d\sigma_{\text{Рез}} \frac{4}{3\pi} \alpha \frac{k^2}{k_0^2} (1-\cos\theta) \int_{\varkappa_0}^{k} \frac{d\varkappa}{\varkappa}, \tag{37,22а}$$

где эффективное сечение рёзерфордовского рассеяния равно

$$d\sigma_{\text{Рез}} = \frac{Z^2\alpha^2 k_0^2}{k^4 (1-\cos\theta)^2} d\Omega. \tag{37,22б}$$

При $\varkappa_0 \to 0$ выражение (37,22а) будет логарифмически расходиться, т. е. возникнет указанная «инфракрасная катастрофа».

Однако эта бесконечность будет скомпенсирована следующим членом разложения резерфордовского рассеяния, учитывающим флуктуационные силы, т. е. взаимодействие заряженной частицы с полем нерожденных фотонов (поперечных и продольных), сводящееся к виртуальному испусканию фотона с последующим его поглощением. Теория флуктуационных эффектов, связанная с электрон-позитронным вакуумом, будет рассмотрена нами позже в § 44. Здесь же мы воспользуемся готовым результатом, в котором произведена регуляризация, т. е. отброшены члены, расходящиеся при больших значениях $\varkappa$.

Согласно формуле (44,62) (см. ниже) кулоновское взаимодействие

$$V = -e\Phi = -\frac{4\pi Z e^2}{L^3} \sum_{\varkappa'} \frac{e^{-i\varkappa' r}}{\varkappa'^2}$$

с учетом флуктуационных членов, в котором оставлен лишь коэффициент, расходящийся в области длинных волн ($\varkappa \to 0$) переходит в

$$V \to V + V^{\text{фл}},$$

где

$$V + V^{\text{фл}} = \left(1 + \frac{\alpha}{3\pi k_0^2}\int\limits_{\varkappa_0}^{k_0}\frac{d\varkappa}{\varkappa}\nabla^2\right)V =$$

$$= -\frac{4\pi Ze^2}{L^3}\sum_{\varkappa'}\frac{e^{-i\varkappa' r}}{\varkappa'^2}\left(1 - \frac{\alpha\varkappa'^2}{3\pi k_0^2}\int\limits_{\varkappa_0}^{k_0}\frac{d\varkappa}{\varkappa}\right).$$

В силу законов сохранения импульса и энергии:

$$\varkappa'^2 = (k^2 + k'^2 - 2kk'\cos\theta) = 2k^2(1-\cos\theta),$$

найдем для эффективного сечения:

$$d\sigma^{\text{фл}}_{\text{Рез}} \underset{\varkappa_0 \to 0}{=} d\sigma_{\text{Рез}}\left(1 - \frac{4}{3\pi}\alpha\frac{k^2}{k_0^2}(1-\cos\theta)\int\limits_{\varkappa_0}^{k_0}\frac{d\varkappa}{\varkappa}\right). \qquad (37{,}22\text{в})$$

Отсюда видно, что при упругом рассеянии частиц с учетом флуктуационных членов, так же как и при тормозном излучении, возникает «инфракрасная катастрофа», но с обратным знаком; поэтому мы вынуждены в выражение для эффективного сечения (37,22в) ввести величину $\varkappa_0$, обрывающую спектр с инфракрасной стороны.

В суммарном же значении эффективного сечения (рёзерфордовское рассеяние с учетом флуктуационных членов плюс тормозное излучение)

$$d\sigma = d\sigma^{\text{фл}}_{\text{Рез}} + d\sigma_{\text{рад}},$$

которое только и имеет физический смысл, расходящиеся члены, пропорциональные $\ln\varkappa_0$, просто сокращаются, и тем самым «инфракрасная катастрофа» как для тормозного излучения, так и для формулы Рёзерфорда с учетом радиационных поправок оказывается устраненной. Величину же $\varkappa_0$ как в (37,22а), так и в (37,22в), мы теперь можем положить равной хотя и малой, но конечной величине. При выборе ее надо учесть, что в (37,22а) $\varkappa_0$ является нижней границей энергии реально излучаемого фотона, а в (37,22в) — энергии вакуума. Поэтому в будущем, по-видимому, придется решать вопрос о том, при каких минимальных энергиях можно отличить реально существующий фотон от энергии вакуума электромагнитного поля[1]).

Интересно заметить, что «инфракрасная катастрофа» возникает и в ряде других явлений квантовой электродинамики, когда мы имеем дело с длинноволновыми фотонами. Например, при исследовании двойного эффекта Комптона, когда в результате поглощения

[1]) В § 44, п. д) мы покажем, каким образом можно определить величину $\varkappa_0$ при исследовании сдвига уровней с учетом вакуумных членов.

электроном (e^-) одного фотона (γ) испускаются два фотона (γ' и γ''), мы находим следующее выражение эффективного сечения [если ограничиться нерелятивистским случаем ($\varkappa \ll k_0$) и считать второй фотон длинноволновым ($\varkappa' \cong \varkappa$ и $\varkappa'' \ll \varkappa$) [1])]:

$$d\sigma_{\text{Компт}}^{\text{двойн}} = \frac{8}{3} r_0^2 \alpha \left(\frac{\varkappa}{k_0}\right)^2 \frac{d\Omega}{4\pi} (1 + \cos^2\theta)(1 - \cos\theta) \int \frac{d\varkappa''}{\varkappa''},$$

где θ — угол рассеяния основного фотона $\varkappa'$. Отсюда для вероятности комптоновского рассеяния с испусканием второго длинноволнового фотона, лежащего в пределах волновых чисел $\varkappa_0$, $\varkappa''$, мы находим выражение

$$d\sigma_{\text{Компт}}^{\text{двойн}} = d\sigma_{\text{Компт}}^{\text{нерел}} \frac{4}{3\pi} \alpha \left(\frac{\varkappa}{k_0}\right)^2 (1 - \cos\theta) \ln \frac{\varkappa''}{\varkappa_0}, \qquad (37,22г)$$

где

$$d\sigma_{\text{Компт}}^{\text{нерел}} = \frac{1}{2} r_0^2 (1 + \cos^2\theta)\, d\Omega.$$

Здесь нижнюю границу следует стремить к нулю ($\varkappa_0 \to 0$). В этом случае эффективное сечение будет расходиться по логарифмическому закону, т. е. вновь возникнет «инфракрасная катастрофа». Однако инфракрасный член полностью скомпенсируется учетом флуктуационных членов в обычном эффекте Комптона. Возникновение этой поправки можно объяснить следующим образом. В результате поглощения электроном фотона γ испускаются два фотона γ' и γ''. Однако виртуальный фотон γ'', который может быть и поперечным и продольным, тотчас же поглощается обратно:

$$\gamma + e^- \to \gamma' + (\gamma'' - \gamma'') + e^-.$$

С учетом флуктуационных членов эффективное сечение комптоновского рассеяния в нерелятивистском случае (после отбрасывания расходимостей в области больших импульсов виртуальных фотонов приобретает вид [2]):

$$d\sigma_{\text{Компт}}^{\text{флукт}} = d\sigma_{\text{Компт}}^{\text{нерел}} \left\{1 - \frac{4\pi}{3} \alpha \left(\frac{\varkappa}{k_0}\right)^2 \left[\left(\cos^2\theta - 3 - \frac{4\cos\theta}{1 + \cos^2\theta}\right) \ln \frac{k_0}{\varkappa} + (1 - \cos\theta) \ln \frac{k_0}{\varkappa_0}\right]\right\}. \qquad (37,22д)$$

Отсюда следует, что в суммарном выражении для эффективного сечения [(37,22г) плюс (37,22а)] инфракрасные члены, пропорциональные $\ln \varkappa_0$, вновь сокращаются, и поэтому величину $\varkappa_0$ в этих

---

[1]) Этот вопрос мы изложим без расчета, который по своей идее должен быть похожим на вычисления при исследовании «инфракрасной катастрофы» тормозного излучения. Вывод формулы приведен, например, в книге В. Гайтлер, Квантовая теория излучения, стр. 264.

[2]) В. Гайтлер, Квантовая теория излучения, стр. 374.

формулах мы можем опять положить равной хотя малому, но конечному значению.

д) Общий случай. При вычислении эффективного сечения в общем случае мы должны выражение (37,13) представить в виде

$$S = b'^{+}(A^{+} + \rho_1(\sigma B^{+}) + i(\sigma C^{+}))\, b.$$

Тогда вместо соотношения (37,17) мы будем иметь:

$$S^{+}S = \frac{1}{2}\sum_{s,\, s'} \frac{1}{4}(\rho_{44}\sigma_{44}AA^{+} + \rho_{11}\sigma_{nn'}B_nB_{n'}^{+} + \rho_{44}\sigma_{nn'}C_nC_{n'}^{+} + \\ + \rho_{41}\sigma_{4n}AB_n^{+} + \rho_{14}\sigma_{n4}B_nA^{+} + i\rho_{44}\sigma_{4n}AC_n^{+} - \\ - i\rho_{44}\sigma_{n4}C_nA^{+} + i\rho_{14}\sigma_{nn'}B_nC_{n'}^{+} - i\rho_{41}\sigma_{nn'}C_nB_{n'}^{+}),$$

где

$$A^{+} = -2\,((\boldsymbol{k}'R' - \boldsymbol{k}R)\,\boldsymbol{a}^{+}), \quad \boldsymbol{B}^{+} = -\varkappa(R + R')\,\boldsymbol{a}^{+},$$

$$\boldsymbol{C}^{+} = -(R - R')\,[\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{a}^{+}],$$

$$R' = \frac{1}{2(K'\varkappa - (\boldsymbol{k}'\boldsymbol{\varkappa}))}, \qquad R = \frac{1}{2(K\varkappa - (\boldsymbol{k}\boldsymbol{\varkappa}))},$$

а множитель $^1/_2$ перед знаком суммы связан с усреднением по возможным начальным значениям спина.

Подставляя сюда вместо $\rho_{\mu\mu'}$ и $\sigma_{\mu\mu'}$ значения из формул (21,17) и (21,18) и принимая во внимание соотношения[1])

$$\sum_{s,\, s'} s^2 = \sum_{s,\, s'} s'^2 = \sum_{s,\, s'} 1 = 4, \quad \sum_{s,\, s'} s = \sum_{s,\, s'} s' = \sum_{s,\, s'} ss' = 0,$$

находим выражение

$$S^{+}S = \frac{1}{KK'\varkappa^2}\left\{\frac{k^2 - (\boldsymbol{k}\boldsymbol{\varkappa}^0)^2}{(K - (\boldsymbol{k}\boldsymbol{\varkappa}^0))^2}\left(K'^2 - \frac{\varkappa'^2}{4}\right) + \frac{k'^2 - (\boldsymbol{k}'\boldsymbol{\varkappa}^0)^2}{(K' - (\boldsymbol{k}'\boldsymbol{\varkappa}^0))^2}\left(K^2 - \frac{\varkappa'^2}{4}\right) - \\ - 2\frac{[(\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}') - (\boldsymbol{k}\boldsymbol{\varkappa}^0)(\boldsymbol{k}'\boldsymbol{\varkappa}^0)]\left(KK' - \frac{\varkappa'^2}{4} + \frac{\varkappa^2}{2}\right)}{(K - (\boldsymbol{k}\boldsymbol{\varkappa}^0))(K' - (\boldsymbol{k}'\boldsymbol{\varkappa}^0))} + \\ + \frac{1}{2}\frac{\varkappa^2[k^2 - (\boldsymbol{k}\boldsymbol{\varkappa}^0)^2 + k'^2 - (\boldsymbol{k}'\boldsymbol{\varkappa}^0)^2]}{(K - (\boldsymbol{k}\boldsymbol{\varkappa}^0))(K' - (\boldsymbol{k}'\boldsymbol{\varkappa}^0))}\right\}, \tag{37,23}$$

которое, как и следовало ожидать, в нерелятивистском случае сводится к (37,18). Подставляя (37,23) в (37,16), получим после интегрирования по сферическим углам ϑ, φ, θ и φ' следующее выражение для эффективного сечения в ультрарелятивистском случае ($E = c\hbar K$, $E' = c\hbar K' > m_0c^2$, $\varepsilon = c\hbar\varkappa$):

$$d\sigma_{\text{рад}} = 2\alpha r_0^2 Z^2 \frac{E'}{\varepsilon}\left(\frac{E^2 + E'^2}{E'E} - \frac{2}{3}\right)\left(2\ln\frac{2EE'}{\varepsilon m_0c^2} - 1\right)\frac{d\varepsilon}{E}. \tag{37,24}$$

---

[1]) В ультрарелятивистском случае, если не производить усреднения по s, то легко показать, что продольно поляризованные электроны будут излучать фотоны, обладающие частичной круговой поляризацией.

Отсюда видно, что в случае малых значений энергии тормозного фотона $\varepsilon\, d\sigma$ логарифмически расходится («инфракрасная катастрофа», см. выше).

Все эти формулы были выведены в предположении, что поле ядра является строго кулоновским, т. е. при вычислении вероятности тормозного излучения мы пренебрегали электрическим полем, создаваемым электронной оболочкой. Оценим порядок параметра соударения $r_{\text{макс}}$, при котором следует начать учитывать эффект экранирования (т. е. электростатическое поле, создаваемое электронной оболочкой)[1].

Как видно из формулы (37,2а), $r_{\text{макс}}$ связан с величиной $\varkappa'$ соотношением [см. также (36,41)]

$$r_{\text{макс}} \sim \frac{1}{\varkappa'_{\text{мин}}}.$$

Из формулы (37,11) следует, что

$$\varkappa'_{\text{мин}} = k - k' - \varkappa.$$

В частности, для ультрарелятивистского случая ($K' \gg k_0$) мы имеем:

$$\varkappa'_{\text{мин}} = \sqrt{K^2 - k_0^2} - \sqrt{K'^2 - k_0^2} - (K - K') \approx \frac{k_0^2 \varkappa}{2KK'},$$

откуда

$$r_{\text{макс}} \approx \frac{KK'}{\varkappa k_0^2}. \tag{37,25}$$

В качестве эффективного радиуса, характеризующего экранирование, возьмем соответствующую величину из теории Томаса—Ферми:

$$a \sim a_0 Z^{-1/3} \sim \frac{137}{k_0} Z^{-1/3},$$

где a_0 — радиус первой боровской орбиты.

Мы можем пренебречь влиянием экранирования, когда $r_{\text{макс}} < a$, или

$$\frac{EE'}{\varepsilon m_0 c^2} \ll 137 Z^{-1/3}. \tag{37,26}$$

В другом крайнем случае, когда

$$\frac{EE'}{\varepsilon m_0 c^2} \gg 137 Z^{-1/3}, \tag{37,27}$$

мы должны экранирование считать полным. В этом случае, грубо говоря, следует в формуле (37,24) величину $\ln(2EE'/\varepsilon m_0 c^2)$ заменить величиной $\ln(137 Z^{-1/3})$.

[1]) См. В. Гайтлер, Квантовая теория излучения, стр. 284.

Более точные вычисления тормозного излучения с помощью модели Томаса—Ферми приводят в случае полного экранирования к выражению

$$d\sigma_{\text{рад}} = 4\alpha r_0^2 Z^2 \frac{E'}{\varepsilon} \left[\left(\frac{E^2 + E'^2}{EE'} - \frac{2}{3} \right) \ln (183\, Z^{-1/3}) + \frac{1}{9} \right] \frac{d\varepsilon}{E}. \quad (37{,}28)$$

На рис. 13 представлена интенсивность тормозного излучения $\varepsilon\, d\sigma / EZ^2 \alpha r_0^2 d\left(\frac{\varepsilon}{T}\right)$ в зависимости от энергии тормозного фотона, измеренная в единицах кинетической энергии падающих электронов.

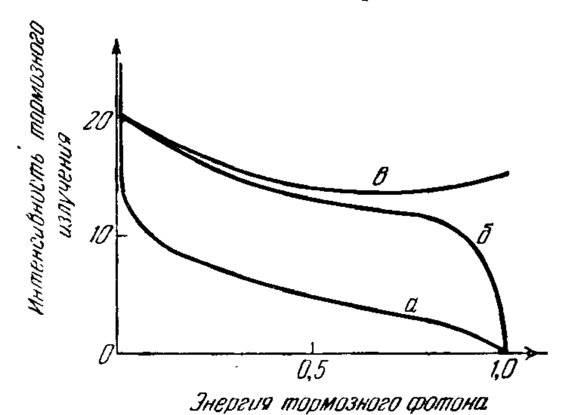


Рис. 13. Тормозное излучение.

В нерелятивистском случае распределение интенсивности тормозного излучения (пропорциональное выражению (37,21а) характеризуется кривой *а*. Эта кривая не зависит от вида вещества (т. е. от Z) и от первичной кинетической энергии T. При $\varepsilon \to 0$ кривая расходится по логарифмическому закону (инфракрасная катастрофа). Кривая *б* дана для свинца при $E = 100\, m_0 c^2$, когда имеет место полное экранирование [см. (37.28)]. В этом случае интенсивность тормозного излучения будет зависеть от заряда ядра и первичной энергии.

Как видно из (37,28), при $E \to \infty$ (см. кривую *в*) эффективное сечение не расходится, а стремится к некоторому постоянному пределу. Более того, при малых частотах фотона интенсивность излучения, пропорциональная $\varepsilon\, d\sigma$, не будет уже расходиться по логарифмическому закону, как это имело место без учета экранирования (см. соотношение (37,24), а устремится к постоянному пределу.

Из условия (37,27) следует, что поправки на экранирование скорее дают о себе знать для тяжелых элементов, чем для легких.

е) Потери энергии на тормозное излучение. Вследствие тормозного излучения при прохождении электронов сквозь вещество должны наблюдаться потери энергии. Потерю энергии при одном соударении мы получим, интегрируя $\varepsilon\, d\sigma$ по возможным энергиям излучения ($0 \leqslant \varepsilon \leqslant E - m_0 c^2 = T$).

Если мы обозначим через N_a число атомов в 1 *см*³, то средняя энергия, теряемая на единице пути, будет равна

$$-\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)_{\text{рад}} = N_a \int_0^T \varepsilon \, d\sigma. \tag{37,29}$$

В частности, при нерелятивистских скоростях движения электрона мы будем иметь согласно (37,21а):

$$-\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)_{\text{рад}} = \frac{8}{3} N_a m_0 c^2 \alpha r_0^2 Z^2 \int_0^1 \ln \frac{1+\sqrt{1-\xi}}{1-\sqrt{1-\xi}} \, d\xi,$$

где ξ является отношением энергии, излучаемой электроном, и его первоначальной энергии ($\xi = \varepsilon/T$). Вычисляя последний интеграл, находим:

$$-\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)_{\text{рад}} = N_a E \sigma_{\text{рад}}, \tag{37,29а}$$

где

$$E = m_0 c^2, \quad \text{а} \quad \sigma_{\text{рад}} = \frac{16}{3} \alpha r_0^2 Z^2 \tag{37,30}$$

характеризует относительную потерю энергии при одном столкновении. Как видно из формулы (37,30), $\sigma_{\text{рад}}$ в нерелятивистском случае не зависит от первоначальной энергии электрона и имеет тот же порядок, который был найден по квазиклассической теории [см. соотношение (37,1)].

В ультрарелятивистском же случае с помощью формулы (37,28) можно получить:

$$-\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)_{\text{рад}} = N_a E \sigma_{\text{рад}}, \tag{37,31}$$

причем

$$\sigma_{\text{рад}} = 4\alpha r_0^2 Z^2 \left(\ln \frac{2E}{m_0 c^2} - \frac{1}{3}\right) \tag{37,30а}$$

будет логарифмически возрастать с увеличением E.

Применимость формулы (37,30а) ограничена условием экранирования, которое начинает сказываться при энергиях $E \sim 137 Z^{-1/3} m_0 c^2$ и выше. В случае полного экранирования мы получаем:

$$\sigma_{\text{рад}} = \alpha r_0^2 Z^2 \left[4 \ln (183 Z^{-1/3}) + \frac{2}{9}\right], \tag{37,32}$$

т. е. экранирование прекращает рост эффективного сечения с энергией.

В случае полного экранирования мы можем ввести так называемую радиационную длину l:

$$l = \frac{1}{N_a \sigma_{\text{рад}}} \cong \frac{1}{4\alpha r_0^2 Z^2 N_a \ln (183 Z^{-1/3})}. \tag{37,32а}$$

Приближенно мы можем записать

$$l \sim \frac{1}{ZAN_a} \sim \frac{1}{Z\rho},$$

где $A \cong 2Z$ — атомный вес вещества. При прохождении быстрых электронов через вещество, когда другими потерями, кроме радиационных, мы можем пренебречь [см. соотношение (37,37)], дифференциальное уравнение (37,31) принимает вид

$$dE = -\frac{E dx}{l},$$

откуда

$$E = E_0 e^{-x/l}, \tag{37,32б}$$

т. е. при прохождении электроном единицы радиационного пути теряется в среднем на излучение 1/2,7 часть энергии, причем для тяжелых элементов величина l меньше и радиационные потери увеличиваются. Так, например, для воздуха (при нормальных температуре и давлении) $l = 33\,000$ *см*, причем вся атмосфера эквивалентна примерно 8 *км* воздуха при нормальных температуре и давлении, что составляет около 20 l. Для алюминия и свинца радиационные длины соответственно равны 9,7 *см* и 0,517 *см*.

ж) Ионизационные потери. При прохождении заряженных частиц (электронов) через вещество наряду с потерями на тормозное излучение имеются еще и другие потери, связанные с передачей части энергии проходящих электронов атомам вещества. Эти неупругие столкновения приводят, с одной стороны, к возбуждению дискретных уровней атомов, что, в частности, наблюдалось в опытах Франка — Герца, которые экспериментальным путем определили расстояние между энергетическими уровнями в атомах ртути, а с другой стороны — к ионизации атома. Оба типа возбуждения мы в дальнейшем будем называть термином «ионизация».

Средняя потеря энергии вследствие ионизации была подсчитана Бором с помощью полуклассической теории.

Рассмотрим электрон атома, расположенный на расстоянии b (прицельное расстояние) от траектории другого электрона (пунктирная линия на рис. 14), движущегося со скоростью v (расстоянием электрона пренебрегаем). Пусть электрон атома может колебаться с частотой $\nu = 1/T$ около точки равновесия O. Найдем энергию, которую приобретает электрон атома за время взаимодействия.

Электрическую силу

$$\boldsymbol{F} = e^- \boldsymbol{E} = -e\boldsymbol{E}$$

мы можем разложить на две составляющие: параллельную и перпендикулярную к траектории движения электрона. Суммарный импульс, который получит электрон атома от составляющей силы F_x

параллельной траектории, будет, очевидно, равен нулю. Энергию электрону атома может сообщить лишь составляющая

$$F_y = \frac{e^2 b}{(v^2 t^2 + b^2)^{3/2}},$$

перпендикулярная к траектории. Колебание электрона атома будет описываться уравнением

$$m_0 \ddot{y} + 4\pi^2 \nu^2 m_0 y = \frac{e^2 b}{(v^2 t^2 + b^2)^{3/2}}.$$

Отсюда видно, что взаимодействие между зарядами будет происходить практически в течение времени

$$t_1 \approx \frac{2b}{v}.$$

Если это время будет много больше времени колебания электрона в атоме, т. е.

$$t_1 \doteq \frac{2b}{v} \gg \frac{1}{\nu},$$

то под действием силы F электрон будет совершать движения как в одном, так и в другом направлениях. Поэтому средняя энергия,

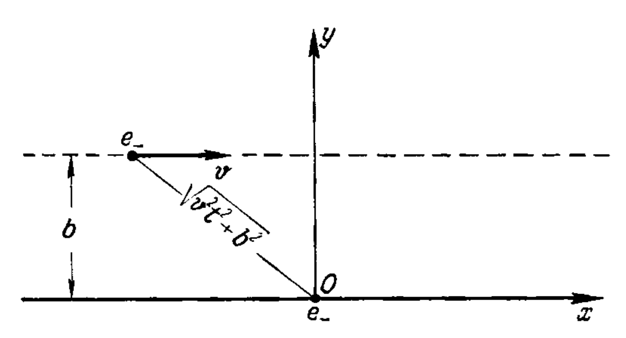


Рис. 14. Ионизационные потери.

передаваемая атому, будет близка к нулю. В другом крайнем случае

$$\frac{2b}{v} \ll \frac{1}{\nu} \tag{37,33}$$

в течение всего времени взаимодействия электрон атома будет двигаться только в одном направлении. Поэтому вся работа со стороны силы F_y пойдет на увеличение энергии атома.

Таким образом, из последней формулы мы можем найти максимальное значение для параметра, при котором еще наблюдается передача энергии:

$$b_{\text{макс}} = \frac{v}{2\nu}. \tag{37,34}$$

При выполнении условия (37,33) мы можем с известным приближением считать электрон свободным и записать уравнение его движения в виде

$$m_0\ddot{y}=\frac{e^2b}{\sqrt{(v^2t^2+b^2)^3}}.$$

Отсюда находим скорость $\dot{y}$, а также энергию ΔE, которую получает электрон атома:

$$\dot{y}=\frac{e^2b}{m_0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{(v^2t^2+b^2)^{3/2}}=\frac{2e^2}{m_0vb},\qquad \Delta E=\frac{m_0\dot{y}^2}{2}=\frac{2e^4}{m_0b^2v^2}.$$

Для того чтобы найти полную потерю энергии на единице пути движущегося электрона, мы должны потерю энергии ΔE при одном столкновении умножить на величину $R=N_aZ2\pi b\,db$, где N_a — число атомов в 1 *см*^{3}, а Z — порядковый номер атома, равный числу электронов в одном атоме. Величина R равна числу электронов, находящихся на расстоянии b от траектории производящего ионизацию электрона на единице его пути.

Общая потеря энергии на ионизацию во всех слоях от $b_{\text{мин}}$ до $b_{\text{макс}}$ составляет

$$-\frac{\partial E}{\partial x}=\frac{4\pi N_aZe^4}{m_0v^2}\ln\frac{b_{\text{макс}}}{b_{\text{мин}}}.$$

Максимальное прицельное расстояние $b_{\text{макс}}$, при котором возможна еще передача энергии, определяется формулой (37,34). В качестве величины $b_{\text{мин}}$ мы возьмем так же, как и при полуклассическом рассмотрении тормозного излучения, длину дебройлевской волны, которая определяет границу применимости классической теории:

$$b_{\text{мин}}=\frac{h}{m_0v}.$$

Тогда для полной потери энергии мы находим:

$$-\frac{\partial E}{\partial x}=2\pi N_aZr_0^2\frac{(m_0c^2)^2}{T}\ln\frac{T}{IZ},$$

где $T=m_0v^2/2$ — кинетическая энергия движущейся частицы, а $IZ=h\nu$ — средняя энергия ионизации атома, $I=13{,}5$ *эв*.

Более точные квантовые подсчеты, основанные на модели Томаса — Ферми и учитывающие обменные эффекты, приводят к следующим выражениям для ионизационных потерь:

в нерелятивистском случае $(T=E-m_0c^2\ll m_0c^2)$

$$-\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)_{\text{ион}}=Nm_0c^2\sigma_{\text{ион}},$$

где

$$\sigma_{\text{ион}} = 2\pi Z r_0^2 \frac{m_0 c^2}{T}\left(\ln\frac{T}{IZ} + \frac{1}{2}\right); \qquad (37,35)$$

в ультрарелятивистском случае

$$-\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)_{\text{ион}} = NE\sigma_{\text{ион}},$$

где

$$\sigma_{\text{ион}} = 2\pi Z r_0^2 \frac{m_0 c^2}{E}\left(\ln\frac{E^3}{2m_0 c^2 I^2 Z^2} + \frac{1}{8}\right). \qquad (37,36)$$

Отсюда видно, что ионизационные потери в нерелятивистском случае быстро убывают с увеличением энергии. При энергиях порядка $m_0 c^2$ ($E \sim m_0 c^2$) они достигают минимума, а затем начинают возрастать по логарифмическому закону.

В основе рассмотренной теории ионизационных потерь лежит взаимодействие между движущейся частицей и отдельным атомом. Общая потеря энергии рассматривалась как сумма элементарных потерь. Однако дисперсионные свойства вещества как целого вызывают некоторый экранирующий эффект, который также может оказать влияние на общие потери. В самом деле, при прохождении очень быстрых заряженных частиц через конденсированное вещество наблюдается особое черенковское излучение, которое связано с тем обстоятельством, что скорость частицы может быть больше фазовой скорости света в веществе. В этом случае проявляется действие вещества как целого, которое нельзя свести к простой сумме воздействий отдельных атомов. Подробный анализ, проделанный Ферми[1]), показал, что потери на черенковское излучение становятся заметными лишь для очень быстрых частиц[2]). За деталями по этому вопросу мы отсылаем читателя к только что указанной литературе.

з) Общая потеря энергии. Пренебрегая черенковским излучением, мы найдем, что общая потеря энергии при прохождении заряженных частиц через вещество складывается из радиационных и ионизационных потерь:

$$-\frac{\partial E}{\partial x} = -\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)_{\text{рад}} - \left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)_{\text{ион}}.$$

Сопоставляя формулы (37,32) и (37,36), мы видим, что величина $\sigma_{\text{рад}}$ пропорциональна Z^2 и почти не зависит от энергии, в то время как величина $\sigma_{\text{ион}}$ пропорциональна Z и убывает примерно

---

[1]) E. Fermi, Phys. Rev. 57, 485 (1940); см. работу О. Бора, приведенную в приложении к книге Н. Бора «Прохождение атомных частиц через вещество», М., 1950.

[2]) Квантовая энергия эффекта Черенкова была рассмотрена в § 32.

обратно пропорционально с увеличением энергии E. Поэтому соотношение между различными потерями определяется приближенной формулой

$$\frac{\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)_{\text{рад}}}{\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)_{\text{ион}}} \cong \frac{ZE}{E_0}, \quad \text{где } E_0 = 1600\ m_0c^2. \tag{37,37}$$

Отсюда видно, что при энергиях, превышающих некоторое предельное значение, имеющее порядок E_0/Z, потери на тормозное излучение начинают превалировать над потерями на ионизацию. Это предельное значение достигается тем быстрее, чем больше Z. Так, например, для свинца ($Z = 82$) предельная энергия составляет $E \sim 20\ m_0c^2$, в то время как для воды и воздуха ($Z \sim 8$) она должна быть примерно в 10 раз больше, что находится в согласии с экспериментальными данными. При очень больших энергиях E электрона ионизационными потерями мы можем вообще пренебречь.

ГЛАВА III

ТЕОРИЯ ПОЗИТРОНА

§ 38. Основы теории позитрона

Как известно, волновое уравнение, описывающее поле свободных частиц со спином $^1/_2$, имеет вид (более подробно см. § 17):

$$\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}-c\frac{\hbar}{i}(\nabla\boldsymbol{\alpha})-\rho_3 m_0 c^2\right)\psi=0. \qquad (38,1)$$

Его частные решения

$$\psi(\boldsymbol{k}, s, \varepsilon)=\frac{1}{L^{3/2}}C(s, \varepsilon)\,b(s, \varepsilon)\,e^{-icK\varepsilon t+i\boldsymbol{kr}} \qquad (38,2)$$

соответствуют как положительным ($\varepsilon > 0$), так и отрицательным значениям ($\varepsilon < 0$) энергии.

Решения с отрицательной энергией являются характерными не только для спинорных уравнений. Они должны появляться в любой релятивистской теории, включая даже классическую.

В самом деле, в релятивистской теории энергия свободной частицы E связана с ее импульсом и массой покоя соотношением

$$E^2=c^2p^2+m_0^2c^4,$$

откуда получаем два решения:

$$E=\pm\sqrt{c^2p^2+m_0^2c^4}.$$

В классической теории состояния с отрицательной энергией трудностей не вызывают, поскольку в процессе движения частицы ее энергия может изменяться только непрерывным образом (например, в результате излучения). Переходы из состояний с положительной энергией в состояния с отрицательной энергией (когда энергия меняется скачком) являются невозможными. Поэтому, отбросив в начальный момент времени состояния с отрицательной энергией, мы можем в дальнейшем их вообще не рассматривать.

Иное положение дел мы имеем в квантовой теории, где переходы возможны не только между непрерывными, но также между дискретными энергетическими состояниями.

Для того чтобы избежать переходов электронов в состояния с отрицательной энергией, Дирак предложил считать все уровни

с отрицательной энергией заполненными электронами (электрон-позитронный вакуум), благодаря чему электроны с положительной энергией не смогут переходить в обычных условиях на эти уровни. С другой стороны, под действием γ-кванта большой энергии ($\varepsilon > 2m_0c^2$) возможны вынужденные переходы электрона из состояния с отрицательной энергией в состояния с положительной энергией.

В этом случае вместо поглощенного γ-кванта появляются электрон с положительной энергией и «дырка» на фоне заполненных электронами отрицательных состояний.

Эта «дырка» ведет себя как частица с положительной массой, равной массе электрона, и с зарядом, противоположным заряду электрона (см. § 23). Подобная частица получила название позитрона.

Эта теория не исключает возможности обратного процесса. При наличии «дырки» электрон с положительной энергией может перейти на свободный уровень состояний с отрицательной энергией. В этом случае электрон и позитрон превращаются в γ-кванты. Вероятности обоих процессов могут быть сравнительно просто вычислены, поскольку они фактически представляют вероятности вынужденного и спонтанного переходов.

Экспериментальное открытие позитрона и его превращений подтвердило теорию позитрона не только с качественной, но также и с количественной стороны. С этого момента начинается фактически новый этап теории элементарных частиц, учитывающий возможность их взаимных превращений. В частности, возникновение позитрона мы можем рассматривать как превращение γ-квантов в электрон и позитрон, а аннигиляцию позитрона — как обратное превращение пары (электрон — позитрон) в γ-кванты.

При этих превращениях строго соблюдается известное соотношение между массой и энергией

$$E = Mc^2, \tag{38,3}$$

на более детальном анализе которого мы остановимся при рассмотрении вопроса о природе массы элементарных частиц (§ 42).

Заметим, что современная теория вакуума является далеко еще не законченной и сопоставление движения частицы с движением «дырки» носит весьма предварительный характер, тем более, что теория в целом должна быть симметричной относительно знака заряда, т. е. ее выводы не должны зависеть от того, заполняются ли отрицательные уровни электронами и движение позитрона связано с движением «дырки» или, наоборот, отрицательные уровни заполняются позитронами. Однако теория вакуума сумела описать новые качественные свойства элементарных частиц, связанные с проявлением их полевой природы, открыв тем самым новые общие свойства электромагнитного поля и поля электронов и позитронов. В самом деле, электромагнитное поле в общем случае содержит две части:

одна часть связана с наличием фотонов, а другая — с переносом электромагнитных сил (например, электростатических). Согласно квантовой электродинамике перенос взаимодействия осуществляется с помощью квантованного электромагнитного поля, т. е. с помощью виртуальных фотонов и псевдофотонов (см. §§ 25 и 26). Это поле виртуальных частиц в известном смысле можно рассматривать как резервуар, необходимый для появления реальных фотонов. Точно так же волновое уравнение Дирака содержит две части. Первая часть описывает движение электронов и позитронов, а другая связана с полем виртуальных частиц и во многих отношениях напоминает виртуальное электромагнитное поле. Помимо того, что вакуум виртуальных частиц является источником появления электронов и позитронов, недавние открытия переноса взаимодействия через электрон-позитронный вакуум (более подробно см. гл. IV) окончательно доказали реальность его существования. Свойства электрон-позитронного вакуума по мере постановки новых экспериментов будут изучаться все глубже, благодаря чему его теория должна принимать все более совершенный характер.

Мы должны рассматривать квантованное электромагнитное поле, а также электрон-позитронный вакуум как одну из форм движущейся материи, осуществляющую перенос взаимодействия между частицами и обусловливающую взаимное превращение элементарных частиц (например, электрона и позитрона в γ-кванты и т. д.).

Вопрос об электрон-позитронном вакууме будет подробно рассмотрен в следующей главе. В настоящей главе мы ограничимся лишь теорией «дырок» Дирака, которая позволяет с помощью введения отрицательных уровней рассмотреть появление пары (электрон — позитрон) и ее аннигиляцию без учета поляризации электрон-позитронного вакуума.

§ 39. Образование пар фотонами

Один γ-квант, движущийся с импульсом $\hbar\boldsymbol{\varkappa}$, не может превратиться (спонтанно) в электрон и позитрон, несмотря на то, что он взаимодействует с электрон-позитронным вакуумом. В самом деле, при однофотонной аннигиляции мы не сможем удовлетворить законам сохранения энергии и импульса:

$$\left.\begin{aligned} \varkappa &= K_- + K_+, \\ \boldsymbol{\varkappa} &= \boldsymbol{k}_- + \boldsymbol{k}_+, \end{aligned}\right\} \tag{39,1}$$

без выполнения которых невозможны квантовомеханические переходы[1]) (здесь $\hbar\boldsymbol{k}_-$ и $\hbar\boldsymbol{k}_+$ являются соответственно импульсами электрона и позитрона).

---

[1]) Мы можем в общем случае поставить вопрос о спонтанном превращении частицы массы $\hbar\varkappa_0/c$ (масса покоя) в частицы масс $\hbar k_0/c$ и $\hbar k_0'/c$.

Поэтому для образования пары необходимо, кроме γ-кванта, наличие другой частицы, которая взяла бы на себя часть импульса. Например, пара может образоваться при взаимодействии двух γ-квантов. Однако вероятность подобного процесса слишком мала. Пары, как правило, образуются, когда γ-квант большой энергии $\varepsilon = c\hbar\varkappa$ проходит вблизи ядра Ze; при этом избыток импульса берет на себя ядро.

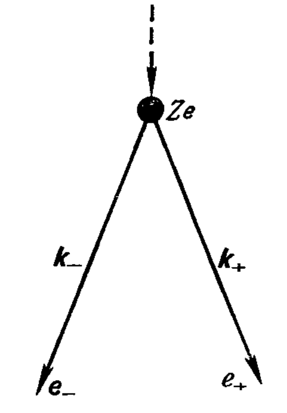


Рис. 15. Появление пары.

Появление пары (рис. 15) представляет собой следующий процесс:

$$\gamma + Ze \rightarrow Ze + e^{+} + e^{-}.$$

При вычислении вероятности появления пары мы должны учесть, что электроны, с одной стороны, взаимодействуют с γ-квантом импульса $\hbar\boldsymbol{\varkappa}$:

$$U = \frac{e}{L^{3/2}} \sqrt{\frac{2\pi c\hbar}{\varkappa}} (\boldsymbol{\alpha a}) e^{-ic\varkappa t + i\boldsymbol{\varkappa r}}, \qquad (39,2)$$

а с другой — с кулоновским полем ядра

$$V = -\frac{4\pi Ze^2}{L^3} \sum_{\boldsymbol{\varkappa}'} \frac{e^{-i\boldsymbol{\varkappa}'\boldsymbol{r}}}{\varkappa'^2}. \qquad (39,3)$$

В этом случае уравнение Дирака может быть представлено в виде

$$\mathrm{D}\psi(N-1) = W^{+}\psi(N), \qquad (39,4)$$

причем оператор энергии дается выражением

$$W^{+} = U\mathrm{D}^{-1}V + V\mathrm{D}^{-1}U. \qquad (39,5)$$

Выбирая систему координат, относительно которой распадающаяся частица покоится ($\boldsymbol{\varkappa} = 0$), и обозначая импульсы образовавшихся частиц через $\hbar\boldsymbol{k}$ и $\hbar\boldsymbol{k}'$, мы можем записать законы сохранения импульса и энергии в виде

$$0 = \boldsymbol{k} + \boldsymbol{k}', \quad \varkappa_0 = \sqrt{k^2 + k_0^2} + \sqrt{k'^2 + k_0'^2}.$$

Последние уравнения имеют решение только в том случае, когда масса покоя распадающейся частицы будет больше суммы масс покоя вновь образовавшихся частиц, т. е. $\varkappa_0 > k_0 + k_0'$. Масса покоя γ-кванта равна нулю, и поэтому γ-квант не может распасться на какие-либо частицы. В теории мезонов возможен спонтанный распад тяжелого π-мезона на более легкий μ-мезон и нейтрино. Точно так же μ-мезон может распасться на более легкие частицы. Далее, как известно, масса покоя нейтрона больше суммы масс покоя протона, электрона и нейтрино. Поэтому возможен спонтанный распад нейтрона на протон, электрон и нейтрино.

Уравнение (39,4) будем решать по методу теории возмущений[1]):

$$\psi = \psi_0 + \psi_2 + \ldots,$$

полагая

$$\psi_0 = \psi(N), \quad \psi_2 = \psi(N-1). \qquad (39,6)$$

Функция ψ_0 описывает начальное состояние, в котором отсутствуют электроны и позитроны. В конечном же состоянии (ψ_2) должна появиться пара частиц: электрон и позитрон.

Как было только что указано, мы можем не вводить квантованные функции ψ, а рассматривать появление пары как переход электрона с отрицательного уровня, который описывается волновой функцией ψ_0,

$$\psi_0 = \frac{1}{L^{3/2}} b(s, -1, -\boldsymbol{k}_+) e^{icK_+t - i\boldsymbol{k}_+\boldsymbol{r}}, \qquad (39,7)$$

на положительный уровень с волновой функцией

$$\psi_2 = \frac{1}{L^{3/2}} C(t) b(s', 1, \boldsymbol{k}_-) e^{-icK_-t + i\boldsymbol{k}_-\boldsymbol{r}}. \qquad (39,8)$$

Для этого фотон должен обладать энергией, не меньшей $2m_0c^2$.

Процесс образования пары является обратным процессом по отношению к тормозному излучению. В самом деле, при тормозном излучении электрон переходит с более высокого уровня ($E > 0$) под действием кулоновского притяжения на более низкий ($E' < E$, $E' > 0$) с испусканием фотона. При рождении же пары, наоборот, электрон с более низкого энергетического уровня ($E < 0$) под действием того же кулоновского притяжения переходит на более высокий энергетический уровень ($E' > E$, $E' > 0$) с поглощением фотона. Поэтому при вычислении вероятности образования пары мы можем воспользоваться соответствующими формулами для тормозного излучения, произведя в последних замену переменных:

$$\left.\begin{array}{lll} K \to -K_+, & \boldsymbol{k} \to -\boldsymbol{k}_+, & K' \to K_-, \\ \boldsymbol{k}' \to \boldsymbol{k}_-, & \varkappa \to -\varkappa, & \boldsymbol{\varkappa} \to -\boldsymbol{\varkappa}; \end{array}\right\} \qquad (39,9)$$

кроме того, суммирование по импульсам тормозного фотона $\boldsymbol{\varkappa}$ мы должны заменить суммированием по импульсам электрона с отрицательной энергией ($\boldsymbol{k}_+$), т. е.

$$\sum_{\boldsymbol{\varkappa}} \to \sum_{\boldsymbol{k}_+}. \qquad (39,10)$$

---

[1]) В энергии взаимодействия W^+ учтены сразу процессы второго порядка относительно функций U и V.

Тогда для вероятности образования пары мы будем иметь вместо формулы (37,14) следующее выражение:

$$w = \frac{64\pi^4 Z^2 e^6}{c^2\hbar^3 L^9} \sum_{\boldsymbol{k}_-,\,\boldsymbol{k}_+} \frac{1}{\varkappa'^4 \varkappa} S^+ S\, \delta(K_+ + K_- - \varkappa), \tag{39,11}$$

где величина $-\boldsymbol{\varkappa}' = -\boldsymbol{k}_- - \boldsymbol{k}_+ + \boldsymbol{\varkappa}$ является импульсом (в единицах $\hbar$), который берет на себя ядро, а выражение для матричного элемента S^+S может быть найдено с помощью формулы (37,23), принимающей в нашем случае вид

$$S^+S = \frac{-1}{K_+K_-\varkappa^2}\left\{\frac{k_+^2 - (\boldsymbol{k}_+\boldsymbol{\varkappa}^0)^2}{(K_+ - (\boldsymbol{k}_+\boldsymbol{\varkappa}^0))^2}\left(K_-^2 - \frac{\varkappa'^2}{4}\right) + \frac{k_-^2 - (\boldsymbol{k}_-\boldsymbol{\varkappa}^0)^2}{(K_- - (\boldsymbol{k}_-\boldsymbol{\varkappa}^0))^2}\left(K_+^2 - \frac{\varkappa'^2}{4}\right) + 2\frac{[(\boldsymbol{k}_+\boldsymbol{k}_-) - (\boldsymbol{k}_+\boldsymbol{\varkappa}^0)(\boldsymbol{k}_-\boldsymbol{\varkappa}^0)]\left[K_+K_- + \frac{\varkappa'^2}{4} - \frac{\varkappa^2}{2}\right]}{(K_+ - (\boldsymbol{k}_+\boldsymbol{\varkappa}^0))(K_- - (\boldsymbol{k}_-\boldsymbol{\varkappa}^0))} - \frac{1}{2}\frac{\varkappa^2\left[k_+^2 - (\boldsymbol{k}_+\boldsymbol{\varkappa}^0)^2 + k_-^2 - (\boldsymbol{k}_-\boldsymbol{\varkappa}^0)^2\right]}{(K_+ - (\boldsymbol{k}_+\boldsymbol{\varkappa}^0))(K_- - (\boldsymbol{k}_-\boldsymbol{\varkappa}^0))}\right\}. \tag{39,12}$$

Деля вероятность w на число γ-квантов, падающих в единицу времени на единицу поверхности ($N_\gamma = c/L^3$), находим после перехода от суммирования к интегрированию следующее выражение для дифференциального эффективного сечения:

$$d\sigma = \sigma(K_+)\,dK_+ = dK_+ \frac{Z^2}{\pi^2}\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^3 \frac{k_+k_-}{\varkappa^3}\int \frac{d\Omega_+\,d\Omega_-}{\varkappa'^4} \times \left\{\frac{\left(k_+^2 - (\boldsymbol{k}_+\boldsymbol{\varkappa}^0)^2\right)\left(-K_-^2 + \frac{\varkappa'^2}{4}\right)}{(K_+ - (\boldsymbol{k}_+\boldsymbol{\varkappa}^0))^2} + \frac{\left(k_-^2 - (\boldsymbol{k}_-\boldsymbol{\varkappa}^0)^2\right)\left(-K_+^2 + \frac{\varkappa'^2}{4}\right)}{(K_- - (\boldsymbol{k}_-\boldsymbol{\varkappa}^0))^2} - 2\frac{[(\boldsymbol{k}_+\boldsymbol{k}_-) - (\boldsymbol{k}_+\boldsymbol{\varkappa}^0)(\boldsymbol{k}_-\boldsymbol{\varkappa}^0)]\left[K_+K_- + \frac{\varkappa'^2}{4} - \frac{\varkappa^2}{2}\right]}{(K_+ - (\boldsymbol{k}_+\boldsymbol{\varkappa}^0))(K_- - (\boldsymbol{k}_-\boldsymbol{\varkappa}^0))} + \frac{1}{2}\frac{\varkappa^2\left[k_+^2 - (\boldsymbol{k}_+\boldsymbol{\varkappa}^0)^2 + k_-^2 - (\boldsymbol{k}_-\boldsymbol{\varkappa}^0)^2\right]}{(K_+ - (\boldsymbol{k}_+\boldsymbol{\varkappa}^0))(K_- - (\boldsymbol{k}_-\boldsymbol{\varkappa}^0))}\right\}, \tag{39,13}$$

$$\varkappa = K_+ + K_-, \quad \boldsymbol{\varkappa}^0 = \frac{\boldsymbol{\varkappa}}{\varkappa}, \quad \boldsymbol{\varkappa}' = \boldsymbol{k}_+ + \boldsymbol{k}_- - \boldsymbol{\varkappa};$$

здесь $d\Omega_+ = \sin\vartheta_+\,d\vartheta_+\,d\varphi_+$ и $d\Omega_-$ — элементы телесных углов, внутри которых движутся вылетающие позитроны и электроны.

Как видно из последних формул, для образования пары необходимо, чтобы энергия ($\varepsilon = c\hbar\varkappa$) γ-кванта превышала суммарную

собственную энергию электрона и позитрона, т. е.

$$\varkappa > 2k_0.$$

Найдем выражение для эффективного сечения, когда образующиеся электроны и позитроны движутся с нерелятивистскими скоростями ($k_- \ll k_0$, $k_+ \ll k_0$). В этом случае мы можем положить

$$\left.\begin{aligned} &K_+ \cong K_- \cong \frac{\varkappa}{2} \cong \frac{\varkappa'}{2} \approx k_0, \\ &dK_+ \cong \frac{k_+}{k_0}\,dk_+, \quad \frac{k_+^2}{2k_0} + \frac{k_-^2}{2k_0} = \varkappa - 2k_0. \end{aligned}\right\} \tag{39,14}$$

Тогда выражение (39,13) принимает вид

$$d\sigma = dk_+ \frac{k_+^2 k_- Z^2 \alpha^3}{k_0^8 2^6 \pi^2} \int d\Omega_+\, d\Omega_- \left(k_+^2 \sin^2\theta_+ + k_-^2 \sin^2\theta_-\right). \tag{39,15}$$

После интегрирования по углам находим:

$$d\sigma = {}^2/_3 Z^2 \alpha r_0^2 \frac{\sqrt{T_+ T_-}\,(T_+ + T_-)\,dT_+}{(m_0 c^2)^3}, \tag{39,16}$$

где $r_0 = e^2/m_0c^2$ — радиус электрона, а кинетическая энергия позитрона $T_+ = c\hbar k_+^2/2k_0 = m_0 v_+^2/2$ и электрона $T_- = m_0 v_-^2/2$ связаны с энергией γ-кванта $\varepsilon = c\hbar\varkappa$ соотношением

$$T_+ + T_- = \varepsilon - 2m_0c^2. \tag{39,17а}$$

Заметим, что выражением (39,16) мы можем пользоваться, так же как и формулой (37,21а) для тормозного излучения, лишь при достаточно больших скоростях позитрона и электрона, когда величины

$$\xi_+ = \frac{Ze^2}{\hbar v_+}, \quad \xi_- = \frac{Ze^2}{\hbar v_-} \tag{39,17б}$$

много меньше единицы; в противном случае эффективное сечение (39,16) должно быть умножено на поправочную функцию [см. также (37,21б)]

$$f(\xi_+, \xi_-) = \frac{2\pi\xi_+}{\left(e^{2\pi\xi_+} - 1\right)} \frac{2\pi\xi_-}{\left(1 - e^{-2\pi\xi_-}\right)}, \tag{39,18}$$

которая уничтожает симметрию выражения относительно энергий T_+ и T_-. Это связано с тем обстоятельством, что электрон притягивается, а позитрон отталкивается ядром. Поэтому вероятность образования пары уменьшается для малых скоростей позитрона v_+ и резко увеличивается для малых скоростей электрона v.

В ультрарелятивистском случае ($K_+ \gg k_0$, $K_- \gg k_0$) мы находим после интегрирования по углам в равенстве (39.13) [см. также

формулу (37,24) для тормозного излучения] следующее выражение для эффективного сечения:

$$d\sigma = 4Z^2 r_0^2 \alpha \frac{E_+^2 + E_-^2 + {}^2/_3 E_+ E_-}{\varepsilon^3} \left(\ln \frac{2E_+ E_-}{\varepsilon m_0 c^2} - \frac{1}{2} \right) dE_+. \quad (39,19)$$

Здесь энергии позитрона, электрона и γ-кванта

$$E_+ = c\hbar K_+ = c\hbar k_+, \quad E_- = c\hbar K_- = c\hbar k_-, \quad \varepsilon = c\hbar \varkappa \quad (39,20)$$

связаны между собою соотношением

$$E_+ + E_- = \varepsilon. \quad (39,21)$$

Формула (39,19) симметрична относительно энергий электрона и позитрона. Множитель (39,18) в релятивистском случае дает слишком малые поправки даже для сравнительно тяжелых элементов.

Так же как и в случае тормозного испускания, формула (39,19) ограничена со стороны больших энергий падающих частиц условием пренебрежения экранированием кулоновского поля атома электронами, находящимися на внешней оболочке. Согласно формуле (37,26) это условие имеет вид:

$$\frac{E_+ E_-}{\varepsilon m_0 c^2} \ll 137 Z^{-1/3}. \quad (39,22)$$

При полном экранировании, которое имеет место в случае очень больших энергий образовавшихся электрона и позитрона:

$$\frac{E_+ E_-}{\varepsilon m_0 c^2} \gg 137^{-1/3}, \quad (39,23)$$

вместо (39,19) получаем формулу[1])

$$d\sigma = 4Z^2 r_0^2 \alpha \left[\frac{E_+^2 + E_-^2 + {}^2/_3 E_+ E_-}{\varepsilon^2} \ln 183\, Z^{-1/3} - \frac{1}{9} \frac{E_+ E_-}{\varepsilon^2} \right] \frac{dE_+}{\varepsilon}, \quad (39,24)$$

соответствующую формуле (37,28) для тормозного излучения.

Перейдем к обсуждению полученных результатов. Прежде всего рассмотрим распределение образующихся позитронов и электронов по углам. Как видно из выражения (39,13), при очень больших энергиях E_+ и E_- ($E_+ \gg m_0 c^2$, $E_- \gg m_0 c^2$), т. е. в ультрарелятивистском случае, обе частицы вылетают по направлению движения γ-кванта. Телесный угол вылета обеих частиц имеет порядок $\Omega \sim m_0 c^2/\varepsilon$. С уменьшением энергии угловое распределение становится более равномерным.

Распределение образующихся электронов и позитронов по энергиям, характеризуемое формулами (39,16) (нерелятивистский случай), (39,19) (ультрарелятивистский случай без учета экранирования) и (39,24) (ультрарелятивистский случай с учетом полного экраниро-

[1]) См. В. Гайтлер, Квантовая теория излучения, стр. 292.

вания) представлено на рис. 16. По оси ординат отложена величина, пропорциональная эффективному сечению (точнее, отвлеченная величина $d\sigma(\varepsilon - 2m_0c^2)/dE_+Z^2\alpha r_0^2$, а по оси абсцисс — кинетическая энергия позитрона, отнесенная к общей кинетической энергии электрона и позитрона.

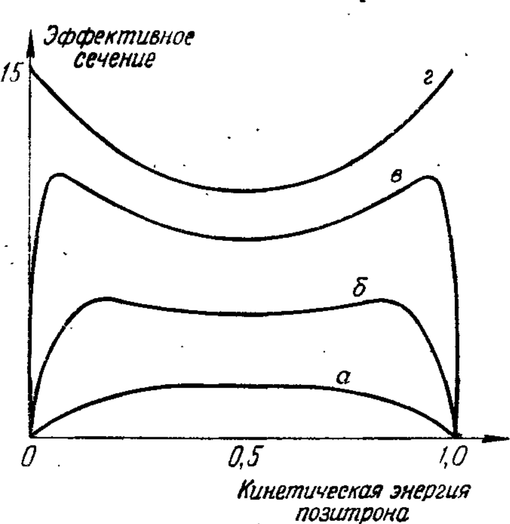


Рис. 16. Распределение пар по энергиям

Из этих кривых видно, что при сравнительно малых энергиях γ-кванта, $\varepsilon \sim 6m_0c^2$ (кривая *а* на рис. 16) эффективное сечение достигает максимума, когда электрон и позитрон вылетают с одинаковыми энергиями. При дальнейшем увеличении энергии γ-квантов кривая становится более плоской ($\varepsilon \sim 50m_0c^2$, кривая *б*) и в конечном счете переходит в кривую с двумя максимумами ($\varepsilon \sim 1000m_0c^2$, кривая *в*), которые постепенно приближаются к краям кривой *г* ($\varepsilon \sim \infty$), что соответствует случаю, когда бо́льшая часть энергии приходится на одну частицу. Кривые *а* и *б* имеют место для любого вещества (так как при сравнительно малых энергиях экранированием можно пренебречь). Кривые *в* и *г* относятся к тяжелым элементам (Pb).

Наличие симметрии относительно энергий вылетевших электрона и позитрона связано с пренебрежением кулоновскими силами, действующими между ядром и частицами пары. При учете последних минимумы кривых сместились бы вправо, так как позитрон отталкивается, а электрон притягивается к ядру.

Интегрируя приведенные выражения по всем энергиям позитрона, находим эффективные сечения для образования пар: в нерелятивистском случае

$$\sigma = \frac{1}{12}\pi Z^2\alpha r_0^2\left(\frac{\varepsilon - 2m_0c^2}{m_0c^2}\right)^3; \qquad (39,25)$$

в ультрарелятивистском случае без учета экранирования

$$\sigma = \alpha Z^2 r_0^2\left(\frac{28}{9}\ln\frac{2\varepsilon}{m_0c^2} - \frac{218}{27}\right); \qquad (39,26)$$

в ультрарелятивистском случае с учетом полного экранирования

$$\sigma = \alpha Z^2 r_0^2\left(\frac{28}{9}\ln 183Z^{-1/3} - \frac{2}{27}\right). \qquad (39,27)$$

В тех случаях, когда экранирование неполное, интегрирование можно произвести лишь численным методом.

Из приведенных формул видно, что эффективное сечение образования пары в нерелятивистском случае мало благодаря наличию множителя $((\varepsilon - 2m_0c^2)/m_0c^2)^3$. С увеличением энергии ε эффективное сечение σ возрастает по логарифмическому закону (ультрарелятивистский случай без учета экранирования); однако при очень больших значениях ε, когда следует учитывать полное экранирование, изменяется также закон возрастания эффективного сечения; оно стремится к некоторому постоянному значению.

Средняя длина пути, на котором образуется одна пара (электрон — позитрон), равна

$$l_p = \frac{1}{N_a\sigma},$$

причем в случае больших энергий для величины σ мы должны подставить выражеиие (39,27). Тогда мы найдем, что величина l_p будет связана с радиационной длиной l [см. (37,32a)] соотношением

$$l_p = \frac{9}{7} l.$$

Уменьшение числа γ-квантов будет происходить по закону:

$$\frac{dn}{n} = -\frac{dx}{l_p},$$

т. е.

$$n = n_0 e^{-x/l_p}. \qquad (39,27а)$$

Эта формула аналогична формуле (37,32б) для радиационных потерь.

Формула (39,27а) не учитывает возможности образования новых γ-квантов за счет тормозного излучения электронов и позитронов. Более подробно этот вопрос будет рассмотрен нами в § 41.

Мы можем получить выражение для коэффициентов поглощения γ-лучей, если умножим соответствующие выражения для эффективного сечения σ на число N_a атомов (или ядер) в 1 $см^3$. При прохождении сквозь вещество γ-квантов последние поглощаются благодаря фотоэффекту (появляются фотоэлектроны), эффекту Комптона (появляются электроны отдачи) и образованию пар (появляется одинаковое число электронов и позитронов).

Для ультрарелятивистского случая в отсутствие экранирования для коэффициентов поглощения γ-квантов с энергией ε получим следующие выражения: поглощение при фотоэффекте [см. (34,43)]:

$$\tau_f = 5\pi r_0^2 \alpha^4 Z^5 \frac{m_0c^2}{\varepsilon} N_a;$$

поглощение при комптоновском рассеянии [см. (34,40)]

$$\tau_c = \pi r_0^2 \frac{m_0c^2}{\varepsilon} N_a Z\left(\ln\frac{2\varepsilon}{m_0c^2} + \frac{1}{2}\right);$$

поглощение при образовании пар [см. (39,26)]

$$\tau_p = \alpha Z^2 r_0^2 N_a \left(\frac{28}{9} \ln \frac{2\varepsilon}{m_0 c^2} - \frac{218}{27} \right).$$

Обозначим соответственно через n_+ и n_- число образовавшихся позитронов и электронов и примем во внимание, что число фотоэлектронов и комптоновских электронов равно $n_- - n_+$, а число образовавшихся пар равно n_+. Тогда находим соотношение между коэффициентами поглощения:

$$\frac{n_+}{n_- - n_+} = \frac{\tau_p}{\tau_f + \tau_c}. \qquad (39,28)$$

Определяя величины, находящиеся в левой части равенства (39,28), из экспериментальных наблюдений и подставляя в правую часть теоретические значения для τ, мы получим хорошее совпадение теоретических формул с экспериментальными данными.

Сравнение коэффициентов поглощения γ-квантов при фотоэффекте и эффекте Комптона было произведено нами в § 34. Там было показано, что в нерелятивистском случае поглощение γ-квантов происходит исключительно благодаря фотоэффекту.

В релятивистском случае имеется некоторая критическая энергия для γ-квантов [см. соотношение (34,45)], выше которой комптоновское поглощение становится сильнее, чем поглощение за счет фотоэффекта.

Как видно из приведенных формул, при малых энергиях вероятность образования пар будет меньше, чем комптоновское рассеяние. Когда энергия γ-квантов становится больше некоторого критического значения, образование пар становится более вероятным. Критическая энергия при прохождении γ-квантов сквозь свинец равна приблизительно $10\, m_0c^2$. Для более легких элементов она несколько выше. При очень высоких энергиях поглощение γ-квантов происходит главным образом за счет образования пар; комптоновским рассеянием и тем более фотоэффектом можно при этом пренебречь.

Заметим, что γ-квант, испущенный ядром, может образовать пару в поле того же ядра. Этот процесс представляет собой новый вид внутренней конверсии, в котором выбивание с помощью γ-кванта электронов из K-слоя заменяется образованием пары.

Пара может образовываться также непосредственно при взаимодействии заряженных частиц друг с другом. Однако вероятность этого процесса при наблюдаемых энергиях слишком мала.

§ 40. Аннигиляция позитронов

Согласно методу теории «дырок» аннигиляцию, т. е. превращение позитрона и электрона в γ-кванты, следует рассматривать как переход электрона с положительного уровня энергии на отрицательный. Высвободившаяся при этом энергия передается γ-квантам.

Прежде всего заметим, что вероятность однофотонной аннигиляции свободных частиц равна нулю, так как один γ-квант не сможет принять на себя и энергию и импульс обеих частиц. Поэтому при аннигиляции свободных частиц должны появиться минимум два γ-кванта (рис. 17):

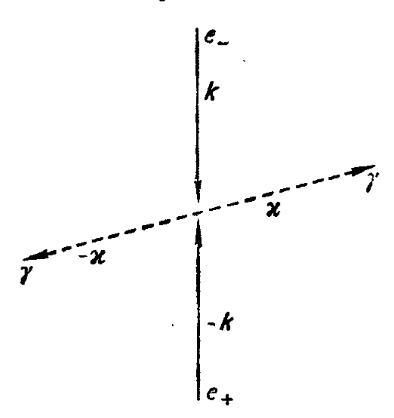


Рис. 17. Аннигиляция пары.

$$e^+ + e^- = \gamma + \gamma'.$$

Однофотонная аннигиляция возможна при наличии внешнего электромагнитного поля (например, электростатического поля ядра), когда часть импульса пары берет на себя ядро. Вероятность однофотонной аннигиляции все же значительно меньше двухфотонной даже в том случае, когда аннигилирующий электрон сильно связан с ядром. В наших дальнейших расчетах мы ограничимся рассмотрением двухфотонной аннигиляции свободных частиц.

а) Двухфотонная аннигиляция. Двухфотонная аннигиляция является процессом второго порядка, при котором испускаются два фотона. Для вычисления вероятности двухфотонной аннигиляции мы можем воспользоваться формулой (34,12а):

$$D\psi(N+2) = U^+ D^{-1} U^+ \psi(N), \tag{40,1}$$

где

$$U^+ = \frac{e}{L^{3/2}} \sum_{\varkappa} \sqrt{\frac{2\pi c\hbar}{\varkappa}} (\alpha a^+) e^{ic\varkappa t - i\varkappa r}, \tag{40,2}$$

а число фотонов N в начальный момент равно нулю.

Все расчеты проще всего провести в системе центра инерции. Тогда импульсы ($\hbar \boldsymbol{k}_-$, $\hbar \boldsymbol{k}_+$) электрона и позитрона равны по величине, но направлены в противоположные стороны:

$$\boldsymbol{k}_- = -\boldsymbol{k}_+ = \boldsymbol{k}. \tag{40,3}$$

Функция $\psi(N)$ описывает начальное состояние электрона с положительной энергией:

$$\psi(N) = \psi_0 = \frac{1}{L^{3/2}} b(1,\ s,\ \boldsymbol{k})\, e^{-icKt + i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}} f(N), \tag{40,4}$$

причем функция числа частиц имеет вид

$$f(N) = \Pi \delta_{N0}. \tag{40,5}$$

Конечное состояние электрона соответствует отрицательной энергии и импульсу $-\boldsymbol{k}_+ = \boldsymbol{k}$:

$$\psi(N+2) = \psi_2 = \frac{C(t)}{L^{3/2}} b(-1,\ s',\ \boldsymbol{k})\, e^{icKt + i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}} f(N+2). \tag{40,6}$$

Коэффициент $C(t)$ в начальный момент равен нулю:

$$C(0)=0. \tag{40,7}$$

Отсюда, принимая во внимание правило (26,41) деления на оператор, получаем:

$$D\psi_2 = W^{+}\psi_0, \tag{40,8}$$

где

$$W^{+}=(\psi_0)^{-1}U^{+}D^{-1}U^{+}\psi_0 =$$
$$=\frac{2\pi e^2}{L^3}\sum_{\varkappa,\varkappa'}\frac{1}{\sqrt{\varkappa\varkappa'}}(\boldsymbol{\alpha a'}^{+})\frac{[(K-\varkappa)+(\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{\varkappa}))+\rho_3 k_0]}{(K-\varkappa)^2-(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{\varkappa})^2-k_0^2}\times$$
$$\times(\boldsymbol{\alpha a}^{+})\,e^{ict(\varkappa+\varkappa')-i(\boldsymbol{\varkappa}+\boldsymbol{\varkappa}')\boldsymbol{r}}. \tag{40,9}$$

Симметризуя последнее выражение относительно импульсов фотонов, находим:

$$W^{+}=\sum_{\varkappa,\varkappa'}W^{+}(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\varkappa}')\,e^{ict(\varkappa+\varkappa')-i(\boldsymbol{\varkappa}+\boldsymbol{\varkappa}')\boldsymbol{r}}, \tag{40,10}$$

где

$$W^{+}(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\varkappa}')=\frac{\pi e^2}{L^3}\frac{1}{\sqrt{\varkappa\varkappa'}}\left\{\frac{(\boldsymbol{\alpha a'}^{+})[K-\varkappa+(\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{\varkappa}))+\rho_3k_0](\boldsymbol{\alpha a}^{+})}{(K-\varkappa)^2-(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{\varkappa})^2-k_0^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{(\boldsymbol{\alpha a}^{+})[K-\varkappa'+(\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{\varkappa}'))+\rho_3k_0](\boldsymbol{\alpha a'}^{+})}{(K-\varkappa')^2-(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{\varkappa}')^2-k_0^2}\right\}. \tag{40,11}$$

Подставляя последние соотношения в (40,8), получаем следующее уравнение для определения коэффициента C:

$$-\frac{\hbar}{i}\dot{C}=\sum_{\varkappa,\varkappa'}b'^{+}W^{+}(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\varkappa}')\,b\,e^{-ict(2K-\varkappa-\varkappa')}\delta_{\boldsymbol{\varkappa},-\boldsymbol{\varkappa}'}, \tag{40,12}$$

где

$$b'^{+}=b^{+}(-1,s',\boldsymbol{k}),\quad b=b(1,s,\boldsymbol{k}). \tag{40,13}$$

Из (40,12) автоматически следует закон сохранения импульса:

$$\boldsymbol{\varkappa}'=-\boldsymbol{\varkappa}. \tag{40,14}$$

Иначе говоря, конечный импульс образовавшихся двух γ-квантов, так же как и начальный (позитрона и электрона), равен нулю.

Для коэффициентов C имеем:

$$C=-\frac{i}{\hbar}\sum_{\varkappa}b'^{+}W^{+}(\boldsymbol{\varkappa},-\boldsymbol{\varkappa})\,b\int_0^t e^{-ict(2K-2\varkappa)}\,dt.$$

Аналогичным способом находим для сопряженной функции:

$$C^{+}=\frac{i}{\hbar}\sum_{\varkappa'}b^{+}W(\boldsymbol{\varkappa}',-\boldsymbol{\varkappa}')\,b'\int_0^t e^{ict(2K-2\varkappa')}\,dt.$$

При вычислении вероятности аннигиляции мы должны учесть соотношения между амплитудами,

$$a_s(\varkappa)\, a^+_{s'}(\varkappa') = \left(\delta_{ss'} - \varkappa^0_s \varkappa^0_{s'}\right) \delta_{\varkappa\varkappa'},$$

которые должны иметь место при отсутствии в начальный момент фотонов. Поэтому в квадратичной комбинации, содержащей величину

$$R^+R = \sum_{\varkappa'} b^+ W(\varkappa', -\varkappa')\, b'b'^+ W^+(\varkappa, -\varkappa)\, b,$$

останутся два члена, для которых $\varkappa' = \varkappa$ и $\varkappa' = -\varkappa$, т. е.

$$R^+R = b^+ [W(\varkappa, -\varkappa) + W(-\varkappa, \varkappa)]\, b'b'^+ W^+(\varkappa, -\varkappa)\, b.$$

Принимая во внимание, что

$$W(\varkappa, -\varkappa) = W(-\varkappa, \varkappa),$$

находим:

$$R^+R = 2b^+ W(\varkappa, -\varkappa)\, b'b'^+ W(\varkappa, -\varkappa)\, b, \qquad (40,15)$$

откуда для вероятности аннигиляции получаем следующее выражение [см. также формулу (32,7)]:

$$w = \frac{2\pi}{c\hbar^2} \sum_{\varkappa} R^+R\, \delta(2\varkappa - 2K).$$

Переходя в последнем выражении к непрерывному спектру и интегрируя затем по величине $\varkappa$ с учетом соотношения

$$\int_0^\infty f(\varkappa)\, \delta(2\varkappa - 2K)\, d\varkappa = \left.\frac{f(\varkappa)}{\partial(2\varkappa - 2K)/\partial\varkappa}\right|_{\varkappa = K} = \frac{1}{2} f(K),$$

получаем:

$$w = \frac{e^4}{4c\hbar^2 L^3} \oint S^+ S \frac{d\Omega}{K^2}, \qquad (40,16)$$

где

$$S = b'^+ \left\{ \frac{(\alpha a'^+)\left[(\alpha\varkappa^0) - \frac{(\alpha k)}{K} - \rho_3 \frac{k_0}{K}\right](\alpha a^+)}{2\left(1 - \frac{(k\varkappa^0)}{K}\right)} - \frac{(\alpha a^+)\left[(\alpha\varkappa^0) + \frac{(\alpha k)}{K} + \rho_3 \frac{k_0}{K}\right](\alpha a'^+)}{2\left(1 + \frac{(k\varkappa^0)}{K}\right)} \right\} b, \qquad (40,17)$$

$$\varkappa^0 = \frac{\varkappa}{\varkappa}, \quad a^+ = a^+(\varkappa), \quad a'^+ = a^+(-\varkappa),$$

а $d\Omega$ — телесный угол вектора $\varkappa$.

Для того чтобы получить эффективное сечение, мы должны выражение (40,16) разделить на общее число частиц N (электронов и позитронов), падающих в единицу времени на единицу поверхности, расположенную перпендикулярно к направлению их движения. Величина N равна

$$N = \frac{|v_+| + |v_-|}{L^3} = \frac{2kc}{KL^3}. \tag{40,18}$$

Поэтому

$$\sigma = \frac{w}{N} = \frac{e^4}{8c^2\hbar^2 k} \oint S^+ S \frac{d\Omega}{K}. \tag{40,19}$$

Как будет показано ниже, вероятность аннигиляции достигает наибольшего значения в нерелятивистском приближении ($k \ll k_0$). Этот случай разберем более подробно. Положим в формулах (40,17) и (40,18) $K \approx k_0$, $k/K \approx 0$ и оставим лишь члены, пропорциональные матрице ρ_1, так как в § 21 было показано, что при переходе электрона из состояния с положительной энергией в состояние с отрицательной энергией матричные элементы, пропорциональные матрицам I и ρ_3, имеют порядок релятивистских поправок. Тогда для матричного элемента S находим:

$$S = -b'^+ \frac{(\alpha\varkappa^0)\,[(\alpha a^+)(\alpha a'^+) - (\alpha a'^+)(\alpha a^+)]}{2}\, b = -i\,(\varkappa^0\,[a^+ a'^+])\, b'^+ \rho_1 b, \tag{40,20а}$$

откуда

$$S^+ S = 2b^+ \rho_1 b' b'^+ \rho_1 b = \frac{1}{2}\rho_{11}\sigma_{44} = 1 + ss'. \tag{40,20б}$$

При выводе последних соотношений мы приняли во внимание равенства:

$$(\varkappa^0 a^+) = (\varkappa^0 a'^+) = 0, \quad (Aa)(Ba^+) = (AB) - (A\varkappa^0)(B\varkappa^0),$$
$$(\alpha A)(\alpha B) = (AB) + i\,(\sigma\,[AB]), \tag{40,21}$$

а также соотношения (21,15), (21,17) и (21,18).

Таким образом, находим выражение для эффективного сечения:

$$\sigma = \frac{\pi c r_0^2 (1 + ss')}{2\,|v_+|}, \tag{40,22}$$

где $|v_+| = |v_-|$ — скорость позитрона (и электрона) в системе центра инерции.

Как было отмечено в § 34, эффективное сечение остается инвариантным при переходе к системе координат, относительно которой первоначальный электрон покоится. Однако в этом случае скорость v_+ позитрона в системе центра инерции лучше заменить скоростью $v = 2v_+$ позитрона относительно электрона. Тогда находим:

$$\sigma = \pi r_0^2 \frac{c}{v}(1 + ss'). \tag{40,23}$$

Вычисляя эффективное сечение в общем случае, т. е. не делая перехода к нерелятивистскому приближению, получаем с помощью формул (40,17) и (40,19) и правил вычисления матричных элементов (см. § 21)[1]):

$$\sigma = \frac{r_0^2 k_0^2}{8kK} \oint \left\{ \left(\frac{K^2 + k^2 (1 + \sin^2 \vartheta)}{K^2 - k^2 \cos^2 \vartheta} - \frac{2k^4 \sin^4 \vartheta}{(K^2 - k^2 \cos^2 \vartheta)^2} \right) (1 + ss') - \right.$$
$$\left. - \frac{2ss' k^2 K^2 (1 - \cos^4 \vartheta)}{(K^2 - k^2 \cos^2 \vartheta)^2} \right\} d\Omega. \quad (40,24)$$

Интегрируя последнее выражение по сферическим углам, найдем после усреднения по спиновым состояниям s и s' известную формулу, описывающую процесс аннигиляции[2]):

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{4} \sum_{s, s'} \sigma = \frac{\pi r_0^2}{1 + \gamma} \left[\frac{\gamma^2 + 4\gamma + 1}{\gamma^2 - 1} \ln \left(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1} \right) - \frac{\gamma + 3}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} \right], \quad (40,25)$$

где $\gamma = E/m_0 c^2$, а E является энергией позитрона в системе координат, относительно которой покоится электрон.

Отсюда в нерелятивистском случае ($\gamma \to 1$) получаем выражение

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{4} \sum_{s, s'} \sigma = \pi r_0^2 \frac{c}{v}, \quad (40,26а)$$

которое следует также непосредственно из формулы (40,23).

В нерелятивистском случае энергия ε образовавшихся квантов приблизительно равна собственной энергии электрона ($\varepsilon = m_0 c^2$) и, как видно из формулы (40,20б), интенсивность излучения не зависит от направления вылета квантов.

В ультрарелятивистском случае в системе центра инерции энергии обоих γ-квантов будут равны энергии электрона (или позитрона) ($\varepsilon = E_+ = cp_+$), и кванты испускаются, как видно из формулы (40,24), главным образом вперед и назад ($\cos\vartheta \approx \pm 1$). При переходе к системе координат, в которой покоится электрон, γ-квант, испущенный вперед, принимает на себя почти всю энергию позитрона, другой же γ-квант получит энергию порядка $m_0 c^2$.

С увеличением энергии эффективное сечение постепенно уменьшается и становится в ультрарелятивистском случае ($\gamma \gg 1$) равным:

$$\bar{\sigma} = \pi r_0^2 \frac{m_0 c^2}{E} \left(\ln \frac{2E}{m_0 c^2} - 1 \right). \quad (40,26б)$$

Таким образом, аннигилируют преимущественно медленные позитроны [см. (40,26а)]. При $v \to 0$ эффективное сечение $\bar{\sigma}$ обращается

---

[1]) А. И. Мухтаров, Вестн. МГУ, № 3, 59 (1949).

[2]) P. A. M. Dirac, Proc. Cambr. Phil. Soc. 26, 361 (1930); см. также И. Е. Тамм, Zs. f. Phys. 62, 545 (1930).

в бесконечность. Однако вероятность аннигиляции стремится к конечному пределу. В самом деле, обозначая через N число атомов в единице объема, мы находим следующее значение вероятности аннигиляции, рассчитанное на единицу времени:

$$w_1 = \bar{\sigma} ZNv = ZN\pi r_0^2 \text{ сек}^{-1}. \qquad (40,27)$$

Отсюда легко получить, что в присутствии сравнительно тяжелых элементов время жизни медленного позитрона по порядку величины примерно равно

$$\tau = \frac{1}{w_1} = 10^{-10} \text{ сек}.$$

С экспериментальной стороны двухфотонная аннигиляция хорошо изучена. В частности, было показано, что при аннигиляции медленных позитронов счетчики γ-квантов фиксируют одновременный вылет в противоположных направлениях двух фотонов с энергией порядка m_0c^2.

Необходимо заметить, что ядра атомов отталкивают позитроны, благодаря чему электроны глубоких атомных оболочек не могут участвовать в процессах аннигиляции. Поэтому в формулу (40,27) мы должны подставить некоторое эффективное число электронов $N_{\text{эфф}} < N$, в котором не учитываются электроны глубоких внутренних оболочек[1]). Тогда для времени жизни медленного позитрона мы получим несколько большее значение $(10^{-8}$ или 10^{-9} *сек*).

Наконец, следует еще подчеркнуть, что при малых скоростях движения позитрона условие $Ze^2/\hbar v_+ \ll 1$ для возможности использования плоских волн не будет иметь места, и поэтому в выражение для эффективного сечения необходимо ввести еще функции, учитывающие кулоновское притяжение между электронами и позитронами. В связи с этим следует отметить, что в недавних экспериментах[2]) по аннигиляции позитронов в некоторых газах было найдено эффективное сечение, в 2—3 раза большее, чем вычисленное по формуле (40,26а). Авторы считают, что увеличение сечения связано с кулоновским притяжением.

б) Зависимость вероятности аннигиляции от ориентации спинов. Как видно из формулы (40,23), эффективное сечение сильно зависит от ориентации проекции спинов электрона ($s_- = s$) и позитрона ($s_+ = -s'$) на направление импульса электрона.

Состояние, в котором спины электрона и позитрона параллельны называется ортосостоянием (симметричное состояние). В ортосостоянии спины могут быть направлены или по импульсу электрона ($s_- = s_+ = 1$, $ss' = -1$), или же против него ($s_- = s_+ = -1$, $ss' = -1$).

---

[1]) И. Померанчук, ЖЭТФ **19**, 183 (1949); см. также E. Fermi and G. Uhlenbeck, Phys. Rev. **44**, 510 (1933).

[2]) J. W. Shearer and M. Deutsch, Phys. Rev. **76**, 462 (1949).

Если проекции спинов на импульс электрона будут иметь противоположные знаки, то в этом случае также возможны два состояния: $s_- = -s_+ = \pm 1$, $ss' = 1$. Из них можно составить симметричное состояние, которое будем трактовать как третье ортосостояние (суммарный спин электрона и позитрона хотя и отличен от нуля, но перпендикулярен к выделенному направлению), и антисимметричное, так называемое парасостояние (суммарный спин электрона и позитрона равен нулю).

Учитывая, что вероятность двухфотонной аннигиляции ортосостояния равна нулю:

$$\sigma^S = 0 \tag{40,28}$$

и что среднее значение эффективного сечения двухфотонной аннигиляции равно

$$\bar{\sigma}_2 = \frac{3\sigma^S + \sigma^A}{4}, \tag{40,29}$$

найдем эффективное сечение для аннигиляции парасостояния:

$$\sigma^A = 4\bar{\sigma}_2 = 4\pi r_0^2 \frac{c}{v}. \tag{40,30}$$

Покажем, что мы можем непосредственно вычислить эффективные сечения как для аннигиляции третьего ортосостояния (спины направлены перпендикулярно к выделенному направлению), так и для аннигиляции парасостояния. С этой целью мы явно введем спиновые амплитуды в формулу (40,23). Тогда для трех ортосостояний будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1^s &= \frac{2\pi r_0^2 c}{v} b^+(1)\rho_1 \hat{b}'(1)\hat{b}'^+(1)\rho_1 b(1),\\ \sigma_{-1}^s &= \frac{2\pi r_0^2 c}{v} b^+(-1)\rho_1 \hat{b}'(-1)\hat{b}'^+(-1)\rho_1 b(-1),\\ \sigma_0^s &= \frac{2\pi r_0^2 c}{v}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(b^+(1)\rho_1\hat{b}'(-1) + b^+(-1)\rho_1\hat{b}'(1)\right)\times\\ &\quad\times\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{b}'^+(-1)\rho_1 b(1) + \hat{b}'^+(1)\rho_1 b(-1)\right), \end{aligned}\right\} \tag{40,31}$$

причем, как мы сейчас покажем, произведение амплитуд смешанных состояний $\left(b^+(-1)b(1)\right)$ не равно нулю. Поскольку $s_+ = -s'$, мы ввели для позитрона новые амплитуды:

$$\hat{b}'(s_+) = b'(-s').$$

Аналогичным способом для парасостояния мы можем написать:

$$\sigma^A = \frac{2\pi r_0^2 c}{v}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(b^+(1)\rho_1\hat{b}'(-1) - b^+(-1)\rho_1\hat{b}'(1)\right)\times \\ \times\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{b}'^+(-1)\rho_1 b(1) - \hat{b}'^+(1)\rho_1 b(-1)\right). \tag{40,32}$$

Не нарушая общности задачи, мы можем предположить, что электрон и позитрон движутся параллельно оси z. Тогда согласно (20,13) имеем:

$$b(s) = \rho_3\sigma_1 b(-s) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \sqrt{1+s}\,f(\varepsilon) \\ \sqrt{1-s}\,f(\varepsilon) \\ \varepsilon\sqrt{1+s}\,f(-\varepsilon) \\ -\varepsilon\sqrt{1-s}\,f(-\varepsilon) \end{vmatrix}. \tag{40,33}$$

С помощью (40,33) легко показать, что

$$b^+(-1)\rho_1\hat{b}'(1) = b^+(1)\rho_3\sigma_1\rho_1\rho_3\sigma_1\hat{b}'(-1) = -b^+(1)\rho_1\hat{b}'(-1), \tag{40,34}$$

$$\hat{b}'^+(1)\rho_1 b(-1) = -\hat{b}'^+(-1)\rho_1 b(1), \tag{40,35}$$

откуда, принимая во внимание еще соотношение (40,20б), находим результат, совпадающий с (40,28) и (40,30):

$$\sigma_1^s = \sigma_{-1}^s = \sigma_0^s = 0, \tag{40,36}$$

$$\sigma^A = 4\bar{\sigma}_2. \tag{40,37}$$

в) Трехфотонная аннигиляция [1]). Для рассмотрения трехфотонной аннигиляции электрона и позитрона запишем уравнение Дирака в форме, позволяющей непосредственно исследовать процессы третьего порядка:

$$\mathrm{D}\psi(N+3) = U^+\mathrm{D}^{-1}U^+\mathrm{D}^{-1}U^+\psi(N). \tag{40,38}$$

Мы упростим наши вычисления, если в энергии взаимодействия U^+ амплитуды поля фотонов представим как сумму состояний с различной круговой поляризацией (см. § 14):

$$U^+ = \frac{e}{L^{3/2}}\sum_{l=\pm 1}\sum_{\varkappa}\sqrt{\frac{2\pi c\hbar}{\varkappa}}\,(\boldsymbol{\alpha} a_l^+)\, g_l^+ e^{ic\varkappa t - i\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{r}}, \tag{40,39}$$

где

$$a_l^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{\beta} - il[\boldsymbol{\varkappa}^0\boldsymbol{\beta}]); \tag{40,40}$$

---

[1]) Д. Д. Иваненко и А. А. Соколов, ДАН 58, 1329 (1947); Л. Д. Ландау, ДАН 60, 207 (1948); И. Я. Померанчук, ДАН 60, 213 (1948); Е. М. Лифшиц, ДАН 60, 211 (1948); Д. Д. Иваненко и А. А. Соколов, ДАН 61, 51 (1948); А. А. Соколов и А. И. Мухтаров, Вестн. МГУ № 8, 63 (1948); А. И. Мухтаров, Влияние спиновых состояний на распад атома позитрония (диссертация), физический факультет МГУ (1950); A. Ore, J. Powell, Phys. Rev. 75, 1696 (1949).

$\varkappa^0$ и β являются единичными векторами, направленными соответственно по волновому вектору $\boldsymbol{\varkappa}$ и перпендикулярно к нему. Ради простоты знаки у амплитуд a_l^+ в промежуточных вычислениях мы писать не будем:

$$a_l^+ \to a. \qquad (40,40a)$$

Кроме того, учтем, что при отсутствии в начальный момент фотонов имеют место соотношения

$$g_l g_{l'}'^+ = \delta_{ll'}\delta_{\varkappa\varkappa'}. \qquad (40,41)$$

Вычисления будем производить в системе координат центра инерции в предположении, что электрон и позитрон движутся с малыми скоростями, так что можно положить

$$\boldsymbol{k}_- = -\boldsymbol{k}_+ = \boldsymbol{k} \cong 0. \qquad (40,42)$$

Для начальной и конечной волновых функций имеем:

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \psi(N) = \frac{1}{L^{3/2}} b e^{-ick_0 t} f(N), \\ \psi_3 &= \psi(N+3) = \frac{C(t)}{L^{3/2}} b' e^{ick_0 t} f(N+3), \end{aligned} \qquad (40,43)$$

где амплитуды $b = b(1, s, \boldsymbol{k})$ и $b' = b(-1, s', \boldsymbol{k})$ характеризуют спиновые функции электрона и позитрона.

Подставляя (40,39) в (40,38) и принимая во внимание еще равенство (40,43), получаем уравнение для определения коэффициентов C:

$$-\frac{\hbar}{i}\dot{C} = \sum_{\varkappa, \varkappa', \varkappa''} \sum_{l, l', l''} b'^+ W^+(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\varkappa}', \boldsymbol{\varkappa}'') b e^{-ict(2k_0 - \varkappa - \varkappa' - \varkappa'')} \times \\ \times \delta_{\boldsymbol{\varkappa}+\boldsymbol{\varkappa}'+\boldsymbol{\varkappa}'', 0}, \qquad (40,44)$$

где

$$W^+(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\varkappa}', \boldsymbol{\varkappa}'') = \left(\sqrt{\frac{2\pi c\hbar}{L^3}}\right)^3 \frac{e^3}{\sqrt{\varkappa\varkappa'\varkappa''}} \times \\ \times \frac{1}{4c^2\hbar^2 k_0^2} F(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\varkappa}', \boldsymbol{\varkappa}'') g_l^+ g_{l'}'^+ g_{l''}''^+, \qquad (40,45)$$

$$F(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\varkappa}', \boldsymbol{\varkappa}'') = 4c^2\hbar^2 k_0^2 e^{ict(k_0 - \varkappa - \varkappa') + i\boldsymbol{r}(\boldsymbol{\varkappa}+\boldsymbol{\varkappa}')} \times \\ \times (\boldsymbol{\alpha a}'') \mathrm{D}^{-1} (\boldsymbol{\alpha a}') e^{ic\varkappa' t - i\boldsymbol{\varkappa}'\boldsymbol{r}} \mathrm{D}^{-1} (\boldsymbol{\alpha a}) e^{ic\varkappa t - i\boldsymbol{\varkappa r}} e^{-ick_0 t}, \qquad (40,46)$$

а $\boldsymbol{\varkappa}$, $\boldsymbol{\varkappa}'$ и $\boldsymbol{\varkappa}''$ являются волновыми векторами трех появляющихся фотонов.

С помощью правила (26,41) деления на оператор, учета законов сохранения энергии и импульса,

$$\left.\begin{aligned} \varkappa + \varkappa' + \varkappa'' &= 2k_0, \\ \boldsymbol{\varkappa} + \boldsymbol{\varkappa}' + \boldsymbol{\varkappa}'' &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (40,47)$$

и уравнений, которым подчиняются амплитуды b и b'^{+},

$$\left.\begin{array}{r}(k_0 - k_0\rho_3)\, b = 0,\\ b'^{+}(k_0 + k_0\rho_3) = 0,\end{array}\right\} \qquad (40{,}48)$$

получаем:

$$F(\varkappa, \varkappa', \varkappa'') = -(\alpha a'')\left(1 + (\alpha\varkappa''^{0})\right)(\alpha a')(1 + (\alpha\varkappa^{0}))(\alpha a) =$$
$$= -\rho_1(\sigma a'')(\sigma a')(\sigma a) - \rho_1(\sigma a'')(\sigma\varkappa''^{0})(\sigma a')(\sigma\varkappa^{0})(\sigma a). \qquad (40{,}49)$$

В последнем выражении мы оставили лишь члены, пропорциональные матрице ρ_1, поскольку матричные элементы, не зависящие от ρ_1, в нерелятивистском приближении исчезают.

Воспользовавшись соотношениями

$$(\sigma A)(\sigma B) = (AB) + i(\sigma[AB]),$$
$$(\varkappa^0 a) = 0, \quad [\varkappa^0 a] = il a,$$

имеем:

$$F(\varkappa, \varkappa', \varkappa'') = -(1 - ll'')\rho_1\{(\sigma(a(a'a'') + a''(aa') - a'(aa''))) +$$
$$+ i(a'[aa''])\}.$$

Переставляя между собою векторы $\varkappa$, $\varkappa'$ и $\varkappa''$, которые входят в тройную сумму на равных основаниях, мы можем симметризовать выражение $F(\varkappa, \varkappa', \varkappa'')$ относительно этих векторов:

$$\overline{F} = \frac{1}{6}[F(\varkappa, \varkappa', \varkappa'') + F(\varkappa', \varkappa'', \varkappa) + F(\varkappa, \varkappa'', \varkappa') +$$
$$+ F(\varkappa', \varkappa, \varkappa'') + F(\varkappa'', \varkappa, \varkappa') + F(\varkappa'', \varkappa', \varkappa)].$$

Тогда для $\overline{F}$ находим:

$$\overline{F} = \rho_1(\sigma B). \qquad (40{,}50)$$

Здесь

$$B = \frac{1}{3} f a(a'a'') + \frac{1}{3} f' a'(aa'') + \frac{1}{3} f'' a''(a'a), \qquad (40{,}51)$$

а величины

$$\left.\begin{array}{c} f = 1 + l'l'' - ll' - ll'', \quad f' = 1 + ll'' - l'l - l'l'',\\ f'' = 1 + ll' - l''l - l''l',\end{array}\right\} \qquad (40{,}52)$$

характеризующие поляризацию фотонов, обладают следующим свойством:

$$\sum_{l, l'l''} f = 8, \quad f^2 = 4f, \quad ff' = 0 \quad \text{и т. д.} \qquad (40{,}53)$$

Таким образом, для вероятности трехфотонной аннигиляции получаем:

$$w = \frac{\partial}{\partial t} C^{+}C = \frac{2\pi}{c\hbar^2}\, 6 \sum_{\varkappa, \varkappa', \varkappa''} \sum_{ll'l''} \delta(2k_0 - \varkappa - \varkappa' - \varkappa'')\, \delta_{\varkappa + \varkappa' + \varkappa'', 0} \times$$
$$\times\, b^{+}\overline{W}(\varkappa, \varkappa', \varkappa'')\, b' b'^{+} \overline{W}^{+}(\varkappa, \varkappa', \varkappa'')\, b, \qquad (40{,}54)$$

причем коэффициент 6 [1]) учитывает число возможных комбинаций, при котором произведение $\overline{W}\overline{W}^+$ не равно нулю.

Именно, при вычислении вероятности аннигиляции будут фигурировать следующие произведения квантовых амплитуд:

$$\nu = g_{l_1}(\varkappa_1)\, g_{l'_1}(\varkappa'_1)\, g_{l''_1}(\varkappa''_1)\, g^+_l(\varkappa)\, g^+_{l'}(\varkappa')\, g^+_{l''}(\varkappa'').$$

Последнее произведение будет отлично от нуля в шести случаях:

$$1)\quad \varkappa_1 = \varkappa,\quad \varkappa'_1 = \varkappa',\quad \varkappa''_1 = \varkappa'',$$

$$2)\quad \varkappa_1 = \varkappa'',\quad \varkappa'_1 = \varkappa',\quad \varkappa''_1 = \varkappa$$

и т. д.

Подставляя в (40,54) выражения для $\overline{W}^+$ и восстанавливая индексы у амплитуд $a \to a^+_l$, получаем:

$$w = \frac{8\pi^4\alpha^3 c}{k_0^4 L^9} \sum_{\varkappa, \varkappa', \varkappa''} \sum_{l, l' l''} \frac{1}{\varkappa\varkappa'\varkappa''} f(a'_{l'} a''_{l''})(a'^+_{l'} a''^+_{l''}) \times$$

$$\times\, b^+(\alpha a_l)\, b' b'^+ (\alpha a^+_l)\, b\, \delta(2k_0 - \varkappa - \varkappa' - \varkappa'')\, \delta_{\varkappa+\varkappa'+\varkappa'', 0}. \qquad (40,55)$$

Согласно формулам (40,40) и (40,40а) имеем:

$$(a'^+_{l'} a''^+_{l''}) = \frac{1}{2}(\beta' - il'[\varkappa'^0\beta'])(\beta'' - il''[\varkappa''^0\beta'']),$$

где β' и β'' — произвольные единичные векторы, направленные перпендикулярно соответственно векторам $\varkappa'^0$ и $\varkappa''^0$.

Не нарушая общности окончательного результата, в который входят квадратичные комбинации амплитуд, мы можем положить

$$\beta' = \beta''.$$

Тогда получаем:

$$(a'^+_{l'} a''^+_{l''}) = \frac{1}{2}(1 - l'l''(\varkappa'^0\varkappa''^0)), \qquad (40,56)$$

откуда

$$f(a'_{l'} a''_{l''})(a'^+_{l'} a''^+_{l''}) = \frac{f}{4}(1 - (\varkappa'^0\varkappa''^0))^2. \qquad (40,57)$$

Здесь принято во внимание, что

$$fl'l'' = f.$$

Вычисление спиновых функций мы можем произвести с помощью формул (21,17) и (21,18):

$$b^+(\alpha a_l)\, b' b'^+ (\alpha a^+_l)\, b = \frac{1}{4}\rho_{11}\sigma_{nn'} a_{ln} a^+_{ln'} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}ss'\right). \qquad (40,58)$$

[1]) В нашей работе по трехфотонной аннигиляции [Д. Иваненко и А. Соколов, ДАН СССР 61, 51 (1948)] этот коэффициент был пропущен, а затем был учтен в диссертации А. И. Мухтарова; в работе Е. Лифшица [ДАН СССР 60, 211 (1948)] также допущены неточности в численных коэффициентах.

При выводе последнего равенства было учтено, что при малых скоростях электрона за направление $\boldsymbol{k}$ может быть выбрано любое направление, и поэтому

$$\frac{(\boldsymbol{a}_l\boldsymbol{k})(\boldsymbol{a}_l^+\boldsymbol{k})}{k^2}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}_l\boldsymbol{a}_l^+)=\frac{1}{3}.$$

Суммируя выражение (40,55) по состояниям поляризации l, l' и l'', а также по вектору $\boldsymbol{\varkappa}$, получим:

$$w=\frac{\alpha^3c}{k_0^4L^3}\left(1-\frac{1}{3}ss'\right)\times$$
$$\times\int_0^\infty d\varkappa'\int_0^\infty d\varkappa''\int_{-1}^1 dx\,\frac{\varkappa'\varkappa''}{\varkappa}(1-x)^2\,\delta(2k_0-\varkappa'-\varkappa''-\varkappa),$$

где $\varkappa=\sqrt{\varkappa'^2+\varkappa''^2+2\varkappa'\varkappa''x}$; величина $x=(\boldsymbol{\varkappa}'^0\boldsymbol{\varkappa}''^0)$ является косинусом угла между направлениями $\boldsymbol{\varkappa}'$ и $\boldsymbol{\varkappa}''$.

Интегрирование по x произведем с помощью формулы:

$$\int_{-1}^1 dxf(x)\,\delta(\varkappa(x)-a)=\frac{f(x_0)}{|\partial\varkappa(x_0)/\partial x_0|},$$

причем величина x_0 определяется из уравнения $\varkappa(x_0)-a=0$. Легко показать, что

$$\frac{\partial\varkappa}{\partial x}=\frac{\varkappa'\varkappa''}{\varkappa},\quad 1-x_0=\frac{2(\varkappa'+\varkappa''-k_0)k_0}{\varkappa'\varkappa''};$$

кроме того, величина $|x_0|\leqslant 1$, когда переменные $\varkappa'$ и $\varkappa''$ изменяются в границах

$$0\leqslant\varkappa'\leqslant k_0,\quad k_0-\varkappa'\leqslant\varkappa''\leqslant k_0.$$

Отсюда, вводя новые переменные $\xi'=\varkappa'/k_0$, $\xi''=\varkappa''/k_0$, находим:

$$\sigma_3=\frac{L^3}{v}w=\frac{4}{3}(\pi^2-9)\left(1-\frac{1}{3}ss'\right)\alpha\frac{c}{v}r_0^2. \tag{40,59}$$

Здесь мы учли следующую формулу для определенного интеграла, который вычисляется элементарным путем:

$$\int_0^1 d\xi'\int_{1-\xi'}^1 d\xi''\frac{(\xi'+\xi''-1)^2}{\xi'^2\xi''^2}=\frac{\pi^2-9}{3}. \tag{40,60}$$

Величина v в формуле (40,59) является относительной скоростью, а $r_0=e^2/m_0c^2$ — классическим радиусом электрона.

Таким образом, для аннигиляции ортосостояния $(ss'=-1)$ имеем:

$$\sigma_3^s=\frac{16}{9}(\pi^2-9)\alpha\frac{c}{v}r_0^2, \tag{40,61}$$

а среднее значение эффективного сечения

$$\bar{\sigma}_3 = \frac{1}{4}\sum_{s,\,s'}\sigma_3 = \frac{4}{3}(\pi^2 - 9)\,\alpha\,\frac{c}{v}\,r_0^2. \qquad (40,62)$$

Из последних формул находим, что вероятность трехфотонной аннигиляции парасостояния:

$$\sigma_3^A = 4\bar{\sigma}_3 - 3\sigma_3^s = 0. \qquad (40,63)$$

Отношение среднего значения эффективного сечения трехфотонной аннигиляции к двухфотонной

$$\frac{\bar{\sigma}_3}{\bar{\sigma}_2} = \frac{4}{3}\,\frac{\pi^2 - 9}{\pi}\,\alpha \approx \frac{1}{372}. \qquad (40,64)$$

Трехфотонная аннигиляция была недавно обнаружена экспериментально [1]). Три сцинтилляционных счетчика фотонов были симметрично расположены в одной плоскости с препаратом Cu^{64}, испускающим позитроны, причем регистрировались лишь тройные совпадения. В результате опытов было найдено, что $\bar{\sigma}_2/\bar{\sigma}_3$ равно либо 200 ± 40, либо 330 ± 70, в зависимости от двух возможных предположений об эффективности счетчиков.

В дальнейших работах [2, 3]) с помощью трех сцинтилляционных счетчиков с кристаллами NaI(Tl) была измерена трехфотонная аннигиляция позитронов, испускаемых Na^{22}, которые останавливались алюминием. Было установлено, что отношение эффективных сечений двухфотонной аннигиляции к трехфотонной $\bar{\sigma}_2/\bar{\sigma}_3 = 402 \pm 50$. Последняя величина в пределах экспериментальных ошибок согласуется с теорией.

г) Позитроний [4]). Как было указано в § 29, позитрон при столкновении с электроном может не только аннигилировать, но также образовывать метастабильную систему атомного типа, так называемый «позитроний», напоминающий собою атом водорода, у которого протон замещен позитроном. Сравнивая формулы (29,24) и (29,27) для эффективного сечения образования позитрония с формулой (40,26а), определяющей аннигиляцию пары, мы видим, что при сравнительно больших скоростях ($v \gg \alpha c \doteq c/137$) вероятность аннигиляции будет значительно превышать вероятность образования позитрония. В области же малых скоростей порядка αc оба эффек-

---

[1]) J. A. Rich, Phys. Rev. 81, 140 (1951).

[2]) S. DeBenedetti and R. Siegel, Phys. Rev. 85, 371 (1952); 94, 955 (1954); S. DeBenedetti, Supp. Nuovo Cim. 4, 1209 (1956).

[3]) J. Basson, Phys. Rev. 96, 691 (1954).

[4]) A. E. Ruark, Phys. Rev. 68, 278 (1945); Д. Иваненко и А. Соколов, Вестн. МГУ № 6, 3 (1947). Все расчеты, связанные с позитронием, приведены также в работах, цитируемых на стр. 317.

тивных сечения будут сравнимы между собой, что свидетельствует о реальной возможности образования позитрония.

Атом позитрония обладает определенной вероятностью спонтанной аннигиляции, благодаря чему эта система является метастабильной. Оценим время жизни атома позитрония. Как видно из формулы (40,19), вероятность аннигиляции связана с эффективным сечением соотношением

$$w = v\sigma \frac{1}{L^3}. \tag{40,65}$$

Величина $1/L^3$ является квадратом модуля функции ψ. Поэтому в общем случае равенство (40,65) может быть представлено в виде

$$w = v\sigma |\psi(0)|^2. \tag{40,66}$$

В последней формуле функцию ψ мы взяли в точке, где расстояние между частицами равно нулю. Величина $|\psi(0)|^2$ представляет собою вероятность столкновения электрона и позитрона.

В частности, если атом позитрония находится в наинизшем энергетическом состоянии, мы должны в формулу (40,66) подставить известное выражение для водородных функций:

$$|\psi(0)|^2 = \frac{1}{\pi a^3},$$

причем радиус $a = 2\hbar^2/m_0 e^2$ будет в два раза больше радиуса первой боровской орбиты, так как в последнем выражении массу электрона m_0 следует заменить приведенной массой $m_0/2$ позитрония.

Для времени жизни $\tau = 1/w$ позитрония получаем:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{(\alpha k_0)^3 v\sigma}{8\pi}, \tag{40,67}$$

где σ — эффективное сечение аннигиляции свободной пары.

Поскольку σ в нерелятивистском приближении сильно зависит от ориентации спинов, времена жизни для парапозитрония и ортопозитрония будут различными.

Подставляя в (40,67) значение для σ из формулы (40,30), мы получим для времени жизни парапозитрония, который распадается двухфотонным путем, следующее значение:

$$\tau = \frac{2}{ck_0\alpha^5} \cong 1{,}25 \cdot 10^{-10} \text{ сек.} \tag{40,68}$$

Вероятность же двухфотонного распада ортопозитрония равна согласно (40,48) нулю (запрещенные переходы).

Как видно из формулы (40,61), ортопозитроний может распадаться на три фотона, причем его время жизни примерно в $1/\alpha = 137$ раз больше времени жизни парапозитрония:

$$\tau = \frac{9}{2}\frac{\pi}{\pi^2 - 9}\frac{1}{ck_0\alpha^6} \cong 1{,}4 \cdot 10^{-7} \text{ сек.} \tag{40,69}$$

Недавно образование атомов позитрония было обнаружено экспериментально [1]). Источник позитронов (Na^{22}) помещался в камеру, наполненную азотом. Этот источник одновременно с позитронами испускает также γ-кванты. При прохождении сквозь азот позитроны могли или аннигилировать с образованием двух квантов с энергией 0,5 *Мэв* каждый или вначале образовать атом парапозитрония, который практически мгновенно (точнее, через 10^{-10} *сек*) также распадался на два кванта. Экспериментально различить, когда происходит аннигиляция по первому способу, а когда по второму, пока что не удалось.

Распад же ортопозитрония должен резко отличаться от двух предыдущих распадов. Во-первых, ортопозитроний распадается на три фотона. Поэтому число распавшихся фотонов должно увеличиться, а их энергия — уменьшиться. Кроме того, если регистрировать γ-лучи от Na^{22} и от аннигиляции позитронов, то при последнем процессе аннигиляции должно быть запаздывание порядка времени жизни ортопозитрония (10^{-7} *сек*), которое уже доступно наблюдению.

Оба процесса аннигиляции (двухфотонная и трехфотонная) были обнаружены в указанных опытах. Более того, при добавлении в камеру окиси азота (NO) число трехфотонных аннигиляций резко сокращалось. Это связано с большой вероятностью обмена электронами между ортопозитронием и молекулой NO благодаря тому, что последняя обладает нечетным числом электронов. В результате этого обмена ортопозитроний может перейти в парапозитроний, который мгновенно распадется на два γ-кванта.

В последующем опыте [2]) было показано, что во фреоне (CCl_2F_2) вероятность аннигиляции ортопозитрония, отнесенная к единице времени, при малых давлениях газа равна $w = 1/\tau = (6{,}8 \pm 0{,}7)\cdot 10^6$ *сек*$^{-1}$. Это значение находится в хорошем согласии с теоретическим, определяемым формулой (40,69): $w = 1/\tau = 7{,}2\cdot 10^6$ *сек*$^{-1}$.

За последнее время появилось большое число работ по аннигиляции позитронов в конденсированных средах [3—6]). В металлах и валентных кристаллах, в которых имеется достаточное количество свободных электронов, наблюдается лишь одно время аннигиляции τ_2, соответствующее двухфотонной аннигиляции позитрона со свободным электроном. В твердых и жидких полупроводниках наряду со временем жизни τ_2 наблюдается другое время жизни $\tau_3 \gg \tau_2$, связанное с образованием ортопозитрония с последующей

---

[1]) M. Deutsch, Phys. Rev. **82**, 455 (1951).
[2]) M. Deutsch, Phys. Rev. **83**, 866 (1951).
[3]) R. Wagner and F. Hereford, Phys. Rev. **99**, 593 (1955).
[4]) T. Pond, Phys. Rev. **93**, 478 (1954).
[5]) W. Dixon and L. Trainor, Phys. Rev. **97**, 733 (1955).
[6]) P. Wallace, Phys. Rev. **100**, 738 (1955)

трехфотонной аннигиляцией. Изучение аннигиляции позитронов в конденсированных средах позволяет судить о поведении свободных электронов в данном веществе [1]).

Таким образом, обнаружен не только атом позитрония, но также и его взаимодействие с веществом. Более подробно к изучению оптических свойств атома позитрония мы вернемся в конце книги [см. § 50, п. г)].

§ 41. Каскадная теория ливней

а) Возникновение электронной компоненты. Как известно, в состав первичной компоненты космических лучей входят протоны, а также (в значительно меньшем количестве) ядра других элементов. Энергия частиц первичной компоненты составляет примерно 10^9—10^{10} *эв*, хотя в очень малом количестве обнаружены частицы с энергией порядка 10^{17} *эв*, создающие, в частности, сверхливни Оже [2]).

Происхождение космических лучей еще не установлено во всех деталях. Почти общепризнано, что входящие в состав первичной компоненты космических лучей протоны и ионы ускоряются меняющимися магнитными полями, связанными с ионизированной материей (гипотезы Альфена, Терлецкого, Ферми и других). Однако не установлено еще с достоверностью, какие звезды или другие космические объекты являются главными первоисточниками космических лучей и где космические частицы приобретают основную часть энергии — в межзвездной среде или в оболочках звезд.

Первичные частицы при прохождении сквозь атмосферу испытывают столкновения с ядрами, вследствие которых образуются вторичные частицы (π-мезоны, K-частицы, гипероны и т. д.). Мы не будем останавливаться подробно на этих вопросах, поскольку нас интересует главным образом возникновение электронной компоненты.

При столкновении первичного протона столь большой энергии с ядром (рис. 18) последнее может распасться на отдельные частицы (протоны, нейтроны), образуя так называемые большие

---

[1]) R. Green and A. Stewart, Phys. Rev. 98, 486 (1955).

[2]) Космические лучи имеют большое значение в исследованиях элементарных частиц. Долгое время они вообще представляли собой единственный источник протонов с энергиями порядка 10^{10} *эв*, правда, сравнительно малой интенсивности. Только в самое последнее время были построены ускорительные установки для искусственного получения протонов столь больших энергий (в США калифорнийский беватрон позволяет получать протоны с энергией 6,2 *Бэв*, в СССР в г. Дубна синхрофазотрон дает протоны с энергией до 10 *Бэв*). Интенсивность протонных пучков в этих установках во много раз превышает интенсивность космических лучей. Однако исследования с космическими лучами представляют и сейчас значительный интерес, так как пока еще не видно практических путей искусственного получения частиц с энергией 10^{17} *эв*, которые встречаются в космических лучах.

«звезды», открытые А. П. Ждановым[1]). Эти вторичные частицы могут разбивать новые ядра, создавая тем самым ядернокаскадный процесс. Затем, при лобовом столкновении первичного протона с протоном ядра возникает большая концентрация энергии в виде мезонного «облака», сосредоточенного в весьма малом объеме. Это приводит к тому, что температура облака сильно возрастает и оно начинает «испаряться» в виде отдельных квантов, чаще всего в виде заряженных и нейтральных π-мезонов [статистическая теория кратного порождения которых была предложена Ферми [2])].

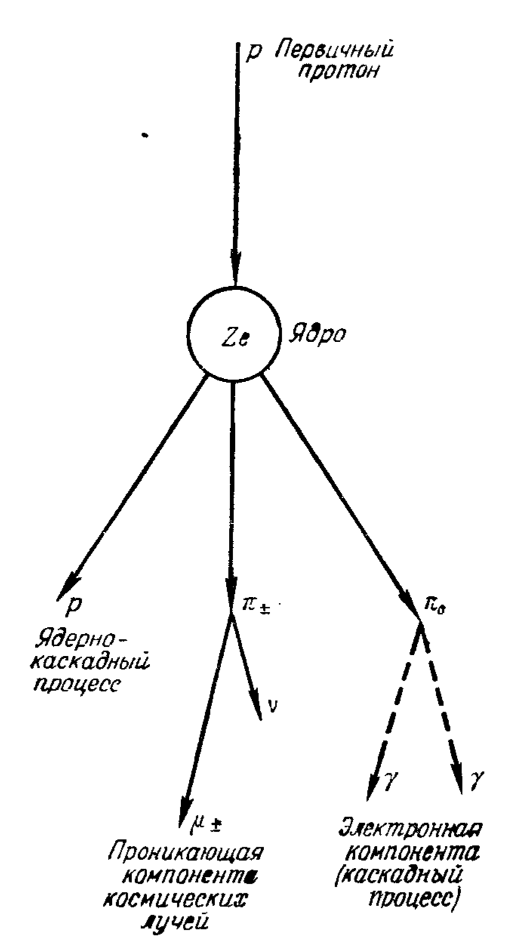


Рис. 18. Схема образования вторичной компоненты космических лучей.

Заряженные π-мезоны с массой примерно 273 m_0 и временем жизни $T_\pi = 2{,}5 \cdot 10^{-8}$ *сек* распадаются на μ-мезоны и нейтрино ($\pi \to \mu + \nu$, см. рис. 18). Следует отметить, что время жизни движущегося π-мезона несколько увеличивается:

$$T = \frac{T_\pi}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad (41,1)$$

но за это время он сумеет пройти сравнительно небольшое расстояние, примерно 30 *м*.

Время жизни μ-мезона массы, примерно равной 207 m_0, значительно больше ($T_\mu \approx 2{,}2 \cdot 10^{-6}$ *сек*), и поэтому быстрый μ-мезон может пройти расстояние около 6000 *м*, прежде чем распадется на электрон (или позитрон), нейтрино или антинейтрино [$\mu_\pm = e_\pm + \nu + \tilde{\nu}$; более подробно см. § 23, п. е)].

Заметим, что проникающая способность быстрых μ-мезонов значительно больше, чем быстрых электронов. В самом деле; масса мезонов более чем в двести раз больше массы электрона. Поскольку квадрат радиуса $(e^2/m_\mu c^2)^2$, входящий в формулу радиационных потерь, для мезона почти в 40 000 раз меньше, чем для электрона,

---

1) А. П. Жданов, ДАН 46, 396 (1945).
2) E. Fermi, Progr. Theor. Phys. 5, 570 (1950).

потерями на тормозное излучение для мезонов мы можем вообще пренебречь. Ионизационные же потери будут заметны лишь для медленных мезонов, так что быстрые мезоны могут проникать на глубину нескольких метров даже в свинец. Нейтральный π-мезон массы примерно 264 m_0 еще быстрее, чем заряженный ($T_0 \sim 10^{-15}$ *сек*), распадается на два γ-кванта ($\pi^0 \to \gamma + \gamma$). Этот распад и служит началом возникновения электронной компоненты (рис. 18).

Как известно, π-мезоны образуют кванты специфических ядерных сил, введенных Юкава. Они являются ядерно-активными частицами. При прохождении сквозь вещество μ-мезонов, нейтрино, антинейтрино, электронов, позитронов и γ-квантов ядерные силы особой роли не играют. Поэтому эту группу частиц мы можем отнести к числу ядерно-неактивных.

Таким образом, при исследовании вторичной компоненты космических лучей мы должны учитывать, во-первых, специфические ядерные превращения, в результате которых возникают мезоны, и, во-вторых, электромагнитные превращения при распространении электронной компоненты. Тогда как теория ядерных процессов находится еще в стадии становления (мезонная теория), современная электродинамика уже позволяет сравнительно детально разобраться в вопросах, связанных с электронной компонентой. Весьма важно подчеркнуть, что с момента возникновения электронной компоненты (например, распад π^0-мезона) дальнейшее ее распространение не связано со специфическими ядерными силами. Ниже мы остановимся более подробно на теории каскадного размножения электронной компоненты (каскадная теория ливней), представляющей собою сравнительно законченную главу современной теории космических лучей.

б) Каскадная теория ливней [1]. Зарождение ливня связано с появлением электрона, позитрона или γ-кванта с энергией порядка 10^9 *эв*. При прохождении через вещество столь быстрой заряженной частицы имеют место следующие эффекты: рёзерфордовское рассеяние, аннигиляция (для позитронов), потери энергии на ионизацию, тормозное (радиационное) излучение. Как следует из § 37 и 40, при больших энергиях основную роль играют потери на тормозное излучение, причем для вероятности испускания γ-квантов с энергией ε, при прохождении частицей единицы пути, в случае полного экранирования мы согласно (37, 28) имеем выражение:

$$w_\gamma(E, E') = \frac{N d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{1}{l}\left[1 + \left(\frac{E'}{E}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{3} - b\right)\frac{E'}{E}\right]\frac{1}{\varepsilon}, \quad (41,2)$$

---

[1] H. Bhabha and W. Heitler, Proc. Roy. Soc. 159, 432 (1937); J. Carlson and J. Oppenheimer, Phys. Rev. 51, 220 (1937); Л. Д. Ландау и Ю. Б. Румер, Proc. Roy. Soc. A166, 213 (1938); Д. Д. Иваненко и А. А. Соколов, ЖЭТФ 8, 639 (1938).

где N — число атомов в единице объема, а начальная E и конечная E' энергии электрона связаны с энергией тормозного фотона соотношением

$$E - E' = \varepsilon.$$

Так называемая радиационная длина [см. (37,32а)]

$$l = [4\alpha r_0^2 Z^2 N \ln(183 Z^{-1/3})]^{-1} \qquad (41,3)$$

зависит от рода вещества. Величина

$$b = [18 \ln(183 Z^{-1/3})]^{-1} \qquad (41,4)$$

почти не зависит от Z; она меняется в пределах 0,012 до 0,015 при изменении Z от 7,3 (воздух) до 82 (свинец). Во многих расчетах величину b принимают равной 0,0135 для всех элементов, так что при прохождении заряженной частицей единицы радиационного пути ($l = 1$) вероятность тормозного излучения не будет зависеть от рода вещества:

$$l w_\gamma(E,E') = \frac{1}{\varepsilon}\left[1 + \left(1 - \frac{\varepsilon}{E}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{3} - b\right)\left(1 - \frac{\varepsilon}{E}\right)\right]. \qquad (41,5)$$

Это обстоятельство позволяет решать указанную задачу сразу для многих веществ.

Пренебрегая коэффициентом b по сравнению с $1/3$, для выражения (41,5) получим:

$$l w_\gamma(E,E') = \frac{a(\varepsilon)}{\varepsilon}, \qquad (41,6)$$

причем коэффициент $a(\varepsilon)$ изменяется в пределах от 1 ($\varepsilon = E$) до 4/3, когда $\varepsilon = 0$. Поэтому довольно часто выражение (41,5) аппроксимируется приближенным, но более простым математическим выражением

$$l w_\gamma(E, E') = \frac{1}{\varepsilon}, \qquad (41,7)$$

т. е. в формуле (41,6) коэффициент $a(\varepsilon)$ полагается равным единице. Подобная аппроксимация связана с выбором такого значения коэффициента a, при котором мы получаем одно и то же выражение для общей потери энергии при прохождении частицей единицы радиационного пути, вычисленное как по основной формуле (41,5) (при $b = 0$), так и по приближенному выражению (41,7):

$$-\frac{dE}{dt} = \int_0^E l\varepsilon w_\gamma(E,E')\, d\varepsilon = E,$$

где t — длина пути, выраженная в радиационных единицах ($t = x/l$).

При прохождении фотонов через вещество их энергия теряется на фотоэффект, эффект Комптона и рождение пар. Как было пока-

зано в § 39, при больших энергиях фотоны поглощаются исключительно за счет образования пар. Для вероятности образования пары на единице пути в случае полного экранирования мы имеем выражение [см. (39,24)]

$$w_p(E, E') = \frac{Nd\sigma}{dE} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{E^2 + E'^2 + 2\,(^1/_3 - b)\,EE'}{\varepsilon^2}\frac{1}{l}, \qquad (41,8)$$

причем энергии E и E' заряженных частиц (электрона и позитрона) связаны с энергией фотона соотношением

$$E + E' = \varepsilon. \qquad (41,9)$$

При прохождении единицы радиационного пути вероятность образования пары при $b = 0$ будет равна

$$lw_p(E, E') = \frac{c(E)}{\varepsilon}. \qquad (41,10)$$

Коэффициент

$$c(E) = \frac{E^2 + (\varepsilon - E)^2 + 2/3E(\varepsilon - E)}{\varepsilon^2} \qquad (41,11)$$

изменяется в пределах от $c = 2/3$ ($E = \varepsilon/2$) до $c = 1$ ($E' = 0$, $E = \varepsilon$). Поэтому выражение (41,10) можно упростить, полагая $c = \text{const}$

$$lw_p(E, E') = \frac{c}{\varepsilon}. \qquad (41,12)$$

Подберем коэффициент c из условия, чтобы для вероятности образования пары на единице радиационного пути получить как из формулы (41,10), так и из ее приближенного выражения (41,12) одно и то же значение.

На основе формулы (41,12) мы имеем:

$$\int_0^{\varepsilon} lw_p(E, E')\,dE = c.$$

Из формулы (41,10) находим:

$$\int_0^{\varepsilon} lw_p(E, E')\,dE = \int_0^1 \left\{\eta^2 + (1-\eta)^2 + \frac{2}{3}\eta(1-\eta)\right\} d\eta = \frac{7}{9}.$$

Отсюда для искомой вероятности мы можем написать следующую приближенную формулу:

$$lw_p(E, E') = \frac{7}{9\varepsilon}. \qquad (41,13)$$

Таким образом, тормозясь в поле атома, быстрые электроны и позитроны излучают фотоны. В свою очередь фотоны при взаимодействии с ядром образуют пары (электрон — позитрон), которые вновь испускают тормозные фотоны, и т. д., так что весь процесс повторяется сначала (рис. 19). В результате многократных превращений энергия первичной частицы распределяется среди многих вторичных частиц. Как только энергия вторичных частиц приближается к такому значению, при котором начинают преобладать потери на ионизацию, ливень прекращается.

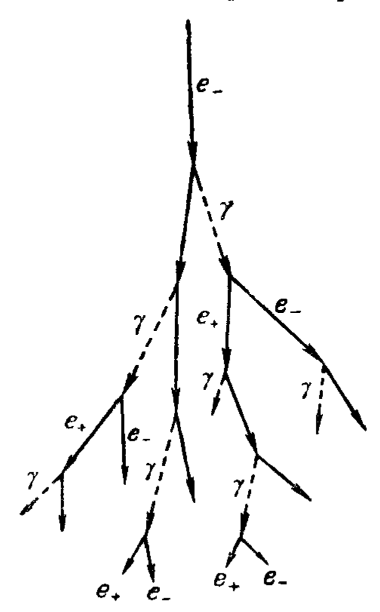


Рис. 19. Схема каскадного размножения электронной компоненты.

Каскадная теория позволяет определить общее число заряженных частиц (электронов и позитронов) $p\,dE$ и общее число фотонов $\Gamma\,dE$ как функции энергии E и глубины проникновения $t = x/l$, т. е.

$$p = p(t, E), \qquad \Gamma = \Gamma(t, E).$$

В области больших энергий мы можем учесть лишь тормозное излучение и эффект образования пар. Кроме того, при больших энергиях ливневые частицы должны двигаться в направлении первичной частицы, благодаря чему мы можем ограничиться рассмотрением задачи одного измерения. В этом случае для определения p и Γ мы будем иметь следующие кинетические уравнения:

$$\frac{\partial p(t, E)}{\partial t} = 2l \int_E^\infty w_p(E, E'-E)\,\Gamma(t, E')\,dE' + l \int_E^\infty w_\gamma(E', E)\,p(t, E')\,dE' - l \int_0^E w_\gamma(E, E')\,p(t, E)\,dE', \tag{41,14}$$

$$\frac{\partial \Gamma(t, E)}{\partial t} = \int_E^\infty l w_\gamma(E', E'-E)\,p(t, E')\,dE' - \int_0^E l w_p(E', E-E')\,\Gamma(t, E)\,dE'. \tag{41,15}$$

В формуле (41,14), характеризующей изменение числа заряженных частиц, первый член правой части $[\sim\Gamma(t, E')]$ дает увеличение числа частиц благодаря образованию пар. Множитель 2 показывает, что

в каждом процессе образуются две частицы (электрон и позитрон); второй член $[\sim p(t, E')]$ дает также увеличение числа частиц, когда вследствие тормозного излучения заряженная частица с энергией E' переходит в состояние с энергией $E\,(E < E')$; третий член $[\sim p(t, E)]$ характеризует уменьшение числа частиц благодаря тому, что заряженная частица, испуская тормозной фотон, переходит из состояния с энергией E. Согласно (41,15) изменение числа фотонов на единице пути складывается из положительной части $[\sim p(t, E')]$, связанной с образованием тормозных фотонов, и отрицательной части $[\sim \Gamma(t, E)]$, обусловленной поглощением фотонов за счет образования пар.

Подставляя в (41,14) и (41,15) упрощенные выражения (41,7) и (41,13) для lw_γ, lw_p, находим:

$$\frac{\partial p(t, E)}{\partial t} = \frac{14}{9}\int_E^\infty \frac{\Gamma(t, E')}{E'}\,dE' + \int_E^\infty \frac{p(t, E')}{E'-E}\,dE' - p(t, E)\int_0^E \frac{dE'}{E-E'}, \tag{41,16а}$$

$$\frac{\partial \Gamma(t, E)}{\partial t} = \frac{1}{E}\int_E^\infty p(t, E')\,dE' - \frac{7}{9}\frac{\Gamma(t, E)}{E}\int_0^E dE'. \tag{41,16б}$$

Решение последних уравнений будем искать с помощью преобразований Лапласа — Меллина[1]):

$$f(E) = \frac{1}{2\pi i E}\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} E^{-s} f(s)\,ds, \quad f(s) = \int_0^\infty E^s f(E)\,dE; \tag{41,17}$$

значение параметра δ, т. е. область интегрирования по переменной s, будет уточнено нами ниже.

Заметим, что функции $f(s)$ и $f(E)$ не равны друг другу, а связаны между собою соотношением (41,17), из которого видно, что $f(s)$ представляют собою амплитуды разложения функции $f(E)$ в интеграл Лапласа — Меллина.

Умножим обе части уравнения (41,16) на $E^s dE$ и проинтегрируем по переменной E в пределах от 0 до ∞. Тогда будем иметь:

$$\frac{\partial p(t, s)}{\partial t} = -p(t, s)\int_0^E \frac{dE'}{E-E'} + \int_0^\infty dE\int_E^\infty E^s\left[\frac{14}{9}\frac{\Gamma(t, E')}{E'} + \frac{p(t, E')}{E'-E}\right]dE'. \tag{41,18}$$

---

[1]) Д. Д. Иваненко и А. А. Соколов, ЖЭТФ 8, 639 (1938).

Для вычисления правой части сделаем замену переменных:

в одинарном интеграле

$$E' = \eta E,$$

в двойном интеграле

$$E' = E'', \quad E = \eta E'',$$

причем в последнем случае границы интегрирования преобразуются по схеме

$$\int_0^\infty dE \int_E^\infty f(E, E')\, dE' = \int_0^\infty E''\, dE'' \int_0^1 d\eta f(\eta E'', E''). \qquad (41{,}19)$$

Уравнение (41,18) принимает вид

$$\frac{\partial p(t, s)}{\partial t} = -A(s)\, p(t, s) + B(s)\, \Gamma(t, s). \qquad (41{,}20)$$

Аналогичным способом получаем для уравнения (41,16б):

$$\frac{\partial \Gamma(t, s)}{\partial t} = C(s)\, p(t, s) - D(s)\, \Gamma(t, s), \qquad (41{,}21)$$

где

$$A(s) = \int_0^1 \frac{1 - \eta^s}{1 - \eta}\, d\eta = \psi(s + 1) + \gamma,$$

$$B(s) = \frac{14}{9}\frac{1}{s + 1}, \qquad C(s) = \frac{1}{s}, \qquad D(s) = \frac{7}{9}, \qquad (41{,}22)$$

$\gamma = 0{,}5772$ — постоянная Эйлера, $\psi(s + 1)$ — логарифмическая производная от Г-функции:

$$\psi(s + 1) = \frac{d}{ds} \ln \Gamma(s + 1). \qquad (41{,}23)$$

Вычисления, проделанные с более точными выражениями (41,5) и (41,8) для вероятности тормозного испускания и вероятности образования пар, привели бы нас также к уравнениям (41,20) и (41,21) со следующими значениями коэффициентов:

$$\left.\begin{aligned} A(s) &= 1{,}36 \frac{d}{ds} \ln \Gamma(s + 2) - \frac{1}{(s + 1)(s + 2)} - 0{,}075 \ldots, \\ B(s) &= 2\left[\frac{1}{s + 1} - \frac{1{,}36}{(s + 2)(s + 3)}\right], \\ C(s) &= \frac{1}{s + 2} + \frac{1{,}36}{s(s + 1)}; \qquad D(s) = 0{,}773. \end{aligned}\right\} \qquad (41{,}24)$$

Таким образом, кинетические уравнения (41,5) и (41,16) мы свели к системе дифференциальных уравнений (41,20) и (41,21), решение которых имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} p(t, s) &= a_1(s)\, e^{\lambda_1(s)\, t} + a_2(s)\, e^{\lambda_2(s)\, t}, \\ \Gamma(t, s) &= b_1(s)\, e^{\lambda_1(s)\, t} + b_2(s)\, e^{\lambda_2(s)\, t}. \end{aligned}\right\} \qquad (41{,}25)$$

Здесь λ_1 и λ_2 являются корнями квадратного уравнения

$$\lambda^2+(A+D)\lambda+AD-BC=0,$$

т. е.

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1&=\frac{1}{2}\sqrt{(A-D)^2+4BC}-\frac{A+D}{2},\\ \lambda_2&=-\frac{1}{2}\sqrt{(A-D)^2+4BC}-\frac{A+D}{2},\end{aligned}\right\}\qquad(41,26)$$

а отношения коэффициентов a и b:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{B}{A+\lambda_1}=\frac{D+\lambda_1}{C},\qquad \frac{a_2}{b_2}=\frac{B}{A+\lambda_2}=\frac{D+\lambda_2}{C}.\qquad(41,27)$$

Таким образом, остаются два произвольных коэффициента, которые следует определить из граничных условий. В качестве последних выберем распределение числа частиц по энергиям при $t=0$. Пусть на слой вещества падает один электрон с энергией E_0. В этом случае граничные условия принимают вид

$$p(0,\ E)=\delta(E_0-E),\quad \Gamma(0,\ E)=0,\qquad(41,28)$$

или

$$p(0,\ s)=\int\limits_0^\infty E^s\delta(E-E_0)\,dE=E_0^s,\quad \Gamma(0,\ s)=0.$$

Тогда для определения коэффициентов a_1 и a_2 имеем уравнения

$$a_1+a_2=E_0^s,$$

$$\frac{A+\lambda_1}{B}a_1+\frac{A+\lambda_2}{B}a_2=0.$$

Отсюда находим:

$$a_1=\frac{\lambda_2+A}{\lambda_2-\lambda_1}E_0^s,\qquad a_2=-\frac{\lambda_1+A}{\lambda_2-\lambda_1}E_0^s.$$

Подставляя эти значения a_1 и a_2 в (41,25), найдем функции $p(t,\ s)$ и $\Gamma(t,\ s)$, а затем с помощью формулы (41,17) — искомые функции $p(t,\ E)$ и $\Gamma(t,\ E)$.

В частности, для функции $p(t,\ E)$ мы имеем:

$$p(t,\ E)=\frac{1}{2\pi iE}\int\limits_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty}\left(\frac{E_0}{E}\right)^s\frac{\lambda_2+A}{\lambda_2-\lambda_1}e^{\lambda_1 t}\,ds.\qquad(41,29)$$

Нетрудно показать, что доля, привносимая в выражение (41,29) вторым членом ($\sim e^{\lambda_2 t}$), экспоненциально убывает с глубиной ($\lambda_2<0$), так что этот член мы сразу отбросим.

Выражение (41,29) мы можем представить в виде

$$p(t,\ E)=\frac{1}{2\pi iE}\int\limits_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty}H(s)\,e^{sy+\lambda_1 t}\,ds,\qquad(41,30)$$

где

$$y = \ln \frac{E_0}{E}, \quad H(s) = \frac{\lambda_2(s) + A(s)}{\lambda_2(s) - \lambda_1(s)}. \tag{41,31}$$

Путь интегрирования в выражении (41,30) должен проходить параллельно мнимой оси справа от всех полюсов, которые определяются из уравнения

$$\lambda_2 - \lambda_1 = -\sqrt{(A-D)^2 + 4BC} = 0,$$

или

$$A - D = \pm 2i\sqrt{BC}.$$

Легко показать, что все корни последнего уравнения лежат в отрицательной полуплоскости, причем число полюсов равно бесконечности, что связано с поведением логарифмической производной Г-функции, входящей в коэффициент $A(s)$. Поэтому величина δ должна быть вещественной и положительной.

Вычислим теперь интеграл (41,30) методом перевала [1]). Рассмотрим функцию, стоящую в экспоненте выражения (41,30):

$$\varphi(s) = sy + \lambda_1 t.$$

Эта функция при $s=0$ и $s=\infty$ на вещественной оси обращается в бесконечность и поэтому должна иметь минимум при некотором действительном положительном значении s_0. Значение s_0 может быть найдено из уравнения

$$\varphi'(s_0) = 0. \tag{41,32}$$

Точка s_0 носит название точки перевала, где функция $\varphi(s)$ имеет достаточно острый минимум, если двигаться вдоль вещественной оси. Как известно, для каждой аналитической функции $\varphi(\xi + i\eta)$ должно выполняться соотношение

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2} = 0.$$

Поэтому функция $\varphi(s)$ имеет в точке s_0 столь же острый максимум, если двигаться через точку s_0 параллельно мнимой оси.

Выберем контур интегрирования таким образом, чтобы он проходил через точку s_0. С этой целью в формуле (41,30) мы должны положить $\delta = s_0$. Тогда наибольший вклад в значение интеграла (41,30) даст интегрирование по участку контура, который непосредственно примыкает к точке s_0. В этом случае медленно меняющуюся функцию $H(s)$ можно считать постоянной величиной, равной ее значению в точке перевала s_0.

Функцию $\varphi(s)$ разложим по степеням $s - s_0$:

$$\varphi(s) = sy + \lambda_1(s)t = s_0 y + \lambda_1(s_0)t + \frac{1}{2}(s-s_0)^2\lambda_1''(s_0)t + \ldots \tag{41,33}$$

---

[1]) О методе перевала более подробно см. Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, т. I, М. — Л., 1951, стр. 442.

и пренебрежем членами порядка выше второго относительно разности $s - s_0$. Здесь мы учли, что линейный член $s - s_0$, пропорциональный функции (41,32), обращается в нуль и дает уравнение для определения точки перевала

$$\varphi'(s_0) = y + t\lambda_1'(s_0) = 0. \tag{41,34}$$

Подставляя последние разложения в формулу (41,30) и полагая $s - s_0 = i\eta$, находим:

$$p(t,\ E) = \frac{H(s_0)}{2\pi E} e^{s_0 y + \lambda_1(s_0) t} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2 \frac{\lambda_1''(s_0)}{2} t}\, d\eta. \tag{41,34a}$$

Учитывая, что $\lambda_1''(s_0) > 0$ (функция достигает минимума), находим после вычисления последнего интеграла:

$$p(t,\ E)\, dE = \frac{H(s_0)}{\sqrt{2\pi\lambda_1''(s_0)\, t}\, E} \frac{1}{E} \left(\frac{E_0}{E}\right)^{s_0} e^{\lambda_1(s_0) t}\, dE, \tag{41,35}$$

причем согласно (41,34) значение s_0 должно быть определено из уравнения

$$t = -\frac{1}{\lambda_1'(s_0)} \ln \frac{E_0}{E}. \tag{41,36}$$

Учет следующих членов разложения (41,33) даст поправку порядка $1/t$. Аналогичным путем легко найти дифференциальное выражение для числа фотонов $\Gamma(t,\ E)$, а также интегральные выражения для числа заряженных частиц (т. е. общее число частиц с энергией, бóльшей E):

$$P(t,\ E) = \int\limits_{E}^{\infty} p(t,\ E)\, dE, \tag{41,37}$$

и соответственно интегральное выражение для числа фотонов. Число частиц (41,35) при заданном значении E с увеличением t сначала возрастает, достигая при некотором оптимальном значении t ($t = t_0$) своего максимального значения; при дальнейшем увеличении t ($t > t_0$) число частиц начинает убывать. Аналогичное заключение можно сделать также для числа фотонов и для интегральных значений числа частиц. Оптимальная глубина t_0 примерно равна тому значению t, при котором функция

$$\varphi(s) = sy + \lambda_1(s)\, t$$

достигает максимума, т. е. когда

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial t} + \lambda_1(s) = 0. \tag{41,38}$$

Принимая во внимание, что при этом должно удовлетворяться еще и уравнение (41,34), находим:

$$\lambda_1(s_0) = \frac{1}{2}\sqrt{(A-D)^2+4BC} - \frac{A+D}{2} = 0. \qquad (41,39)$$

Подставляя сюда вместо коэффициентов A, B, C и D более точные выражения (41,24), можно показать, что уравнение (41,39) будет удовлетворяться при $s_0 \cong 1$.

Для производных в точке $s_0 = 1$ легко найти следующие значения:

$$\lambda_1'(s_0) = -0{,}9908, \quad \lambda_1''(s_0) = 1{,}5634. \qquad (41,40)$$

Отсюда для оптимальной глубины частиц с энергией E имеем:

$$t_0 = 1{,}01 \ln \frac{E_0}{E}. \qquad (41,41)$$

Подставляя значение $s_0 = 1$ в формулу (41,35), найдем соответствующее максимальное значение для числа заряженных частиц:

$$p_m(E_0, E)\,dE = \frac{0{,}137}{(\ln E_0/E)^{1/2}} \frac{E_0}{E^2}\,dE. \qquad (41,42)$$

Определяя подобным способом оптимальную глубину для максимума интегрального значения (41,37) числа заряженных частиц, получаем:

$$T_0 = 1{,}01\left[\ln \frac{E_0}{E} - 1\right] \qquad (41,43)$$

с соответствующим значением для P:

$$P_m(E_0, E) = \frac{0{,}137}{\left(\ln \frac{E_0}{E} - 0{,}37\right)^{1/2}} \frac{E_0}{E}. \qquad (41,44)$$

Из последних формул видно, что оптимальная глубина t_0 для дифференциального числа частиц приблизительно на одну радиационную единицу больше оптимальной глубины T_0 для интегрального значения. Это связано с тем обстоятельством, что оптимальная глубина для дифференциального числа частиц наступает тем быстрее, чем больше значение E. Наконец, можно еще вычислить положение центра тяжести ливневых частиц с энергией E:

$$t_c = \int_0^\infty tp(t, E)\,dt \Big/ \int_0^\infty p(t, E)\,dt, \qquad (41,45)$$

а также продольные размеры ливня:

$$t_l^2 = \int_0^\infty (t-t_c)^2 p(t, E)\,dt \Big/ \int_0^\infty p(t, E)\,dt. \qquad (41,46)$$

В частности, для дифференциального спектра заряженных частиц легко показать, что

$$t_c = 1{,}01 \ln \frac{E_0}{E} + 1, \tag{41,47}$$

$$t_l^2 = 1{,}61 \ln \frac{E_0}{E} - 0{,}1. \tag{41,48}$$

Сравнивая формулу (41,47) с (41,41), мы видим, что глубина (т. е. расстояние от места начала образования) центра тяжести ливня больше соответствующей оптимальной глубины. Из этого следует, что возрастание числа частиц с глубиной перед максимумом происходит быстрее, чем убывание после максимума. Интегральный

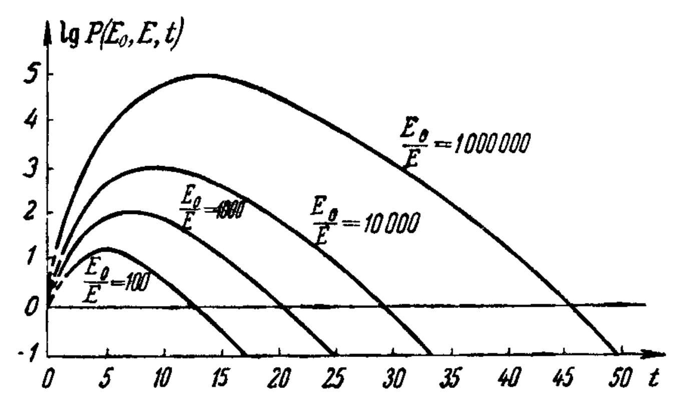


Рис. 20. Интегральный спектр электронов.

спектр для ливней электронов, вычисленный по формуле (41,37), приведен на рис. 20.

Аналогичным способом можно найти соответствующие значения для величин, характеризующих ливни фотонов. Примерно те же формулы мы получим, когда на границу вещества ($t=0$) падает не заряженная частица, а один фотон.

Метод перевала позволил нам найти значения для искомого числа частиц с точностью до членов порядка $1/t$. Таким образом, наши решения имеют смысл при достаточно больших глубинах t. Это вполне соответствует физической сущности задачи, так как при малых толщинах значительную роль будут играть флуктуации, и весь расчет для первых ступеней размножения ливня следует производить, решая уравнения «шаг за шагом», исходя из начального распределения, а не из статистических уравнений. Поэтому выражения, найденные нами для оптимальных глубин (41,41) и (41,43), пригодны, когда эти глубины будут превышать единицу радиационной длины, что имеет место для энергий E, не слишком близких к начальной энергии E_0.

По мере разрастания ливневого процесса число частиц увеличивается, в связи с чем энергия, приходящаяся на одну частицу,

начинает уменьшаться. В этом случае при построении каскадной теории следует учитывать также поправки на ионизацию, эффект Комптона и рёзерфордовское рассеяние. Кроме того, выражения для тормозного излучения и образования пар, которые были выведены для случая полного экранирования, т. е. для больших энергий, в области малых энергий являются весьма неточными.

Рассмотрение подобных весьма существенных уточнений носит сравнительно узко специальный характер, и поэтому для ознакомления со всеми этими вопросами мы отсылаем читателя к специальной литературе [1]).

---

[1]) И. Е. Тамм и С. З. Беленький, J. Phys. USSR 1, 177 (1939); Б. Росси и К. Грейзен, Взаимодействие космических лучей с веществом, М., 1948; Л. Яносси, Космические лучи, М., 1949; С. З. Беленький, Лавинные процессы в космических лучах, М. — Л., 1948.

ГЛАВА IV

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОН-ПОЗИТРОННОГО ВАКУУМА

§ 42. Функции Грина

а) Постановка вопроса. В предыдущей главе мы рассмотрели взаимодействие электронов, описываемых уравнением Дирака (вторично не квантованным), с вторично квантованным полем фотонов. В этом случае можно сравнительно просто описать многие явления, связанные с излучением и поглощением фотонов и даже с рождением и аннигиляцией пар частиц, учитывая при этом возможные переходы электрона в состояния с отрицательными энергиями (дырочная теория Дирака).

Однако чтобы учесть влияиие на те или иные явления поляризации электрон-позитронного вакуума, необходимо построить теорию взаимодействия вторично квантованного уравнения Дирака с вторично квантованным электромагнитным полем. Это составляет новую главу квантовой электродинамики, связанную с развитием теории электрон-позитронного вакуума.

Теория электрон-позитронного вакуума (правда, несколько более сложным путем) позволяет получить все результаты предыдущей главы, когда мы ограничивались лишь вторичным квантованием электромагнитного поля. Кроме того, теория электрон-позитронного вакуума позволила описать ряд новых явлений.

Сравнительно большое влияние электрон-позитронный вакуум оказывает на уровни энергии электрона в атоме и на магнитный момент электрона. Развитие радиоспектроскопии позволило экспериментально весьма точно определить сдвиг уровней электронов в атоме, а также дополнительный магнитный момент электрона.

Необходимо со всей ясностью подчеркнуть, что новые экспериментальные данные для сдвига уровней и для дополнительного магнитного момента электрона не только в качественном, но даже и в количественном отношении дали подтверждение новой теории, и это совпадение является одним из значительных моментов развития теории электрон-позитронного вакуума. Теория электрон-позитронного вакуума позволяет также определить поправки к формуле Клейна — Нишины, к тормозному излучению и т. д.

Эта теория по-новому поставила вопрос о так называемой регуляризации. Выработаны определенные правила отбрасывания

физически нереальных величин, например, бесконечных энергий самодействия и релятивистски неинвариантных членов. Большую помощь в этом оказывают диаграммы Фейнмана. Бесконечные электромагнитные массы электрона (классическая продольная $m_{эл} = \frac{e^2}{\pi c^2}\int\limits_0^\infty dx \approx \frac{e^2}{2rc^2}$ при $r \to 0$, а также квантовая поперечная $m'_{эл} \approx \frac{e^2\hbar}{\pi m_0 c^3}\int\limits_0^\infty \varkappa\, d\varkappa$) должны в новой теории просто исчезать. В этой теории остается собственная полевая масса, обязанная электрон-позитронному вакууму, которая расходится по логарифмическому закону и может дать лишь небольшие поправки (порядка 1/137) к общей массе электрона. Поскольку продольная электромагнитная масса в новой теории должна обращаться в нуль, мы думаем, что наилучшей классической теорией собственной массы электрона является теория точечного электрона Дирака. Согласно последней классическое уравнение движения электрона в нерелятивистском приближении должно иметь вид:

$$m_0\ddot{x} = F_x + \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\dddot{x}. \tag{42,1}$$

Возможные классические способы исключения бесконечной электромагнитной массы, а также решения этого уравнения при наличии третьей производной были рассмотрены в ряде наших работ[1]).

Это же уравнение может быть получено приближенно из электромагнитной теории Лоренца путем разложения силы самодействия по величине r_0/λ, где $r_0 = e^2/m_0c^2$ — классический радиус электрона, а $\omega = 2\pi/\lambda$ — частота его колебаний. Таким образом, по теории Лоренца уравнение (42,1) имеет место лишь в случае $r_0/\lambda \ll 1$. По классической же теории точечного электрона Дирака уравнение (42,1) объявляется точным и должно иметь место для любых значений λ.

Соответствующая массе покоя m_0 энергия

$$E_{собств} = m_0c^2 \tag{42,2}$$

носит название собственной энергии.

При движении частицы, а также при взаимодействии нескольких частиц дополнительно появляются кинетическая энергия $E_{кин}$ и потенциальная энергия $E_{пот}$, которые приводят к наличию дополнительной массы:

$$\Delta m = \frac{E_{кин} + E_{пот}}{c^2}. \tag{42,3}$$

---

[1]) А. А. Соколов, Вестн. МГУ № 2 (1947); ЖЭТФ 18, 280 (1948); см. также «Классическая теория поля», стр. 220. Поскольку теория пока еще не завершена, окончательных выводов о природе массы элементарных частиц сделать нельзя.

Прежде всего заметим, что масса и энергия характеризуют различные качественные стороны движущейся материи. Понятие массы связано с конкретными представлениями о количестве материи, а понятие энергии — с мерой ее движения; поэтому установление соотношения между массой и энергией никоим образом не означает тождественности последних.

В области малых энергий, когда кинетическая и потенциальная энергии много меньше собственной энергии частиц и когда отсутствуют превращения одних элементарных частиц в другие, мы будем иметь два закона сохранения:

$$\sum E_{\text{кин}} + \sum E_{\text{пот}} = \text{const} \tag{42,4}$$

и

$$\sum m_0 = \text{const}, \tag{42,5}$$

которые можно рассматривать как закон сохранения энергии и закон сохранения массы.

В области же больших энергий, когда возможны превращения одних элементарных частиц в другие, мы имеем обобщение этих двух законов сохранения в один:

$$c^2 \sum m_0 + \sum E_{\text{кин}} + \sum E_{\text{пот}} = \text{const}, \tag{42,6}$$

причем сумму следует распространить на все частицы и поля, образующие замкнутую (т. е. не взаимодействующую с внешним миром) систему. Это соотношение учитывает возможность превращения (например, при реакциях с элементарными частицами) собственной энергии в кинетическую или в потенциальную и наоборот.

С другой стороны, общая масса частиц при наличии кинетической и потенциальной энергий может быть представлена в виде

$$M = \sum m_0 + \frac{1}{c^2} \sum E_{\text{кин}} + \frac{1}{c^2} \sum E_{\text{пот}}. \tag{42,7}$$

Например, в случае одного свободного электрона, движущегося со скоростью v, его кинетическая энергия равна

$$E_{\text{кин}} = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right).$$

Поэтому

$$M = m_0 + \frac{E_{\text{кин}}}{c^2} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Только в случае движений с малыми скоростями $\left(\beta^2 = \frac{v^2}{c^2} \to 0\right)$ мы можем считать собственную массу неизменной величиной. Энергия связи электронов в атоме мала, и поэтому соответствующая ей дополнительная масса практически незаметна.

Другое положение вещей мы имеем в атомном ядре, состоящем согласно теории Иваненко и Гейзенберга из нуклонов. Начиная с ядра

гелия и далее ($Z \gg 2$), энергия связи на каждый нуклон равна примерно 7 *Мэв*, что, как известно, приводит к появлению дефекта массы с отрицательным знаком (энергия притяжения отрицательна), составляющего по абсолютному значению приблизительно 0,8% собственной массы нуклона. Таким образом, масса сложных ядер складывается из собственной массы нуклонов и дефекта массы, несколько (примерно на 0,8%) уменьшающего общую массу частиц.

Мы не собираемся подробно освещать современное состояние теории электрон-позитронного вакуума, поскольку она, а в особенности вопросы, связанные с методами регуляризации, далеки еще от своего завершения. Поэтому мы ограничимся рассмотрением, с одной стороны, некоторых принципиальных вопросов, а с другой стороны, постараемся изложить сравнительно простой аппарат, позволяющий исследовать хотя бы основные явления с учетом вакуумных членов.

б) Гриниан электромагнитного поля. В теории электрон-позитронного вакуума большую роль играют функции Грина (гринианы) как электромагнитного, так и электрон-позитронного поля. Найдем прежде всего гриниан электромагнитного поля, когда электрон-позитронный вакуум отсутствует.

В классическом случае гриниан может быть получен в результате решения уравнения Даламбера с правой частью:

$$\Box \overline{\Phi}_\mu = 4\pi j_\mu, \qquad (42,8)$$

где потенциалы $\overline{\Phi}_\mu = \overline{\Phi}_n$, $i'\overline{\Phi}$ и токи $j_\mu = j_n$, $i'\rho$ зависят от пространственных координат $\boldsymbol{r}$ и времени t, а величина $\Box$ является оператором Даламбера $\Box = \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$.

Напомним, что знак плюс (а не, как обычно, минус) в правой части (42,8) связан с выбором нами в качестве основного — отрицательного заряда электрона ($e^- = -e$).

Для решения уравнения (42,8) его можно представить в виде

$$\Box \overline{\Phi}_\mu(\boldsymbol{r}, t) = 4\pi \int j_\mu(\boldsymbol{r}', t')\,\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\,\delta(t - t')\,d^3x'\,dt'.$$

Отсюда, производя деление[1]) на оператор Даламбера $\Box$, который не зависит от $\boldsymbol{r}'$, t', будем иметь:

$$\overline{\Phi}_\mu(\boldsymbol{r}, t) = \Phi_\mu(\boldsymbol{r}, t) + 4\pi \int j_\mu(\boldsymbol{r}', t')\,\frac{\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\,\delta(t - t')}{\Box}\,d^4x', \qquad (42,9)$$

где функция $\Phi_\mu(\boldsymbol{r}, t)$ представляет собою решение однородного уравнения Даламбера.

---

[1]) Правила деления на оператор были установлены в «Классической теории поля», стр. 36.

Функция

$$G(\mathbf{r}-\mathbf{r}',\ t-t') = -\frac{\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\delta(t-t')}{\Box} \qquad (42,10)$$

называется гринианом уравнения Даламбера, т. е. гриниан связан с четырехмерной δ-функцией соотношением [см. [1]]

$$\Box\, G(\mathbf{r}-\mathbf{r}',\ t-t') = -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\delta(t-t') = \\ = -\frac{c}{16\pi^4}\int d^4\varkappa\, e^{-ic\varkappa_4(t-t')+i\boldsymbol{\varkappa}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}. \qquad (42,11)$$

Отсюда для гриниана находим следующее выражение [2]:

$$G = \frac{c}{16\pi^4}\int \frac{e^{-ic\varkappa_4(t-t')+i\boldsymbol{\varkappa}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{\varkappa^2-\varkappa_4^2}\, d^4\varkappa + G^0. \qquad (42,12)$$

Интеграл в правой части (42,12) является неоднозначным. Поэтому мы будем брать его в смысле главного значения, а неоднозначность будет учтена путем прибавления к нему соответствующего решения G^0 однородного уравнения ($\Box\, G^0 = 0$).

Эта неоднозначность в решении уравнения Даламбера хорошо известна и в классической электродинамике. Она связана с тем, что на решения не наложены граничные условия. В зависимости от последних решение может быть представлено через запаздывающие или через опережающие потенциалы, или же через их линейную комбинацию.

Чтобы сделать решение однозначным, можно ограничить его, например, учетом одних лишь запаздывающих или одних лишь опережающих потенциалов. Это можно осуществить путем подбора функции G^0 таким образом, чтобы

$$G_{\text{запазд}}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',\ t-t') = 0 \quad \text{при} \quad t' > t \qquad (42,13)$$

или

$$G_{\text{опереж}}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',\ t-t') = 0 \quad \text{при} \quad t' < t. \qquad (42,14)$$

Как известно, решением однородного уравнения Даламбера является перестановочная функция Δ [см. (15.3)]

$$\Delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}',\ t-t') = \frac{1}{8\pi^3}\int e^{i\boldsymbol{\varkappa}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}\frac{\sin c\varkappa(t-t')}{\varkappa}\, d^3\varkappa, \qquad (42,15)$$

---

[1] Д. Иваненко и А. Соколов, ДАН **36**, 37 (1940); А. Соколов, Дельта-функция и ее применение к решению некоторых задач математической физики, Свердловск, 1946; см. также «Классическая теория поля» стр. 84.

[2] Здесь (как и прежде) используется гауссова система единиц.

с которой мы и свяжем функцию G^0 [1]),

$$G^0 = \varepsilon \frac{c}{2} \Delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',\ t-t'),$$

Вычисляя, далее, главное значение интеграла

$$\int \frac{e^{-ic\varkappa_4(t-t')}}{\varkappa^2-\varkappa_4^2}\, d\varkappa_4 = \pi \frac{t-t'}{|t-t'|}\, \frac{\sin c\varkappa(t-t')}{\varkappa}, \tag{42,16}$$

найдем для гриниана выражение [2])

$$G = \frac{c}{2}\left(\frac{t-t'}{|t-t'|} + \varepsilon\right)\Delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',\ t-t'). \tag{42,17}$$

Полагая $\varepsilon = 1,\ -1,\ 0$, получим соответственно гринианы для запаздывающих, опережающих и полусуммы запаздывающих и опережающих потенциалов. Поэтому решение (42,9) окончательно может быть представлено в виде

$$\overline{\Phi}_\mu = \Phi_\mu - 4\pi c \int d^3x' \int_{-\infty}^{t} j_\mu(\boldsymbol{r}',\ t')\,\Delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',\ t-t')\, dt'. \tag{42,18}$$

Это решение дано для запаздывающих потенциалов. В случае опережающих потенциалов мы должны интегрирование по t' производить в пределах от $+\infty$ до t (а не от $-\infty$ до t).

Теория вторичного квантования позволяет найти другой подход к функции Грина, который, с одной стороны, при наличии одного лишь электромагнитного поля дает возможность получить классические результаты, а с другой стороны, позволяет обобщить понятие гриниана на случай взаимодействующих электромагнитных и электрон-позитронных полей. Этот метод, по существу, связан с понятием S-матрицы, введенной Гейзенбергом.

---

[1]) Вторая функция

$$\Delta_1(\boldsymbol{R},\ T) = \frac{1}{8\pi^3}\int e^{i\varkappa R}\,\frac{\cos \varkappa c T}{\varkappa}\, d^3\varkappa = \frac{1}{2\pi^2(R^2-c^2T^2)} \tag{42,15а}$$

(см. «Классическая теория поля», стр. 88) также является решением однородного уравнения. Однако в выражение для $G_{\text{запазд}}$ и $G_{\text{опереж}}$ она не входит.

[2]) Раскрывая интегралы, найдем для функции Δ:

$$\Delta(\boldsymbol{R},\ T) = \frac{1}{4\pi c}\,\frac{\delta\left(T-\frac{R}{c}\right)-\delta\left(T+\frac{R}{c}\right)}{R} = \frac{T}{2\pi|T|}\,\delta(R^2-c^2T^2)$$

(см. «Классическая теория поля», стр. 88). Отсюда видно, что $\Delta(\boldsymbol{R},\ T)$ является нечетной функцией времени, а $\Delta_1(\boldsymbol{R},\ T)$ [см. (42, 15а)] — четной.

Как известно, вторично квантованные электромагнитные потенциалы в случае отсутствия взаимодействия с другими полями могут быть представлены в виде [см. (16,17), (16,18) и (16,19)]

$$\Phi_\mu = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_\varkappa \sqrt{\frac{2\pi c\hbar}{\varkappa}} \left(q_\mu e^{-ic\varkappa t + i\varkappa r} + q_\mu^+ e^{ic\varkappa t - i\varkappa r}\right), \tag{42,19}$$

причем

$$[q_\mu q'^+_{\mu'}]_- = \delta_{\varkappa\varkappa'}\delta_{\mu\mu'}, \tag{42,20}$$

$$[\Phi_\mu(r, t),\ \Phi_{\mu'}(r', t')]_- = \frac{4\pi c\hbar}{i}\delta_{\mu\mu'}\Delta(r - r',\ t - t'). \tag{42,21}$$

Особый интерес для дальнейшего будут представлять не четырехмерные перестановочные соотношения (42,21), а трехмерные:

$$\left.\begin{aligned} &[\Phi_\mu(r, t),\ \Phi_{\mu'}(r', t)]_- = \left[\frac{1}{c}\Phi_{\mu, t}(r, t),\ \frac{1}{c}\Phi_{\mu', t}(r', t)\right]_- = 0,\\ &\left[\frac{1}{c}\Phi_{\mu, t}(r, t),\ \Phi_{\mu'}(r', t)\right]_- = \frac{4\pi c\hbar}{i}\delta(r - r')\delta_{\mu\mu'},\\ &\text{где}\\ &\Phi_{\mu, t} = \frac{\partial\Phi_\mu}{\partial t}. \end{aligned}\right\} \tag{42,22}$$

Эти соотношения легко получить из формулы (42,21), учитывая, что при $t = t'$

$$\Delta(r - r',\ t - t') = 0, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Delta(r - r',\ t - t') = \delta(r - r'). \tag{42,23}$$

Покажем, что в этом случае решение уравнения Даламбера (42,8) может быть представлено в виде

$$\overline{\Phi}_\mu = S^{-1}\Phi_\mu S, \tag{42,24}$$

где Φ_μ — вторично квантованный потенциал свободного электромагнитного поля, удовлетворяющий перестановочным соотношениям (42,22).

Для этого функции S^{-1} и S следует выбрать в виде

$$S^{-1}(t) = e^v, \quad S(t) = e^{-v},$$

где

$$\left.\begin{aligned} &v_t = w, \quad v = \int_{-\infty}^{t} w(t')\,dt', \quad v' = \int_{-\infty}^{t'} w(t'')\,dt'',\\ &vv' = \int_{-\infty}^{t} dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' w(t')\,w(t''),\\ &v'v = \int_{-\infty}^{t} dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' w(t'')\,w(t') \text{ и т. д.} \end{aligned}\right\} \tag{42,25}$$

Для функции w мы введем следующее операторное выражение [напомним, что $\Phi_{\mu'}$ является оператором, удовлетворяющим соотношению (42,22), но ток j_{μ} остается c-числом]:

$$w(t)=\frac{i}{\hbar}\int j_{\mu'}(r',\,t)\,\Phi_{\mu'}(r',\,t)\,d^3x', \tag{42,26}$$

причем по значку μ', входящему дважды, необходимо произвести суммирование ($\mu'=1,\ 2,\ 3,\ 4$).

Как известно, лагранжиан взаимодействия электромагнитного поля с внешними источниками равен

$$L(t)=-\int j_{\mu}(r',\,t)\,\Phi_{\mu}(r',\,t)\,d^3x'.$$

Поэтому искомая функция $w(t)$ будет пропорциональна этому лагранжиану взаимодействия:

$$w(t)=-\frac{i}{\hbar}L(t). \tag{42,27}$$

Эта же связь будет иметь место и в других более сложных случаях.

Поскольку функции S^{-1} и S определены таким образом, что в показателе стоит оператор, то действие над ними требует некоторых дополнительных пояснений. Необходимо учитывать порядок расположения функций v, v' и v'' и т. д. при разложении S^{-1} и S в ряд. В раскрытом виде функцию S^{-1} определим следующим образом:

$$\begin{aligned} S^{-1}=e^{v}&=1+v+v'v+v''v'v+\ldots= \\ &=1+\int\limits_{-\infty}^{t} w(t')\,dt'+\int\limits_{-\infty}^{t} dt'\int\limits_{-\infty}^{t'} dt''w(t'')\,w(t')+ \\ &+\int\limits_{-\infty}^{t} dt'\int\limits_{-\infty}^{t'} dt''\int\limits_{-\infty}^{t''} dt'''w(t''')\,w(t'')\,w(t')+\ldots, \end{aligned} \tag{42,28}$$

т. е.

$$S_t^{-1}=w+vw+v'vw+\ldots=S^{-1}w. \tag{42,28a}$$

Если же w была бы обычной, а не операторной функцией, то мы имели бы:

$$S_t^{-1}=wS^{-1}=S^{-1}w.$$

В нашем же случае следует сохранить порядок между функциями S^{-1} и w, так как $wS^{-1}\neq S^{-1}w$.

Точно так же разложение функции S в ряд мы определим следующим образом [1]):

$$S = e^{-v} = 1 - v + vv' - vv'v'' + \ldots, \qquad (42,29)$$

$$S_t = -wS \neq -Sw. \qquad (42,30)$$

Равенства (42,28) и (42,29) будут представлять собою полные определения функций S^{-1} и S.

Покажем, что решение (42,24) удовлетворяет уравнению (42,8). В самом деле, учитывая, что функции S^{-1} и S зависят только от времени, мы можем написать:

$$\nabla^2\overline{\Phi}_\mu = S^{-1}\nabla^2\Phi_\mu S. \qquad (42,31)$$

Далее, принимая во внимание соотношения (42,28а) и (42,30), имеем:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\overline{\Phi}_\mu}{\partial t} = S^{-1}\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi_\mu}{\partial t}S + \frac{1}{c}S^{-1}(w\Phi_\mu - \Phi_\mu w)S. \qquad (42,32)$$

Учитывая перестановочные соотношения (42,22), легко показать, что последний член в правой части (42,32) обращается в нуль,

$$w\Phi_\mu - \Phi_\mu w = \frac{i}{\hbar}\int j_{\mu'}(\boldsymbol{r}', t)\,[\Phi_{\mu'}(\boldsymbol{r}', t)\,\Phi_\mu(\boldsymbol{r}, t)]_-\,d^3x' = 0. \qquad (42,33)$$

Аналогичным способом находим:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overline{\Phi}_\mu}{\partial t^2} = S^{-1}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi_\mu}{\partial t^2}S + \frac{1}{c^2}S^{-1}(w\dot{\Phi}_{\mu,t} - \Phi_{\mu,t}w)S.$$

---

[1]) В современной квантовой электродинамике для упрощения вычислений вводятся так называемые P-, T- и N-произведения. Представим вторично квантованные операторы ψ и ψ^+ как сумму двух операторов:

$$\psi = u + \tilde{u}^+,$$

$$\psi^+ = \tilde{u} + u^+,$$

где u и $\tilde{u}$ — операторы поглощения, а u^+ и $\tilde{u}^+$ — операторы рождения электрона или позитрона.

Тогда P-произведение определяется следующим образом:

$$P(\psi_1\psi_2\psi_3\ldots) = \psi_{i_1}\psi_{i_2}\psi_{i_3}\ldots, \qquad (42,29а)$$

где в правой части операторы расставлены в хронологическом порядке, т. е. так, что $t_{i_1} > t_{i_2} > t_{i_3}$ и т. д., а $\psi_{i_n} = \psi(t_{i_n})$.

В случае T-произведения в правой части (42,29а) появляется знаковая функция δ_p, которая равна $+1$ или -1 в зависимости от того, совершается ли переход от первоначального расположения операторов $\psi_1\psi_2\psi_3\ldots$ к конечному — $\psi_{i_1}\psi_{i_2}\psi_{i_3}$ с помощью четной ($\delta_p = 1$) или нечетной ($\delta_p = -1$) перестановки операторов.

Наконец, в N-произведении операторы испускания стоят слева, а операторы поглощения — справа, и все произведение умножается по указанному правилу на только что введенный знаковый множитель δ_p.

Принимая во внимание соотношения

$$\frac{1}{c}[w,\ \Phi_{\mu,t}]_- = \frac{i}{\hbar}\int j_{\mu'}(r',\ t)\left[\Phi_{\mu'}(r',\ t)\frac{1}{c}\Phi_{\mu,t}(r,\ t)\right]_- d^3x' =$$
$$= -4\pi c j_\mu(r,\ t), \qquad (42{,}34)$$

$$\overline{j}_\mu = S^{-1}j_\mu S = j_\mu, \qquad (42{,}35)$$

найдем, что функция $\overline{\Phi}_\mu$ удовлетворяет уравнению Даламбера с правой частью:

$$\Box\ \overline{\Phi}_\mu = 4\pi j_\mu.$$

Воспользовавшись разложениями функций S^{-1} (42,28) и S (42,29) решение для функции $\overline{\Phi}_\mu$ (42,24) мы можем представить в виде

$$\overline{\Phi}_\mu = S^{-1}\Phi_\mu S = \Phi_\mu + (v\Phi_\mu - \Phi_\mu v) + (v'v\Phi_\mu - v\Phi_\mu v +$$
$$+ \Phi_\mu vv') + (v''v'v\Phi_\mu - v'v\Phi_\mu v + v\Phi_\mu vv' - \Phi_\mu vv'v'') + \ldots \qquad (42{,}36)$$

Далее воспользуемся следующими тождественными соотношениями:

$$v\Phi_\mu v = v'\Phi_\mu v + v\Phi_\mu v', \qquad (42{,}37)$$

$$v'v\Phi_\mu v = v''v'\Phi_\mu v + v'v\Phi_\mu v' \text{ и т. д.}, \qquad (42{,}38)$$

Таким образом, при наличии двух операторов $\psi_1^+(t_1)$, $\psi_2(t_2)$ мы будем иметь:

$$P(\psi_1^+\psi_2) = \begin{cases} \psi_1^+\psi_2 & (t_1 > t_2), \\ \psi_2\psi_1^+ & (t_1 < t_2), \end{cases} \qquad (42{,}29\text{б})$$

$$T(\psi_1^+\psi_2) = \begin{cases} \psi_1^+\psi_2 & (t_1 > t_2), \\ -\psi_2\psi_1^+ & (t_1 < t_2), \end{cases} \qquad (42{,}29\text{в})$$

$$N(\psi_1^+\psi_2) = N\left(u_1^+ + \tilde{u}_1\right)\left(u_2 + \tilde{u}_2^+\right) = u_1^+u_2 + u_1^+\tilde{u}_2^+ + \tilde{u}_1u_2 - \tilde{u}_2^+\tilde{u}_1. \qquad (42{,}29\text{г})$$

С помощью этих операторов выражение (42,29) может быть представлено следующим образом:

$$e^{-v} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_{-\infty}^{t}dt_1\int_{-\infty}^{t}dt_2\ldots\int_{-\infty}^{t}dt_n P(v(t_1)\,v(t_2)\ldots v(t_n)). \qquad (42{,}29\text{д})$$

Таким образом, S является оператором преобразования от гейзенберговского представления $\overline{\Phi} = S^{-1}\Phi S$ к представлению взаимодействия $\Phi = S\overline{\Phi}S^{-1}$, совпадающему с уравнением свободного поля (см. ниже стр. 359).

Краткое сравнение только что изложенного метода с нашим будем в дальнейшем производить в подстраничных примечаниях.

которые можно доказать следующим образом. Разложим функцию $w(t)$ в ряд Фурье:

$$w(t)=\sum_{k_i} w_{k_i} e^{ik_i t}.$$

Тогда, учитывая, что $e^{-i\infty}=0$ [1]), мы имеем:

$$\left.\begin{aligned} v&=\int\limits_{-\infty}^{t} w(t')\,dt'=\sum_{k_1} w_{k_1}\frac{e^{ik_1 t}}{ik_1},\\ v'v&=\sum_{k_1k_2} w_{k_1}w_{k_2}\frac{e^{i(k_1+k_2)t}}{i^2k_1(k_1+k_2)},\\ vv'&=\sum_{k_1k_2} w_{k_1}w_{k_2}\frac{e^{i(k_1+k_2)t}}{i^2k_2(k_1+k_2)}.\end{aligned}\right\}\qquad(42{,}39)$$

Вообще говоря, последовательность перенумерования индексов $k_1, k_2, \ldots, k_i$ является безразличной. Поэтому мы располагаем слева направо эти индексы таким образом, чтобы в начале стояла функция w_{k_1}, затем w_{k_2} и т. д.

Подставляя эти соотношения в (42,37), мы докажем его справедливость, поскольку при данном рассмотрении оно вытекает из очевидного тождества

$$\sum_{k_1k_2} w_{k_1}\Phi_\mu w_{k_2}\frac{e^{i(k_1+k_2)t}}{i^2k_1k_2}=$$

$$=\sum_{k_1k_2} w_{k_1}\Phi_\mu w_{k_2}\frac{e^{i(k_1+k_2)t}}{i^2}\left(\frac{1}{k_1(k_1+k_2)}+\frac{1}{k_2(k_1+k_2)}\right).$$

Аналогичным способом легко также доказать соотношение (42,38), поскольку в левой и правой частях будут стоять под знаком суммы с общим множителем следующие коэффициенты:

$$\frac{1}{k_1(k_1+k_2)k_3}=\frac{1}{k_1(k_1+k_2)(k_1+k_2+k_3)}+\frac{1}{k_1k_3(k_1+k_2+k_3)},$$

которые также, очевидно, равны друг другу.

Тогда (42,36) может быть представлено в виде

$$S^{-1}\Phi_\mu S=\Phi_\mu+[v\Phi_\mu]_-+[v'[v\Phi_\mu]_-]_-+$$
$$+(v''v'[v\Phi_\mu]_- - v'[v\Phi_\mu]_- v'+[v\Phi_\mu]_- v'v'')+\ldots\qquad(42{,}40)$$

---

[1]) Равенства типа $e^{-i\infty}=0$ следует понимать в смысле интегрального соотношения: $\lim\limits_{\varepsilon\to 0,\,\alpha\to\infty}\int\limits_0^\infty e^{-\varepsilon t}e^{-i\alpha t}f(t)\,dt=0$, где $f(t)$ — любая достаточно гладкая функция.

Докажем аналогичным способом формулу

$$v'[v\Phi_\mu]_- v' = v''[v\Phi_\mu]_- v' + v'[v\Phi_\mu]_- v'' \text{ и т. д.} \qquad (42,41)$$

Для этого, подставляя сюда разложения типа (42,39), мы найдем, что при одинаковых членах суммы вида

$$w_{k_1}[w_{k_2}\Phi_\mu]_- w_{k_3} \frac{e^{i(k_1+k_2+k_3)}}{i^3}$$

будут в обеих частях равенства одинаковые множители, поскольку

$$\frac{1}{k_1 k_3 (k_1+k_2+k_3)} = \frac{1}{k_1(k_1+k_3)(k_1+k_2+k_3)} + \frac{1}{k_3(k_1+k_3)(k_1+k_2+k_3)};$$

тогда выражение (42,40) приведем к форме

$$\overline{\Phi}_\mu = S^{-1}\Phi_\mu S = \Phi_\mu + [v\Phi_\mu]_- + [v'[v\Phi_\mu]_-]_- + \\ + [v''[v'[v\Phi_\mu]_-]_-]_- + \ldots \qquad (42,42)$$

При выводе соотношения (42,42) мы нигде не использовали правила перестановок как между функциями v, так и между v и Φ_μ. Поэтому оно должно иметь место при любых значениях v и Φ_μ. В частности, полагая $\Phi_\mu = 1$, мы найдем тождественное соотношение

$$S^{-1}S = SS^{-1} = 1, \qquad (42,42а)$$

поскольку единица является обыкновенным числом и поэтому должна коммутировать с любыми функциями v ($[v, 1]_- = 0$).

Воспользуемся теперь правилами перестановок функции v и Φ_μ и найдем функцию $\overline{\Phi}_\mu$, представляющую собою решение уравнения Даламбера. С помощью (42,25) и (42,26) мы получим:

$$[v\Phi_\mu]_- = \frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{t} dt' \int d^3x' j_{\mu'}(\boldsymbol{r}', t')[\Phi_{\mu'}(\boldsymbol{r}', t'), \quad \Phi_\mu(\boldsymbol{r}, t)]_-,$$

откуда, принимая во внимание перестановочные соотношения (42,21), найдем, что выражение $[v\Phi_\mu]_-$ является c-числом:

$$[v\Phi_\mu]_- = -4\pi c \int d^3x' \int_{-\infty}^{t} j_\mu(\boldsymbol{r}', t')\Delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}', t-t')\,dt'. \qquad (42,43)$$

Поэтому оно будет коммутировать с функцией v', т. е. в ряде (42,42) все члены, начиная с третьего, обращаются в нуль:

$$[v'[v\Phi_\mu]_-]_- = [v''[v'[v\Phi_\mu]_-]_-]_- = \ldots = 0. \qquad (42,44)$$

Таким образом, решение уравнения Даламбера с помощью нового метода в данном случае дает старый результат (42,18), соответствующий запаздывающим потенциалам. Для опережающих потен-

циалов при определении функции v [см. (42,25)] нижний предел необходимо положить равным $+\infty$ (а не $-\infty$, как это было сделано). Тогда в (42,43) интегрирование по t необходимо также производить от $+\infty$.

в) Гриниан уравнения Дирака. Как известно, уравнения Дирака при наличии правой части имеют вид:

$$\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}-\mathrm{H}\right)\overline{\psi}_\rho=\eta_\rho, \tag{42,45}$$

$$\overline{\psi}_\rho^+\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}-\mathrm{H}\right)=\eta_\rho^+, \tag{42,46}$$

где значок $\rho=1, 2, 3, 4$ учитывает, что функция $\overline{\psi}_\rho$ имеет четыре значения, характеризующие данное квантовое состояние.

В гамильтониан H могут быть включены вторично не квантованные электромагнитные поля ($\boldsymbol{A}$, Φ), не зависящие от времени, например, кулоновское взаимодействие, постоянное магнитное поле и т. д., то есть в общем случае для электронов ($e^-=-e$):

$$\mathrm{H}=c\boldsymbol{\alpha}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)-e\Phi+\rho_3 m_0c^2, \tag{42,47}$$

причем матрицы $\boldsymbol{\alpha}$ и ρ_3 действуют на значки ρ [см. § 23, п. к)].

Действие операторов $-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}$ и $\frac{\hbar}{i}\nabla$ на функции $\overline{\psi}_\rho^+$, стоящие слева, мы определим, как всегда, следующим образом:

$$\overline{\psi}_\rho^+\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}\right)\to\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\overline{\psi}_\rho^+}{\partial t}.$$

Допустим, что нам известны решения уравнения Дирака без правой части $(\eta_\mu=\eta_\mu^+=0)$. Эти решения мы запишем в виде

$$\left.\begin{aligned}\psi_\rho&=\sum_n C_n\psi_{\rho n}e^{-icK_nt},\\ \psi_\rho^+&=\sum_n C_n^+\psi_{\rho n}^+e^{icK_nt},\end{aligned}\right\} \tag{42,48}$$

где $c\hbar K_n$ представляет собой энергию, а $\psi_{\rho n}$ — решение уравнения Дирака для заданной энергии, т. е.

$$(K_nc\hbar-\mathrm{H})\psi_{\rho n}=0.$$

Суммирование по n следует производить как по положительным, так и по отрицательным значениям энергии и по различным спиновым состояниям.

Заметим, что каждому квантовому состоянию (т. е. состоянию с определенным значением энергии и спина) соответствуют четыре компоненты волновой функции ($\rho=1, 2, 3, 4$), обладающие одним и тем же значением коэффициента C_n.

Используя выражение для трехмерной δ-функции:

$$\sum_n \psi^{+}_{\rho' n}(\boldsymbol{r})\,\psi_{\rho n}(\boldsymbol{r}') = \delta_{\rho\rho'}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'), \tag{42,49}$$

мы можем решения уравнений (42,45) и (42,46) с правой частью представить в виде

$$\overline{\psi}_{\rho} = \psi_{\rho} - \frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{t} dt' \int d^3x' \sum_n \psi^{+}_{\rho' n}(\boldsymbol{r}')\,\psi_{\rho n}(\boldsymbol{r})\, e^{-icK_n(t-t')}\eta_{\rho'}(\boldsymbol{r}', t'), \tag{42,50}$$

$$\overline{\psi}^{+}_{\rho} = \psi^{+}_{\rho} + \frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{t} dt' \int d^3x' \sum_n \psi^{+}_{\rho n}(\boldsymbol{r})\,\psi_{\rho' n}(\boldsymbol{r}')\, e^{icK_n(t-t')}\eta^{+}_{\rho'}(\boldsymbol{r}', t'). \tag{42,51}$$

В самом деле, подставляя (42,50) в уравнение (42,45) и принимая во внимание, что

$$\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t} - \mathrm{H}\right)\psi_{\rho} = \left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t} - \mathrm{H}\right)\psi_{\rho n}(\boldsymbol{r})\, e^{-icK_n t} = 0,$$

мы найдем, что

$$\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t} - \mathrm{H}\right)\overline{\psi}_{\rho} = \int d^3x' \sum_n \psi^{+}_{\rho' n}(\boldsymbol{r}')\,\psi_{\rho n}(\boldsymbol{r})\,\eta_{\rho'}(\boldsymbol{r}', t).$$

Учитывая еще (42,49), мы видим, что $\overline{\psi}_{\rho}$ удовлетворяет исходному уравнению (42,45). Аналогичным путем можно легко показать, что функция (42,51) будет удовлетворять уравнению (42,46).

Таким образом, гринианы как основного, так и комплексно-сопряженного уравнений Дирака принимают вид:

$$\left.\begin{aligned}
&G_{\rho\rho'}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}', t-t') = \\
&\qquad = \frac{i}{2\hbar}\left(\frac{t-t'}{|t-t'|} \pm 1\right)\sum_n \psi^{+}_{\rho' n}(\boldsymbol{r}')\,\psi_{\rho n}(\boldsymbol{r})\, e^{-icK_n(t-t')}, \\
&G^{+}_{\rho\rho'}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}', t-t') = \\
&\qquad = -\frac{i}{2\hbar}\left(\frac{t-t'}{|t-t'|} \pm 1\right)\sum_n \psi^{+}_{\rho n}(\boldsymbol{r})\,\psi_{\rho' n}(\boldsymbol{r}')\, e^{icK_n(t-t')},
\end{aligned}\right\} \tag{42,52}$$

причем знак «—» соответствует опережающему решению, а знак «+» — запаздывающему.

Найдем решение уравнений (42,45) и (42,46) новым способом, связанным с методом вторичного квантования. В этом способе функции ψ^{+}_{ρ} и ψ_{ρ} следует рассматривать как операторы, подчиняющиеся фермиевским перестановочным соотношениям:

$$\left.\begin{aligned}
&[\psi^{+}_{\rho'}(\boldsymbol{r}', t),\ \psi^{+}_{\rho}(\boldsymbol{r}, t)]_{+} = [\psi_{\rho'}(\boldsymbol{r}', t),\ \psi_{\rho}(\boldsymbol{r}, t)]_{+} = 0, \\
&[\psi^{+}_{\rho'}(\boldsymbol{r}', t),\ \psi_{\rho}(\boldsymbol{r}, t)]_{+} = \delta_{\rho'\rho}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}').
\end{aligned}\right\} \tag{42,53}$$

Подставляя сюда решение (42,48), мы найдем следующие перестановочные соотношения для коэффициентов C_n:

$$\left.\begin{array}{c} C_nC_{n'}+C_{n'}C_n=0, \quad C_n^+C_{n'}^+ + C_{n'}^+C_n^+=0, \\ C_n^+C_{n'}+C_{n'}C_n^+=\delta_{nn'}. \end{array}\right\} \qquad (42,54)$$

В полной аналогии с решением уравнений Даламбера (42,8) решение уравнений с правой частью (42,45) и (42,46) должно иметь вид (42,24):

$$\overline{\psi}_\rho = S^{-1}\psi_\rho S, \quad \overline{\psi}_\rho^+ = S^{-1}\psi_\rho^+ S, \qquad (42,55)$$

где

$$S^{-1}(t)=e^v, \quad S(t)=e^{-v}, \quad v=\int\limits_{-\infty}^{t} w(t')\,dt'$$

и

$$w(t)=\frac{i}{\hbar}\int d^3x'\left[\psi_{\rho'}^+(\boldsymbol{r}', t)\,\eta_{\rho'}(\boldsymbol{r}', t)+\right.$$
$$\left.+\eta_{\rho'}^+(\boldsymbol{r}', t)\,\psi_{\rho'}(\boldsymbol{r}', t)\right]=-\frac{i}{\hbar}L(t). \qquad (42,56)$$

Функция $L(t)$ является лагранжианом взаимодействия дираковских волновых функций с внешними источниками [см. также (42,27)].

Поскольку в данном случае мы имеем дело с уравнением, волновые функции которого подчиняются фермиевским перестановочным соотношениям, следует считать также, что функции η_ρ и η_ρ^+ антикоммутируют с волновыми функциями $\overline{\psi}_\rho$ и $\overline{\psi}_\rho^+$, а также сами с собой.

Для того чтобы показать, что выражение (42,55) является решением уравнения Дирака с правой частью, подставим его в уравнение (42,45). Тогда будем иметь:

$$\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}-\mathrm{H}\right)\overline{\psi}_\rho = S^{-1}\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}-\mathrm{H}\right)\psi_\rho S-\frac{\hbar}{i}S^{-1}(w\psi_\rho-\psi_\rho w)\,S.$$

Принимая во внимание, что ψ_ρ является решением однородного уравнения

$$\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}-\mathrm{H}\right)\psi_\rho=0$$

и что η антикоммутирует с ψ_ρ, получим:

$$w\psi_\rho-\psi_\rho w=-\frac{i}{\hbar}\int d^3x'\left[\psi_{\rho'}^+(\boldsymbol{r}', t)\,\psi_\rho(\boldsymbol{r}, t)\right]_+\eta_{\rho'}(\boldsymbol{r}', t).$$

Отсюда, учитывая перестановочные соотношения (42,53) и коммутативность функции η_ρ с оператором S^{-1}, найдем, что функция $\overline{\psi}_\rho$, определяемая (42,55), будет удовлетворять (42,45):

$$\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}-\mathrm{H}\right)\overline{\psi}_\rho=\eta_\rho.$$

Аналогичным путем это можно доказать и для комплексно-сопряженного уравнения.

Определим теперь новым способом гриниан уравнения Дирака. Для этого, воспользовавшись преобразованием (42,42), представим решение (42,55) в виде

$$\overline{\psi}_\rho = \psi_\rho + [v\psi_\rho]_- + [v'[v\psi_\rho]_-]_- + \ldots \tag{42,57}$$

Согласно (42,56) находим:

$$[v\psi_\rho]_- = -\frac{i}{\hbar}\int\limits_{-\infty}^{t} dt' \int d^3x' \, [\psi^+_{\rho'}(\boldsymbol{r}', t'), \psi_\rho(\boldsymbol{r}, t)]_+ \eta_{\rho'}(\boldsymbol{r}', t').$$

Подставляя сюда решения (42,48) и принимая во внимание четырехмерные перестановочные соотношения (42,54), получим:

$$[\psi^+_{\rho'}(\boldsymbol{r}', t')\psi_\rho(\boldsymbol{r}, t)]_+ = \sum_n \tilde{\psi}^+_{\rho' n}(\boldsymbol{r}')\psi_{\rho n}(\boldsymbol{r})\, e^{-icK_n(t-t')}. \tag{42,58}$$

Поскольку эта величина не является оператором, члены ряда (42,57), начиная с $[v'[v\psi_\rho]_-]_-$, обращаются в нуль, и поэтому для $\overline{\psi}_\rho$ находим выражение, совпадающее с (42,50):

$$\overline{\psi}_\rho = \psi_\rho - \frac{i}{\hbar}\int\limits_{-\infty}^{t} dt' \int d^3x' \eta_{\rho'}(\boldsymbol{r}', t') \sum_n \psi^+_{\rho' n}(\boldsymbol{r}')\psi_{\rho n}(\boldsymbol{r})\, e^{-icK_n(t-t')},$$

т. е. в применении лишь к одному вторично квантованному полю новый метод не дает новых результатов.

г) Преобразование зарядового сопряжения. До сих пор мы рассматривали уравнения Дирака, в которых движение электронов сопоставлялось с движением частицы положительной энергии, а позитронов — с отрицательной (т. е. с движением «дырки»).

В этом случае уравнение Дирака могло быть представлено в виде

$$\left\{-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t} + e\Phi - c\left(\boldsymbol{\alpha}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\right) - \rho_3 m_0 c^2\right\}\psi = 0, \tag{42,59}$$

$$\left\{-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t} - e\Phi - c\left(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\right) + \rho_3^{\mathrm{T}} m_0 c^2\right\}\psi^{+\mathrm{T}} = 0, \tag{42,60}$$

где $\psi^{+\mathrm{T}}$ является транспонированной матрицей, у которой строки заменены столбцами и наоборот, т. е., если

$$\psi^+ = (\psi_1^+\psi_2^+\psi_3^+\psi_4^+), \quad \text{то} \quad \psi^{+\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \psi_1^+ \\ \psi_2^+ \\ \psi_3^+ \\ \psi_4^+ \end{pmatrix}. \tag{42,61}$$

Легко показать, что

$$\alpha_1^{\mathrm{T}}=\alpha_1, \quad \alpha_2^{\mathrm{T}}=-\alpha_2, \quad \alpha_3^{\mathrm{T}}=\alpha_3, \quad \rho_3^{\mathrm{T}}=\rho_3. \tag{42,61a}$$

Решения уравнений (42,59) и (42,60) могут быть представлены в виде (42,48), причем движение электрона должно соответствовать положительным энергиям ($K_n>0$), а позитрона — отрицательным ($K_n<0$).

Напишем теперь волновое уравнение, в котором основной частицей является позитрон (точнее, положительные энергии будут соответствовать позитронам, а отрицательные — электронам). Обозначая соответствующие волновые функции $\widetilde{\psi}$, мы будем иметь вместо (42,59) и (42,60):

$$\left\{-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}-e\Phi-c\left(\boldsymbol{\alpha}\left(\frac{h}{i}\nabla-\frac{e}{c}A\right)\right)-\rho_3 m_0c^2\right\}\widetilde{\psi}=0, \tag{42,62}$$

$$\left\{-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}+e\Phi-c\left(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\left(\frac{h}{i}\nabla+\frac{e}{c}A\right)\right)+\rho_3^{\mathrm{T}} m_0c^2\right\}\widetilde{\psi}^{+\mathrm{T}}=0. \tag{42,63}$$

Уравнения (42,59) и (42,60) перейдут соответственно в уравнения (42,63) и (42,62), если мы положим:

$$\widetilde{\psi}=C\psi^{+\mathrm{T}}, \tag{42,64}$$

$$\widetilde{\psi}^{+}=\psi^{\mathrm{T}}C, \tag{42,65}$$

где

$$C=-i\alpha_2\rho_3=-i\begin{pmatrix}0&0&0&-i\\0&0&i&0\\0&-i&0&0\\i&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&-1&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}. \tag{42,66}$$

Отсюда следует

$$\left.\begin{array}{ll}\psi_1^{+}\to\widetilde{\psi}_4, & \psi_3^{+}\to-\widetilde{\psi}_2,\\ \psi_2^{+}\to-\widetilde{\psi}_3, & \psi_4^{+}\to\widetilde{\psi}_1.\end{array}\right\} \tag{42,67}$$

Это легко показать, если воспользоваться соотношениями:

$$C\alpha_\mu=\alpha_\mu^{\mathrm{T}}C, \quad C\alpha_\mu^{\mathrm{T}}=\alpha_\mu C, \quad C\rho_3=-\rho_3^{\mathrm{T}}C, \tag{42,68}$$

которые автоматически следуют из (42,61а) и (42,66).

Преобразования (42,64) и (42,65), обеспечивающие переход от уравнений (42,59), (42,60) к уравнениям (42,63), (42,62), называются преобразованиями зарядового сопряжения.

При преобразовании зарядового сопряжения не только заряд e заменяется на $-e$, но и совершается переход к комплексно-сопряженной функции, поэтому величине

$$\psi' = \psi + C\tilde{\psi}^{+\mathrm{T}},$$

удовлетворяющей уравнению Дирака (42,59), нельзя уже придавать смысл волновой функции, поскольку знак энергии у основной и комплексно-сопряженной функции имеет различную интерпретацию.

д) Симметричная теория электрон-позитронного вакуума. В симметричной теории электрон-позитронного вакуума четырехмерная плотность тока определяется выражением

$$j_\mu = -\frac{e}{2}\left(\psi_\rho^+ \alpha_\mu \psi_\rho - \tilde{\psi}_\rho^+ \alpha_\mu \tilde{\psi}_\rho\right), \tag{42,69}$$

в котором учтено, что заряд электрона отрицателен, а позитрона — положителен. Подставляя сюда решения (42,48) и принимая во внимание, что

$$\tilde{\psi}_\rho^+ = \psi_\rho^{\mathrm{T}} C,$$
$$\tilde{\psi}_\rho = C\psi_\rho^{+\mathrm{T}},$$

будем иметь:

$$j_\mu = -\frac{e}{2}\sum_{n_1 n_2}\left(C_{n_1}^+ C_{n_2}\psi_{\rho n_1}^+ \alpha_\mu \psi_{\rho n_2} - C_{n_2} C_{n_1}^+ \psi_{\rho n_2}^{\mathrm{T}} \alpha_\mu^{\mathrm{T}} \psi_{\rho n_1}^{+\mathrm{T}}\right) e^{-ict\,(K_{n_2} - K_{n_1})}.$$

При выводе последнего соотношения мы учли, что

$$C\alpha_\mu C = C^2 \alpha_\mu^{\mathrm{T}} = \alpha_\mu^{\mathrm{T}}.$$

Принимая во внимание, что $\psi_{\rho n_2}^{\mathrm{T}} \alpha_\mu^{\mathrm{T}} \psi_{\rho n_1}^{+\mathrm{T}}$ является c-числом, и поэтому

$$\psi_{\rho n_2}^{\mathrm{T}} \alpha_\mu^{\mathrm{T}} \psi_{\rho n_1}^{+\mathrm{T}} = \psi_{\rho n_1}^+ \alpha_\mu \psi_{\rho n_2},$$

мы получаем:

$$j_\mu = -e\sum_{n_1 n_2} C_{n_1 n_2} \psi_{\rho n_1}^+ \alpha_\mu \psi_{\rho n_2} e^{-ict\,(K_{n_2} - K_{n_1})}, \tag{42,70}$$

где

$$C_{n_1 n_2} = \frac{1}{2}\left(C_{n_1}^+ C_{n_2} - C_{n_2} C_{n_1}^+\right). \tag{42,71}$$

Таким образом, переход от несимметричной теории Дирака (электрон — частица, позитрон — дырка) к симметричной заключается в том, что произведение коэффициентов следует заменить полуразностью произведений, т. е.

$$C_{n_1}^+ C_{n_2} \to \frac{1}{2}\left(C_{n_1}^+ C_{n_2} - C_{n_2} C_{n_1}^+\right). \tag{42,72}$$

Разумеется, эта замена имеет смысл только в случае вторично квантованных полей, когда между коэффициентами $C_{n_1}^+$ и C_{n_2} имеют

место перестановочные соотношения (42,54). В этом случае

$$\frac{1}{2}\left(C^+_{n_1}C_{n_2}-C_{n_2}C^+_{n_1}\right)=C^+_{n_1}C_{n_2}-\frac{1}{2}\delta_{n_1n_2}. \qquad (42,73)$$

Заметим, что в нашей окончательной формулировке симметричной теории (в функциях ψ, а не $\tilde{\psi}$) электроны и позитроны должны быть сопоставлены с частицами соответственно с положительной и отрицательной энергией. Однако в данном случае несимметрия носит лишь кажущийся характер, поскольку, оставаясь в рамках заданного формализма, мы можем автоматически перейти к функции $\tilde{\psi}$, где с позитронами следует сопоставить положительные энергии.

е) Гринианы взаимодействующих полей. Рассмотрим случай взаимодействия вторично квантованного электрон-позитронного поля с электромагнитным полем. Тогда при наличии внешних источников вместо линейного уравнения Даламбера (42,8) и линейных уравнений Дирака (42,45) и (42,46) мы будем иметь следующую систему нелинейных уравнений:

$$\Box\overline{\Phi}_\mu-4\pi e\overline{\psi}^+_\rho\alpha_\mu\overline{\psi}_\rho=4\pi j_\mu, \qquad (42,74)$$

$$\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}-\mathrm{H}\right)\overline{\psi}_\rho-e\alpha_\mu\overline{\Phi}_\mu\overline{\psi}_\rho=\eta_\rho, \qquad (42,75)$$

$$\overline{\psi}^+_\rho\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}-\mathrm{H}\right)-e\overline{\psi}^+_\rho\alpha_\mu\overline{\Phi}_\mu=\eta^+_\rho. \qquad (42,76)$$

В дальнейшем мы будем пользоваться симметричной теорией, и поэтому для плотности тока, т. е. для квадратичных комбинаций волновых функций, будем использовать выражение (42,70). Допустим, что решения линейных однородных уравнений F ($F=\Phi_\mu$, ψ_ρ и ψ_ρ^+) нам известны. Они определяются соответственно выражениями (42,19) и (42,48), для которых имеются перестановочные соотношения (42,20) и (42,54). Задача будет заключаться в том, чтобы выразить функцию $\overline{F}$ ($\overline{F}=\overline{\Phi}_\mu$, $\overline{\psi}_\rho$ и $\overline{\psi}^+_\rho$) через функцию F.

Благодаря работам Швингера и Дайсона[1]) удалось показать, что эта задача может быть точно решена. Искомые функции $\overline{F}$ будут связаны с заданными функциями F при помощи одного и того же соотношения:

$$\overline{F}=S^{-1}(t)\,FS(t), \qquad (42,77)$$

---

[1]) J. Schwinger, Phys. Rev. 74, 416, 1439 (1948); F. Dyson, Phys. Rev. 75, 486 (1949). Большинство работ Швингера и Дайсона переведено на русский язык и издано в сборниках «Сдвиг уровней атомных электронов», ИЛ, 1950; «Новейшее развитие квантовой электродинамики», ИЛ, 1954; «Квантовая теория поля» (Проблемы современной физики № 3, ИЛ, 1955); см. также Ю. Швингер, Теория квантованных полей, ИЛ, 1956. При изложении материала мы используем также методы, рассмотренные в нашей работе [А. А. Соколов и В. Н. Цытович, ЖЭТФ 30, 136 (1956)] и в работе А. Н. Матвеева [Вестн. МГУ, № 10, 99 (1953)].

где, как обычно,

$$S^{-1}(t)=e^{v}, \quad S(t)=e^{-v}, \quad v=\int_{-\infty}^{t} w(t')\,dt'.$$

Для функции же $w(t)$ будем иметь следующее выражение, представляющее собою обобщение формул (42,26) и (42,56):

$$w(t)=\frac{i}{\hbar}\int [e\psi_{\rho}^{+}(\boldsymbol{r}', t)\,\alpha_{\mu}\psi_{\rho}(\boldsymbol{r}', t)\,\Phi_{\mu}(\boldsymbol{r}', t)+j_{\mu}(\boldsymbol{r}', t)\,\Phi_{\mu}(\boldsymbol{r}', t)+ \\ +\psi_{\rho}^{+}(\boldsymbol{r}', t)\,\eta_{\rho}(\boldsymbol{r}', t)+\eta_{\rho}^{+}(\boldsymbol{r}', t)\,\psi_{\rho}(\boldsymbol{r}', t)]\,d^{3}x'. \qquad (42,78)$$

Это выражение может быть получено, если учесть, что функция w связана с лагранжианом взаимодействия с помощью формулы (42,27):

$$w(t)=-\frac{i}{\hbar}L(t),$$

а полный лагранжиан взаимодействия складывается из лагранжиана взаимодействия электромагнитного и электрон-позитронного полей и лагранжиана взаимодействия этих полей со своими внешними источниками.

Так же как и при решении аналогичной задачи для свободных частиц, мы должны предположить, что величины η_{ρ} и η_{ρ}^{+} антикоммутируют с функциями электрон-позитронного поля. Кроме того, они должны коммутировать с функциями электромагнитного поля.

Для того чтобы показать правильность нашего решения, мы должны подставить (42,77) в (42,74), (42,75) и (42,76). Воспользовавшись при этом соотношением

$$\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}-\mathrm{H}\right)\overline{\psi}_{\rho}=S^{-1}\left[\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}-\mathrm{H}\right)\psi_{\rho}\right]S-\frac{\hbar}{i}S^{-1}(w\psi_{\rho}-\psi_{\rho}w)\,S$$

и принимая во внимание, что $\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}-\mathrm{H}\right)\psi_{\rho}=0$ и

$$w\psi_{\rho}-\psi_{\rho}w=-\frac{i}{\hbar}(e\alpha_{\mu}\Phi_{\mu}\psi_{\rho}+\eta_{\rho}),$$

найдем:

$$\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}-\mathrm{H}\right)\overline{\psi}_{\rho}-e\alpha_{\mu}S^{-1}\Phi_{\mu}SS^{-1}\psi_{\rho}S=S^{-1}\eta_{\rho}S.$$

Таким образом, если внешний источник η_{ρ} коммутирует с S^{-1}, мы получаем уравнение (42,75). Аналогичным способом мы можем также доказать справедливость (42,76) и (42,74), используя при этом формулы (42,31)—(42,34).

Интересно отметить, что трехмерные перестановочные соотношения, найденные нами для свободных полей [см. (42,22) и (42,53)],

сохраняют свой вид и для взаимодействующих полей. Например, с помощью (42,77) мы находим:

$$\bar{\psi}^{+}_{\rho'}(\boldsymbol{r}', t)\bar{\psi}_{\rho}(\boldsymbol{r}, t)+\bar{\psi}_{\rho}(\boldsymbol{r}, t)\bar{\psi}^{+}_{\rho'}(\boldsymbol{r}', t)=$$
$$=S^{-1}(t)\,[\psi^{+}_{\rho'}(\boldsymbol{r}', t), \psi_{\rho}(\boldsymbol{r}, (t)]_{+}\,S(t)=\delta_{\rho\rho'}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}').$$

При этом мы учли, что величина $\delta_{\rho\rho'}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ является обыкновенной (не операторной) функцией, коммутирующей с оператором $S^{-1}(t)$. Аналогичным путем можно доказать справедливость перестановочных соотношений (42,22) для связанных электромагнитных полей.

Четырехмерные же перестановочные соотношения ($t \neq t'$), которые имеют место для представления взаимодействия, для гейзенберговского представления уже не будут иметь места, поскольку перестановочный оператор S для разных времен не будет удовлетворять соотношению (42,42а):

$$S^{-1}(t)\,S(t')=e^{\int_{t'}^{t} w(t'')\,dt''} \neq 1.$$

Поэтому четырехмерные перестановочные соотношения для функций $\bar{\psi}$ принимают довольно сложную форму, которой мы пользоваться не будем. Согласно (42,42) решение для функции $\bar{F}$ (42,77) может быть представлено в виде

$$\bar{F}=F+[vF]_{-}+[v'[vF]_{-}]_{-}+\ldots \qquad (42,79)$$

Подставляя сюда вместо F одну из составляющих вектор-потенциала ($F=\Phi_{\mu}$), мы найдем обобщение решений уравнения Даламбера на наличие электрон-позитронного вакуума. В этом случае

$$[v\Phi_{\mu}]_{-}=-4\pi c\int d^{3}x'\int_{-\infty}^{t}[e\psi^{+}_{\rho}(\boldsymbol{r}', t')\,\alpha_{\mu}\psi_{\rho}(\boldsymbol{r}', t')+j_{\mu}(\boldsymbol{r}', t')]\times$$
$$\times\Delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}', t-t')\,dt'. \qquad (42,80)$$

В отличие от соответствующего выражения, найденного нами при отсутствии электрон-позитронного вакуума [см. (42,43)], выражение (42,80) является уже оператором, благодаря чему следующие члены разложения $[v'[vF]_{-}]_{-}$ и т. д., не обращаются в нуль. Поэтому решение вида (42,18),

$$\bar{\Phi}_{\mu}\approx\Phi_{\mu}+[v\Phi_{\mu}]_{-},$$

является лишь приближенным. При более точном рассмотрении следует учитывать еще более высокие члены разложения, обязанные наличию электрон-позитронного вакуума. Такой же вывод можно сделать и при интегрировании уравнения Дирака.

Определим теперь связь вариации потенциалов с вариацией внешнего источника δj_μ. Из (42,77) следует:

$$\delta\overline{\Phi}_\mu = S^{-1}\left(\frac{\delta v}{\delta j_\mu}\Phi_\mu - \Phi_\mu\frac{\delta v}{\delta j_\mu}\right)\delta j_\mu S;$$

Учитывая, далее, (42,78), находим:

$$\frac{\delta v}{\delta j_\mu} = \frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{t} dt' \int \Phi_\mu(r', t')\, d^3x'.$$

Отсюда, принимая во внимание перестановочные соотношения (42,21), для вариации $\delta\overline{\Phi}_\mu$ получаем выражение:

$$\delta\overline{\Phi}_\mu(r, t) = -4\pi c \int_{-\infty}^{t} dt' \int \delta j(r', t')\, \Delta(r - r', t - t')\, d^3x', \qquad (42,81)$$

совпадающее с решением уравнения Даламбера для свободных полей.

Точно так же вариации волновых функций уравнений Дирака будут связаны с вариациями соответствующих источников с помощью решений (42,50) и (42,51), найденных для $\overline{\psi}_\rho$ и $\overline{\psi}_\rho^+$ по линейной теории.

ж) Условие Лоренца. Как известно, в классической теории потенциалы следует подчинять дополнительному условию Лоренца [более подробно см. § 12, п. б)]:

$$\frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x_\mu} = 0, \qquad (42,82)$$

которое не следует из уравнений Максвелла. С помощью последних и условия Лоренца можно показать, что компоненты вектор-потенциала свободного электромагнитного поля будут удовлетворять уравнению Даламбера

$$\Box\, \Phi_\mu = \nabla^2\Phi_\mu - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi_\mu}{\partial t^2} = 0.$$

Следует подчеркнуть, что для выполнения условия (42,82) в классическом случае для любого t необходимо и достаточно потребовать, чтобы в некоторый начальный момент времени ($t = t_0$) величина $\chi = \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x_\mu}$ и ее производная по времени $\frac{\partial \chi}{\partial t}$ обращались в нуль, а Φ_μ удовлетворяла последнему уравнению:

$$\chi_0 = \chi_{t=t_0} = 0, \qquad \left(\frac{\partial \chi}{\partial t}\right)_{t=t_0} = 0. \qquad (42,83)$$

В самом деле, разлагая χ по степеням $t - t_0$:

$$\chi = \chi_0 + (t - t_0)\left(\frac{\partial \chi}{\partial t}\right)_{t=t_0} + \frac{(t-t_0)^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}\right)_{t=t_0} + \ldots, \qquad (42,84)$$

видим, что первые два члена в этом разложении согласно заданному начальному условию обращаются в нуль.

Далее, из того, что функция χ, так же как и потенциалы, должна удовлетворять уравнению Даламбера, будем иметь:

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\chi(t)}{\partial t^2}\right)_{t=t_0}=(\nabla^2\chi)_{t=t_0}=0. \qquad (42,85)$$

Аналогично легко показать, что в нуль обратятся и все последующие члены разложения (42,84).

Таким образом, дополнительное условие Лоренца (42,82) в классической теории является следствием начальных условий (42,83).

При решении же соответствующей задачи в теории вторично квантованного электромагнитного поля, когда движение электронов описывается обыкновенным (не вторично квантованным) волновым уравнением Дирака (см. § 25), на потенциалы накладывается дополнительное условие (25,5), менее сильное, чем условие Лоренца.

Точно так же в теории электрон-позитронного вакуума мы не можем наложить на потенциалы классическое условие Лоренца хотя бы потому, что оно будет противоречить перестановочным соотношениям (42,21), представляющим основу всей теории вторичного квантования смешанного поля (электромагнитного плюс электрон-позитронного).

Попробуем в теории электрон-позитронного вакуума, так же как и в § 25, сформулировать условие, менее сильное, чем условие Лоренца, которое бы не противоречило перестановочным соотношениям (42,21).

При рассмотрении случая, когда внешние источники отсутствуют ($j_\mu=\eta_\rho=\eta_\rho^+=0$), будем иметь:

$$\frac{\partial\overline{\Phi}_\mu}{\partial x_\mu}=S^{-1}\frac{\partial\Phi_\mu}{\partial x_\mu}S+\frac{1}{c}S^{-1}(w\Phi_4-\Phi_4 w)S, \qquad (42,86)$$

где согласно (42,78)

$$w(t)=\frac{ie}{\hbar}\int\psi_\rho^+(\boldsymbol{r}',t)\,\alpha_\mu\psi_\rho(\boldsymbol{r}',t)\,\Phi_\mu(\boldsymbol{r}',t)\,d^3x'. \qquad (42,87)$$

Отсюда, принимая во внимание трехмерные перестановочные соотношения (42,33), а также выражение (42,42), находим:

$$\frac{\partial\overline{\Phi}_\mu}{\partial x_\mu}=S^{-1}\frac{\partial\Phi_\mu}{\partial x_\mu}S=\frac{\partial\Phi_\mu}{\partial x_\mu}+\left[v\frac{\partial\Phi_\mu}{\partial x_\mu}\right]_-+\left[v'\left[v\frac{\partial\Phi_\mu}{\partial x_\mu}\right]_-\right]_-+\ldots, \qquad (42,88)$$

где

$$v(t)=\int\limits_{-\infty}^{t}w(t')\,dt'. \qquad (42,89)$$

Для развития дальнейшей теории весьма существенно обращение в нуль коммутатора $\left[v, \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x_\mu}\right]_-$. В самом деле, учитывая четырехмерные перестановочные соотношения (42,21), а также (42,15), (42,87) и (42,89), мы находим следующее значение для этого коммутатора:

$$\left[v \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x_\mu}\right]_- = -4\pi e c \int_{-\infty}^{t} dt' \int d^3x' \psi_\rho^+ (\boldsymbol{r}', t') \alpha_\mu \psi_\rho (\boldsymbol{r}', t') \frac{\partial}{\partial x_\mu} \Delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}', t-t').$$

Принимая во внимание, что $\frac{\partial}{\partial x_\mu}\Delta = -\frac{\partial}{\partial x'_\mu}\Delta$ и $\Delta = 0$ при $t = t'$, а также уравнение непрерывности для свободных дираковских частиц:

$$\frac{\partial \psi_\rho^+ (\boldsymbol{r}', t') \alpha_\mu \psi_\rho (\boldsymbol{r}', t')}{\partial x'_\mu} = 0, \qquad (42,90)$$

мы докажем, что

$$\left[v, \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x_\mu}\right]_- = -4\pi e c \int_{-\infty}^{t} dt' \int d^3x' \Delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}', t-t') \times \\ \times \frac{\partial \psi_\rho^+ (\boldsymbol{r}', t') \alpha_\mu \psi_\rho (\boldsymbol{r}', t')}{\partial x'_\mu} = 0. \qquad (42,91)$$

В силу (42,91) более высокие члены разложения $\left[v' \left[v \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x_\mu}\right]_-\right]_-$ и т. д. в (42,88) также обращаются в нуль, и поэтому

$$\frac{\partial \overline{\Phi}_\mu}{\partial x_\mu} = \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x_\mu}. \qquad (42,92)$$

Последнее условие, если угодно, можно рассматривать как квантовое обобщение классической теоремы (42,84), поскольку в начальный момент времени ($t_0 = -\infty$) $\Phi_\mu = \overline{\Phi}_\mu$. Благодаря этому наша задача свелась к исследованию свободного поля.

Заметим, что уравнение (42,92) является операторным и имеет смысл в применении к функции числа частиц $f(N)$.

Рассматривая вторичное квантование свободного электромагнитного поля [§ 12, п. б)], мы показали, что условие Лоренца $\frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x_\mu} = 0$ не определяет однозначно компонент потенциалов Φ_μ. Калибровочную функцию можно выбрать таким образом, чтобы обратить в нуль ее скалярный потенциал. Поэтому для свободного поля вместо одного уравнения Лоренца мы имели два условия [см. (12,23)]:

$$\Phi = 0, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{\Phi} = 0. \qquad (42,93)$$

Эти два условия в той или иной форме проявляются также при исследовании взаимодействия вторично квантованного электромагнитного поля с другими полями (например, электронным). Так, исключая продольные составляющие электромагнитного поля из уравнений Дирака (см. § 25), мы для однозначности решения вынуждены были ввести два условия (25,26а) и (25,26б), представлявшие собою обобщение условий (12,23).

В § 16 мы показали, что компоненты вектор-потенциала Φ_μ разбиваются на две поперечные составляющие (N_1, N_{-1}):

$$a_s = q_s - \varkappa_s \frac{(\varkappa q)}{\varkappa^2},$$

которые с помощью соотношения (14,5) связаны с двумя компонентами q_1 и q_{-1}, характеризующими различные состояния поляризации, и на две продольные составляющие:

$$q_0 = \frac{(q\varkappa)}{\varkappa} \quad \text{и} \quad q.$$

Поэтому функция числа частиц для заданного импульса $\varkappa$ будет состоять из произведения четырех функций [1]):

$$f(N) = \delta_{N_1 N_1^0} \delta_{N_{-1} N_{-1}^0} \delta_{N_0 N_0^0} \delta_{N N^0}. \tag{42,94}$$

Для компонент поперечного и одного продольного поля (q_1, q_{-1} и q_0) перестановочные соотношения будут иметь вид

$$q_0 q_0^+ - q_0^+ q_0 = 1. \tag{42,95}$$

Поэтому действие этих операторов на соответствующую функцию числа частиц будет определяться равенствами (8,11) и (8,12):

$$\left.\begin{aligned} q_0^+ f(N_0) &= \sqrt{N_0}\, f(N_0 - 1), \\ q_0 f(N_0) &= \sqrt{N_0 + 1}\, f(N_0 + 1), \end{aligned}\right\} \tag{42,96}$$

т. е.

$$q_0 q_0^+ = 1 + N_0, \qquad q_0^+ q_0 = N_0.$$

Оператор q_0^+ является оператором появления, а q_0 — оператором поглощения частиц [см. (18,20) и (18,21)]. Если в начальный момент частицы отсутствуют, то действие оператора q_0 на соответствующую функцию числа частиц обращает ее в нуль.

В случае скалярного поля перестановочные соотношения для амплитуд будут иметь обратный знак относительно перестановочных соотношений (42,95) ($q_4 = i'q$, $q_4^+ = i'q^+$):

$$q^+ q - q q^+ = 1. \tag{42,97}$$

---

[1]) Напомним, что N^0 означает число частиц в начальном состоянии, т. е. до действия операторов поглощения или появления частиц.

Уравнение (42,97) имеет два решения. Одно из решений

$$\left.\begin{aligned} qf(N) &= \sqrt{N}\, f(N-1), \\ q^+ f(N) &= \sqrt{N+1}\, f(N+1) \end{aligned}\right\} \tag{42,98}$$

приводит к тому, что оператор q будет (в противоположность соответствующим операторам поперечного и продольного поля) оператором появления, а q^+ — оператором поглощения ($qq^+ = N$, $q^+q = 1 + N$).

В этом случае при отсутствии скалярных фотонов

$$q^+ f(N) = 0. \tag{42,99}$$

Другое решение

$$\left.\begin{aligned} q^+ f(N) &= -\sqrt{N}\, f(N-1), \\ qf(N) &= \sqrt{N+1}\, f(N+1) \end{aligned}\right\} \tag{42,99a}$$

хотя и сохраняет обычный смысл операторов q и q^+, однако приводит к индефинитной метрике, так как дает:

$$q^+ q = -N, \qquad qq^+ = -(N+1).$$

Остановимся более подробно на втором решении, представляющем для нас особый интерес. Для того чтобы избежать возможности появления отрицательного числа частиц, мы введем дополнительное условие, согласно которому в начальный момент скалярные фотоны (точнее, «псевдофотоны») должны отсутствовать. Тогда

$$qf(N) = q\delta_{N0} = 0. \tag{42,100}$$

Вместо (42,100) мы можем написать

$$f(N)\, q^+ = 0. \tag{42,101}$$

Сформулируем теперь условие Лоренца при наличии электрон-позитронного вакуума таким образом, чтобы оно не противоречило перестановочным соотношениям (42,21) для потенциалов.

Потребуем, чтобы среднее по электромагнитному вакууму значение $\frac{\partial \overline{\Phi}_\mu}{\partial x_\mu}$ было равно нулю:

$$f(N) \frac{\partial \overline{\Phi}_\mu}{\partial x_\mu} f(N) = 0. \tag{42,102}$$

Учитывая (42,92), последнее соотношение можно свести к условию, налагаемому на потенциалы в представлении взаимодействия:

$$f(N) \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x_\mu} f(N) = 0. \tag{42,103}$$

Подставляя вместо Φ_μ разложение (16,10) и принимая во внимание, что $f(N)$ не зависит от координат и времени, получим:

$$\left.\begin{aligned} f(N)(q_0^+ - q^+)f(N) = 0, \\ f(N)(q_0 - q)f(N) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{42,104}$$

Мы удовлетворим последним соотношениям, если, учитывая (42,100) и (42,101), положим

$$(q_0 - q)f(N) = 0, \tag{42,105}$$

то эквивалентно введению другого соотношения

$$f(N)(q_0^+ - q^+) = 0. \tag{42,106}$$

Эти соотношения могут быть записаны также в форме

$$\left(\frac{\partial\Phi_\mu^-}{\partial x_\mu}\right)f(N) = 0, \tag{42,107}$$

$$f(N)\left(\frac{\partial\Phi_\mu^+}{\partial x_\mu}\right) = 0, \tag{42,108}$$

которую мы и будем рассматривать как обобщение условий Лоренца на случай электрон-позитронного вакуума, где $\Phi_\mu^- + \Phi_\mu^+ = \Phi_\mu$, Φ_μ^- составлено из амплитуд q_μ, а Φ_μ^+ — из q^+. Отсюда, учитывая (42,100) и (42,101), находим:

$$q_0 f(N) = 0, \tag{42,109}$$

$$f(N)q_0^+ = 0, \tag{42,110}$$

т. е. не могут появляться не только скалярные, но также и продольные фотоны. Эти дополнительные условия представляют собою обобщение двух условий (12,23) на случай взаимодействия электромагнитного поля с электрон-позитронным вакуумом.

Таким образом, условие Лоренца при наличии электрон-позитронного вакуума исключает возможность появления как скалярных, так и продольных фотонов. Взяв же за основу наших исследований первое возможное решение уравнения (42,97) [см. (42,98)], мы не удовлетворим условию Лоренца (42,102) и (42,103), предполагая, что одновременно должно существовать неопределенное, но одинаковое число скалярных (q) и продольных (q_0) фотонов, поскольку в этом решении амплитуду q_0 надо рассматривать как оператор поглощения продольных фотонов, а амплитуду q — как оператор появления скалярных фотонов.

Заметим, что условие Лоренца не накладывает никаких требований на начальное число поперечных фотонов. Поэтому теория электрон-позитронного вакуума допускает существование любого числа поперечных фотонов. Если в начальный момент поперечные

фотоны отсутствуют ($q_l^+ q_l = 0$, $l = \pm 1$), и, кроме того, мы учитываем отсутствие продольных ($q_0^+ q_0 = 0$) и скалярных ($q^+ q = 0$) фотонов, то получаем следующие перестановочные соотношения для амплитуд электромагнитного поля

$$q_\mu^+ q_{\mu'} = 0, \qquad q_{\mu'} q_\mu^+ = \delta_{\mu\mu'}. \tag{42,111}$$

§ 43. Рассмотрение простейших эффектов

а) Общие замечания. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением случая, когда внешние источники отсутствуют. В этом случае функцию w, пропорциональную лагранжиану взаимодействия $\left(w = -\frac{i}{\hbar} L\right)$, можно, учитывая при этом соотношения (42,78), (42,48) и (42,72), представить в виде суммы отдельных матричных элементов:

$$w(t) = \sum_{n,\, n'} C_{nn'} w_{nn'}(t), \tag{43,1}$$

где

$$\left.\begin{aligned} w_{nn'}(t) &= \frac{ie}{\hbar} \int \psi_{\rho n}^+(\boldsymbol{r}') \alpha_\mu \Phi_\mu(\boldsymbol{r}', t) \psi_{\rho n'}(\boldsymbol{r}') e^{-ict(K_{n'} - K_n)} d^3x', \\ C_{nn'} &= \frac{1}{2}(C_n^+ C_{n'} - C_{n'} C_n^+). \end{aligned}\right\} \tag{43,2}$$

Точно так же для функции $v(t)$ (связанной с матрицей преобразования $S^{-1} = e^v$) можно написать выражение:

$$v(t) = \int_{-\infty}^{t} w(t')\, dt' = \sum_{n,\, n'} C_{nn'} v_{nn'}(t), \tag{43,3}$$

где матричный элемент

$$v_{nn'}(t) = \int_{-\infty}^{t} w_{nn'}(t')\, dt'. \tag{43,4}$$

В случае отсутствия в начальный момент фотонов согласно (42,111) имеем:

$$q_{\mu'}'^+ q_\mu = 0, \qquad q_{\mu''} q_{\mu'}'^+ = \delta_{\mu''\mu'} \delta_{\varkappa\varkappa'},$$

и поэтому в квадратичной комбинации потенциалов электромагнитных полей можно оставить только один член

$$\Phi_{\rho''}(\boldsymbol{r}'', t'') \Phi_{\rho'}(\boldsymbol{r}', t') =$$
$$= \frac{1}{L^3} \sum q_{\rho''} q_{\rho'}'^+ \frac{2\pi c\hbar}{\sqrt{\varkappa\varkappa'}} e^{-ic(\varkappa t'' - \varkappa' t') + i(\varkappa r'' - \varkappa' r')} =$$
$$= \frac{c\hbar}{4\pi^2} \delta_{\rho'\rho''} \int \frac{d^3\varkappa}{\varkappa} e^{-ic\varkappa(t'' - t') + i\varkappa(r'' - r')}. \tag{43,5}$$

Допустим, что в начальный момент отсутствовало взаимодействие между электронами и вторично квантованным электромагнитным полем. Тогда согласно (42,48) волновую функцию электрона можно представить в виде

$$\psi_\rho(\boldsymbol{r},\ t)=\sum_n C_n\psi_{\rho n}(\boldsymbol{r})\,e^{-icK_n t}, \tag{43,6}$$

причем коэффициенты C_n должны удовлетворять известным перестановочным соотношениям:

$$C_{n'}^+C_n+C_nC_{n'}^+=\delta_{nn'}. \tag{43,7}$$

Отсюда следует, что величина $N_n=C_n^+C_n$ характеризует число частиц в заданном состоянии и может принимать лишь два значения 0 и 1 (фермиевская статистика!).

Если известно, что частица находится в состоянии n, то мы можем положить все коэффициенты $C_{n'}$ $(n'\neq n)$, за исключением C_n, равными нулю. Для коэффициентов же C_n должно иметь место соотношение $C_n^+C_n=1$.

При учете же взаимодействия электронов со вторично квантованным электромагнитным полем вместо $\psi_\rho(\boldsymbol{r},\ t)$ мы будем иметь функцию

$$\overline{\psi}_\rho(\boldsymbol{r},\ t)=S^{-1}\psi_\rho(\boldsymbol{r},\ t)\,S=\sum_n \overline{C}_n(t)\,\psi_{\rho n}(\boldsymbol{r})\,e^{-icK_n t}, \tag{43,8}$$

где

$$\overline{C}_n(t)=S^{-1}(t)\,C_nS(t). \tag{43,9}$$

Коэффициенты $\overline{C}_n(t)$ вновь будут характеризовать вероятность пребывания электрона в состоянии n. Коэффициенты $\overline{C}_n(t)$ лишь в начальный момент времени, т. е. при $t=-\infty$, будут равны C_n. В самом деле, при $t=-\infty$ функция v обращается в нуль, а оператор преобразования S^{-1} — в единицу. Для других моментов времени t коэффициенты $\overline{C}_n$ будут функциями t. Это говорит о том, что в результате взаимодействия с электромагнитным полем появляется вероятность перехода электрона из одного квантового состояния (n) в другое (n').

Благодаря наличию взаимодействия мы будем в далеком будущем $(t\to\infty)$ иметь новое распределение вероятностей нахождения частицы в различных квантовых состояниях

$$\overline{C}_n(\infty)=S^{-1}(\infty)\,\overline{C}_n(-\infty)\,S(\infty), \tag{43,10}$$

где

$$\overline{C}_n(-\infty)=C_n.$$

Аналогичное соотношение будет иметь место также и для волновых функций:

$$\psi(\infty)=S^{-1}(\infty)\,\psi(-\infty)\,S(\infty). \tag{43,11}$$

Величина $S^{-1}(\infty)$ в этом случае будет представлять собою матрицу рассеяния Гейзенберга [1]).

Воспользовавшись разложением (42,42), мы можем значения коэффициентов $\overline{C}_n(t)$ представить в виде

$$\overline{C}_n(t) = C_n + C_n^{(1)} + C_n^{(2)} + C_n^{(3)} + C_n^{(4)} + \ldots, \tag{43,12}$$

где величины

$$C_n^{(1)} = [vC_n]_-, \tag{43,13а}$$

$$C_n^{(2)} = [v'[vC_n]_-]_- = [v'C_n^{(1)}]_-, \tag{43,13б}$$

$$C_n^{(3)} = [v''[v'[vC_n]_-]_-]_- = [v''C_n^{(2)}]_-, \tag{43,13в}$$

$$C_n^{(4)} = [v'''[v''[v'[vC_n]_-]_-]_-]_- = [v'''C_n^{(3)}]_- \tag{43,13г}$$

и т. д. представляют собою соответствующие добавки к коэффициенту C_n первого, второго, третьего, четвертого и т. д. порядков с учетом влияния не только вторично квантованного электромагнитного поля, но и электрон-позитронного вакуума.

б) Эффекты первого порядка. Подставляя в (43,13а) значение v из (43,3), будем иметь

$$C_n^{(1)} = \sum_{n_1, n_2} [C_{n_1 n_2} C_n]_- v_{n_1 n_2} = \sum_{n_1, n_2} (C_{n_1 n_2} C_n - C_n C_{n_1 n_2}) v_{n_1 n_2}.$$

Принимая во внимание, что

$$C_{n_1 n_2} = C_{n_1}^+ C_{n_2} - \frac{1}{2}\delta_{n_1 n_2}$$

и что C_n антикоммутирует с C_{n_1} и C_{n_2}, получим

$$C_{n_1 n_2} C_n - C_n C_{n_1 n_2} = -\delta_{n_1 n} C_{n_2}. \tag{43,14}$$

Отсюда с учетом членов первого приближения находим:

$$C_n^{(1)} = -\sum_{n_1} v_{n n_1} C_{n_1}, \tag{43,15}$$

т. е. что

$$\overline{C}_n \cong C_n - \sum_{n_1} v_{n n_1} C_{n_1}.$$

Допустим, что в начальный момент времени электрон находился в состоянии $n' = n_0$, тогда $C_{n'} = 0$, если $n' \neq n_0$, и для определения коэффициентов C_n получаем выражение:

$$C_n^{(1)} = -v_{n n_0} C_{n_0}. \tag{43,16}$$

---

[1]) Заметим, что функция $S^{-1}(\infty)$ является релятивистски инвариантной.

Подставляя вместо v_{nn_0} значение из (43,4), мы найдем:

$$\overline{C}_n \cong C_n^{(1)} = -\frac{ie}{\hbar}\int\limits_{-\infty}^{t} dt' \int \psi_n^+(\boldsymbol{r}')\alpha_{\mu'}\psi_{n_0}(\boldsymbol{r}')e^{-ict'(K_{n_0}-K_n)}\Phi_{\mu'}(\boldsymbol{r}', t')d^3x' C_{n_0}. \tag{43,17}$$

Отсюда видно, что если в начальном состоянии (n_0) был только электрон, а фотоны отсутствовали, то в конечном состоянии (n) наряду с электроном должен появиться фотон, поскольку коэффициент C_n пропорционален вторично квантованной амплитуде поля фотонов $q_{\mu'}^+$, входящей в потенциал $\Phi_{\mu'}$. Следует также заметить, что вторично квантованные амплитуды электрон-позитронного вакуума в выражение (43,17) не входят, т. е. в первом приближении коэффициенты C_n не будут зависеть от электрон-позитронного вакуума.

С помощью (43,17) мы можем вычислить в первом приближении вероятность испускания фотона, т. е. вывести другим способом выражение для коэффициента Эйнштейна A. Для этого напишем комплексно-сопряженное выражение для коэффициента $\overline{C}_n^+$:

$$\overline{C}_n^+ = \frac{ie}{\hbar}\int\limits_{-\infty}^{t} dt'' \int d^3x'' \psi_{n_0}^+(\boldsymbol{r}'')\alpha_\mu \psi_n(\boldsymbol{r}'')e^{ict''(K_{n_0}-K_n)}\Phi_\mu(\boldsymbol{r}'', t'')C_{n_0}^+. \tag{43,18}$$

Как обычно, вероятность перехода определится следующим образом:

$$w = \frac{\partial}{\partial t}\overline{C}_n^+\overline{C}_n. \tag{43,19}$$

Тогда, принимая во внимание, что в случае отсутствия фотонов для квадратичной комбинации потенциалов будет иметь место соотношение (43,5), мы найдем:

$$w = \frac{e^2}{2\pi\hbar}\int \frac{d^3\varkappa}{\varkappa}\alpha_\mu^+(\boldsymbol{\varkappa})\alpha_\mu(\boldsymbol{\varkappa})\delta(K_{n_0} - K_n - \varkappa), \tag{43,20}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \alpha_\mu(\boldsymbol{\varkappa}) &= \int d^3x' \psi_n^+(\boldsymbol{r}')e^{-i\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{r}'}\alpha_\mu\psi_{n_0}(\boldsymbol{r}'), \\ \alpha_\mu^+(\boldsymbol{\varkappa}) &= \int d^3x'' \psi_{n_0}^+(\boldsymbol{r}'')e^{i\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{r}''}\alpha_\mu\psi_n(\boldsymbol{r}''). \end{aligned}\right\} \tag{43,21}$$

Здесь принято во внимание, что

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{-\infty}^{t} dt'' e^{ict''(K_{n_0}-K_n-\varkappa)}\int\limits_{-\infty}^{t} dt' e^{-ict'(K_{n_0}-K_n-\varkappa)} = \frac{2\pi}{c}\delta(K_{n_0} - K_n - \varkappa), \qquad C_0^+C_0 = 1. \tag{43,22}$$

Исключим далее из (43,20) четвертую составляющую вектора тока. Воспользуемся для этой цели уравнением непрерывности

$$\operatorname{div} \psi_n^+(\boldsymbol{r})\boldsymbol{\alpha}\psi_{n_0}(\boldsymbol{r}) e^{-ict(K_{n_0}-K_n)} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\psi_n^+(\boldsymbol{r})\psi_{n_0}(\boldsymbol{r}) e^{-ict(K_{n_0}-K_n)} = 0. \tag{43,23}$$

Отсюда, с помощью закона сохранения энергии ($K_{n_0} - K_n = \varkappa$) находим:

$$\psi_n^+(\boldsymbol{r})\psi_{n_0}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{i\varkappa}\operatorname{div}\psi_n^+(\boldsymbol{r})\boldsymbol{\alpha}\psi_{n_0}(\boldsymbol{r}). \tag{43,24}$$

Поэтому для четвертой составляющей вектора тока мы будем иметь уравнение

$$\alpha_4(\boldsymbol{\varkappa}) = i'\alpha_0(\boldsymbol{\varkappa}) = i'\int e^{-i\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{r}'}\psi_n^+(\boldsymbol{r}')\psi_{n_0}(\boldsymbol{r}')\,d^3x' =$$

$$= i'\int e^{-i\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{r}'}\frac{1}{i\varkappa}\operatorname{div}\psi_n^+(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{\alpha}\psi_{n_0}(\boldsymbol{r}')\,d^3x' = i'\frac{(\boldsymbol{\varkappa\alpha}(\boldsymbol{\varkappa}))}{\varkappa}. \tag{43,25}$$

Аналогичным путем для сопряженной составляющей (напомним, что $i'^+ = i'$, $i'^2 = -1$) находим:

$$\alpha_4^+(\boldsymbol{\varkappa}) = i'\frac{(\boldsymbol{\varkappa\alpha}^+(\boldsymbol{\varkappa}))}{\varkappa}. \tag{43,25a}$$

Подставляя эти значения для $\alpha_4(\boldsymbol{\varkappa})$ и $\alpha_4^+(\boldsymbol{\varkappa})$ в (43,20) и производя интегрирование по $\boldsymbol{\varkappa}$, находим формулу для вероятности спонтанного излучения:

$$w = \frac{e^2\varkappa}{2\pi\hbar}\oint\left[(\boldsymbol{\alpha}^+(\boldsymbol{\varkappa})\,\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\varkappa})) - \frac{(\boldsymbol{\varkappa\alpha}^+(\boldsymbol{\varkappa}))(\boldsymbol{\varkappa\alpha}(\boldsymbol{\varkappa}))}{\varkappa^2}\right]d\Omega, \tag{43,26}$$

совпадающую с выражением (27,30).

Совпадение обоих выражений является поучительным в следующем отношении. Формула (27,30) была получена при учете взаимодействия электрона лишь с полем поперечных фотонов. Точнее, поле двух продольных составляющих было исключено до вывода формулы с помощью калибровочного преобразования, рассматривавшегося в § 25.

При новом же рассмотрении мы нашли вероятность излучения, не исключая явно продольных составляющих, и получили тот же самый результат. Это связано с тем обстоятельством, что, как было отмечено в § 42, п. ж), продольные составляющие не могут реально излучаться.

в) Эффекты второго и третьего порядков. При вычислении эффектов второго порядка мы согласно (43,13б) должны воспользоваться выражением

$$C_n^{(2)} = \sum_{n_2, n_3}\left[C_{n_2n_3}v'_{n_3n_2}, C_n^{(1)}\right]. \tag{43,27}$$

Подставляя сюда вместо $C_n^{(1)}$ его значение (43,15) и учитывая при этом (43,14), найдем:

$$C_n^{(2)} = \sum_{n_1, n_2} v_{nn_1} v'_{n_1 n_2} C_{n_2} + \sum_{n_1, n_2, n_3} [v_{nn_1}, v'_{n_2 n_3}]_- C_{n_2 n_3} C_{n_1}. \quad (43,28)$$

Первый член в правой части (43,28) описывает эффекты второго порядка относительно поля фотонов. С помощью его можно вычислить, например, испускание двух фотонов $(\sim q^+ q'^+)$, поглощение двух фотонов $(\sim qq')$, поглощение одного ($\varkappa$) и испускание другого ($\varkappa'$) фотона $(\sim qq'^+)$ (этот процесс мы рассматривали, например при выводе формулы Клейна—Нишины) или, наконец, нулевой эффект $(\sim qq^+)$, связанный с испусканием одного фотона при последующем его поглощении.

Второй член в правой части (43,28) не зависит от вторично квантованных амплитуд фотонного поля, потому что при вычислении коммутатора $[v_{nn_1}, v'_{n_2 n_3}]_-$ вместо квантованных амплитуд войдет Δ-функция [см. (42,21)], не являющаяся оператором. Поэтому с помощью этого члена нельзя исследовать процессы, связанные с испусканием или поглощением фотонов. Однако в этом члене содержится квадратичная комбинация (без начальной амплитуды) электрон-позитронного поля $(\sim C_{n_2 n_3})$. Благодаря этому он описывает процессы второго порядка относительно электрон-позитронного вакуума.

Таким образом, в правой части (43,28) исключается произведение вторично квантованных амплитуд электрон-позитронного поля (в первом члене) и электромагнитного поля (во втором члене)[1].

---

[1]) Если в основу вычислений функции S положить не равенство (42,29), а его представление через T- и N-произведения [см. (42,29г)], то подобное исключение вторично квантованных амплитуд может быть получено с помощью теоремы Вика [Phys. Rev. **80**, 269 (1950)], выражающей T-произведения через N-произведения:

$$T(ABC\ldots DEF) = N(ABC\ldots DEF) + N(\underbrace{AB}C\ldots DEF) +$$
$$+ N(\underbrace{AB}C\ldots DEF) + \ldots + N(ABC\ldots DEF), \quad (43,28а)$$

где связь между операторами A и B, обозначаемая символом ⎵, представляет собою разность

$$\underbrace{AB} = T(AB) - N(AB). \quad (43,28б)$$

Если под знаком T-произведения стоят N-произведения, то связей между членами, входящими в одно и тоже N-произведение, ставить не нужно.

Заметим, что величина (43,28б) не является уже вторично квантованным оператором. В самом деле, если вместо A и B подставить электрон-позитронные волновые функции или потенциалы электромагнитного поля, то мы

Аналогичным способом можно определить поправки к коэффициенту C_n в третьем порядке:

$$C_n^{(3)} = \sum_{n_4, n_5} \left[C_{n_4 n_5} v''_{n_4 n_5}, C_n^{(2)}\right]_- =$$
$$= -\sum_{n_1, n_2, n_3} v_{nn_1} v'_{n_1 n_2} v''_{n_2 n_3} C_{n_3} + \sum_{n_1, n_2, n_3, n_4} \left\{ v''_{n_1 n_3} \left[v_{nn_4}, v'_{n_3 n_2}\right]_- + \right.$$
$$+ v''_{n_3 n_2}\left[v'_{n_1 n_3}, v_{nn_4}\right]_- + v''_{n_3 n_4}\left[v'_{n_1 n_2}, v_{nn_3}\right]_- + v'_{n_2 n_4}\left[v''_{n_1 n_2}, v_{nn_3}\right]_- -$$
$$\left. - v_{nn_3}\left[v'_{n_3 n_4}, v''_{n_1 n_2}\right]_- \right\} C_{n_1 n_2} C_{n_4}. \qquad (43{,}29)$$

Отсюда видно, что первый член правой части равенства, $\sim \sum_{n_1, n_2, n_3}$, описывает процессы третьего порядка относительно испускания или поглощения фотонов. Второй член, $\sim \sum_{n_1 n_2 n_3 n_4}$, описывает также процессы третьего порядка, складывающиеся из процессов первого порядка относительно фотонов и второго порядка относительно электронов и позитронов.

Коэффициент же $C_n^{(4)}$ будет содержать члены четвертого порядка амплитуд поля фотонов, члены четвертого порядка амплитуд электронов и позитронов и смешанные члены четвертого порядка, состоящие из произведений членов второго порядка амплитуд фотонов и второго порядка амплитуд электронов и позитронов.

будем иметь соответственно:

$$\left.\begin{aligned} &\underbrace{\psi^+_{\rho'}(\boldsymbol{r}', t')\,\psi_\rho}\,(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{2} S^F_{\rho\rho'}(\boldsymbol{R}, T), \\ &\underbrace{A_\mu(\boldsymbol{r}, t)\;\; A_{\mu'}}(\boldsymbol{r}', t') = 2\pi\hbar c \delta_{\mu\mu'} \Delta^F(\boldsymbol{R}, T), \end{aligned}\right\} \qquad (43{,}28\text{в})$$

где

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}', \qquad T = t - t',$$
$$S^F_{\rho\rho'}(\boldsymbol{R}, T) = \left(\frac{1}{ic}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{i}(\boldsymbol{\alpha}\nabla) - \rho_3 k_0\right) D^F(\boldsymbol{R}, T)\,\delta_{\rho\rho'}$$

[см. также (23,42)], а так называемые каузальные функции, по определению Дайсона, равны:

$$D^F(\boldsymbol{R}, T) = D_1(\boldsymbol{R}, T) + i\frac{T}{|T|} D(\boldsymbol{R}, T) = \frac{1}{8\pi^3}\int \frac{e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{R} - iK|T|}}{K}\, d^3k, \quad (43{,}28\text{г})$$

а $\Delta^F(\boldsymbol{R}, T) = D^F(\boldsymbol{R}, T)$ при $k_0 = 0$.

Более подробно эти функции обсуждаются, например, во вступительной статье Д. Д. Иваненко к сборнику «Новейшее развитие квантовой электродинамики».

Рассмотрим в качестве примера процессы второго порядка, описываемые величиной, пропорциональной

$$T\left\{N\left(\psi_1^+ A_1 \psi_1\right) N\left(\psi_2^+ A_2 \psi_2\right)\right\}.$$

Ради простоты под x мы будем понимать четырехмерные координаты, энергию взаимодействия с электромагнитным полем будем просто обозначать $A = \alpha_\mu A_\mu$, а индексы 1 и 2 при ψ будут означать, что $\psi_1 = \psi(x_1)$ и т. д. Тогда в резуль-

С помощью коэффициентов $C_n^{(2)}$ можно вновь получить формулу Клейна — Нишины без учета вакуумных членов. Это связано с тем обстоятельством, что формула Клейна — Нишины учитывает эффект второго порядка относительно квантовых амплитуд поля фотонов. Второй же член в (43,28), зависящий от вакуумных членов, но не от поля фотонов, следует при этом отбросить. Чтобы найти вакуумные поправки к формуле Клейна—Нишины, необходимо воспользоваться четвертым приближением, содержащим наряду с вакуумными членами также члены второго порядка амплитуд поля фотонов.

Для нахождения вакуумных поправок к спонтанному испусканию фотонов (эффект первого порядка), наряду с учетом коэффициента первого приближения $C_n^{(1)}$ мы должны были бы учитывать также коэффициент третьего приближения $C_n^{(3)}$, содержащий наряду с вакуумными членами также члены первого порядка амплитуд поля фотонов.

г) Эффекты второго порядка с учетом вакуумных членов. Исследуем подробно влияние вакуумных членов на эффекты второго порядка, когда должны отсутствовать реально излучаемые фотоны.

Этот вопрос является наиболее простым в математическом отношении, поскольку вакуумные эффекты сказываются уже во втором порядке (эффекты первого порядка в этом случае должны быть опущены, поскольку они соответствуют наличию одного фотона). При рассмотрении этого примера сравнительно просто можно сформу-

---

тате разложения, по теореме Вика мы получим в числе прочих такие члены:

$$N\left(\psi_1^+ A_1 \psi_1 \psi_2^+ A_2 \psi_2\right), \tag{43,29а}$$

$$N\left(\psi_1^+ A_1 \psi_1 \psi_2^+ A_2 \psi_2\right), \tag{43,29б}$$

$$N\left(\psi_1^+ A_1 \psi_1 \psi_2^+ A_2 \psi_2\right), \tag{43,29в}$$

$$N\left(\psi_1^+ A_1 \psi_1 \psi_2^+ A_2 \psi_2\right), \tag{43,29г}$$

$$N\left(\psi_1^+ A_1 \psi_1 \psi_2^+ A_2 \psi_2\right) \tag{43,29д}$$

и т. д.

Эти матричные элементы могут быть изображены, согласно Фейнману, графически. Операторы $A(x)$ будем изображать пунктирными линиями, а $\psi(x)$ — сплошными. Если операторы не связаны друг с другом, то линия будет уходить из точки x в бесконечность. Фотонные линии (пунктирные) мы будем обозначать без стрелки, а электронные (сплошные) — со стрелкой.

Это связано с тем обстоятельством, что $\psi(x)$ является оператором поглощения электронов и оператором испускания позитронов. Поэтому сплошная линия, идущая из бесконечности в точку x, обозначает, с одной стороны, существование электрона до рассеяния, а с другой стороны, существование позитрона после рассеяния (как обратного во времени

лировать правила регуляризации хотя бы для эффектов второго порядка. Наконец, этот пример имеет большое физическое значение, поскольку он дает возможность доказать существование дополнительного сдвига уровней в атоме водорода и дополнительного магнитного момента электрона, что нашло полное (вплоть до численного значения) экспериментальное подтверждение.

Квантовые состояния с положительной энергией мы будем обозначать n_+, а с отрицательной — n_-. Если один из этих значков будет входить дважды, то мы должны будем произвести суммирование по всем состояниям с положительной (n_+) или отрицательной (n_-) энергией, т. е.

$$\left.\begin{aligned} C_{n_+}^+ C_{n_+} &= \sum_{n_+ (E>0)} C_{n_+}^+ C_{n_+}, \\ C_{n_-}^+ C_{n_-} &= \sum_{n_- (E<0)} C_{n_-}^+ C_{n_-}. \end{aligned}\right\} \quad (43,30)$$

электрону). Если операторы связаны между собою, то соответствующая линия должна соединять точки x_1 и x_2.

Исходя из этого правила, мы можем графиками Фейнмана представить матричный элемент (43,29а) (рис. 21, *а*), изображающий рассеяние электрона

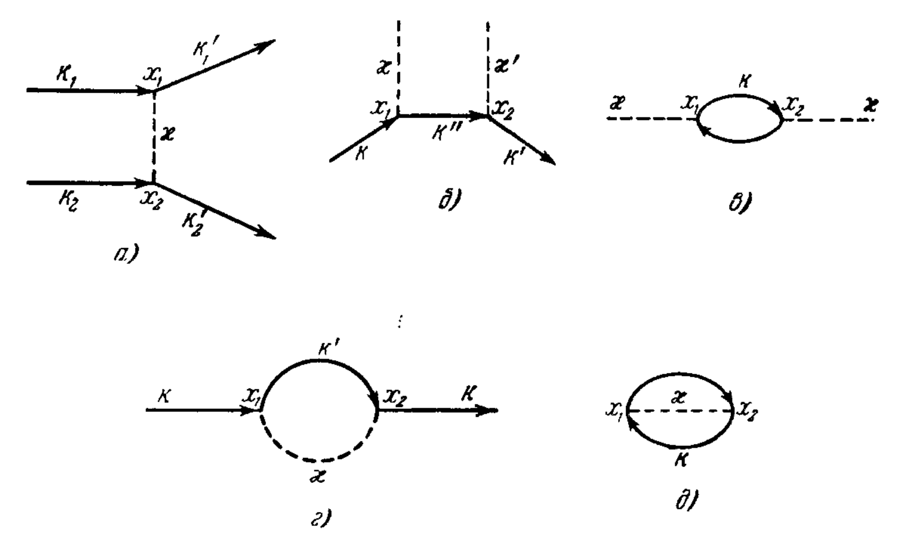


Рис. 21. Графики Фейнмана для различных процессов второго порядка.

на электроне, матричный элемент (43,29б) (рис. 21, *б*), изображающий комптон-эффект, т. е. рассеяние фотона на электроне, матричный элемент (43,29в) (рис. 21, *в*), изображающий взаимодействие фотона с электрон-позитронным вакуумом, т. е. «собственную» энергию фотона, матричный элемент (43,29г) (см. рис. 21, *г*), соответствующий взаимодействию электрона с нулевыми колебаниями фотона, и матричный элемент (43,29д) (рис. 21, *д*), соответствующий виртуальному образованию пары и фотона с последующим их поглощением.

Начальное состояние электрона обозначим просто значком 0 ($n_0 = 0$, $C_{n_0} = C_0$).

Тогда при вычислении влияния вакуумных членов мы должны учесть, что состояния с отрицательной энергией (n_-) все заняты:

$$C^+_{n_-} C_{n_-} = 1, \quad C_{n_-} C^+_{n_-} = 0, \tag{43,31}$$

а состояния с положительной энергией (n_+) — свободны

$$C_{n_+} C^+_{n_+} = 1, \quad C^+_{n_+} C_{n_+} = 0. \tag{43,32}$$

Исключение составляет состояние $n_+ = 0$, занятое рассматриваемым электроном:

$$C^+_0 C_0 = 1, \quad C_0 C^+_0 = C_0 C_0 = 0, \tag{43,33}$$

причем в (43,31) и (43,32) суммирования по n_+ и n_- производить не нужно.

Выделяя в правой части (43,28) отличные от нуля комбинации, содержащие коэффициент C_0:

$$C_{n_1 n_2} C_n \to \frac{1}{2} C^+_{n_-} C_{n_-} C_0 + \frac{1}{2} C^+_{n_-} C_0 C_{n_-} - \\ - \frac{1}{2} C^+_{n_-} C_{n_-} C_0 - \frac{1}{2} C_{n_+} C^+_{n_+} C_0,$$

получим, принимая во внимание соотношения (43,31), (43,32) и (43,33):

$$\bar{C}_0 = C_0 + \left(v_{0n_+} v'_{n_+0} + v'_{n_-0} v_{0n_-} + \frac{1}{2} \left[v_{00} v'_{n_- n_-} \right]_- - \frac{1}{2} \left[v_{00} v'_{n_+ n_+} \right]_- \right) C_0. \tag{43,34}$$

Выражение (43,34) можно представить в виде

$$\bar{C}_0 = C_0 + \int\limits_{-\infty}^{t} dt' \int\limits_{-\infty}^{t'} dt'' \left\{ w_{0n_+}(t') w_{n_+0}(t'') - w_{n_-0}(t') w_{0n_-}(t'') + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left[w_{00}(t') w_{n_- n_-}(t'') \right]_- - \frac{1}{2} \left[w_{00}(t') w_{n_+ n_+}(t'') \right]_- \right\} C_0, \tag{43,35}$$

если учесть, что

$$v'_{n_-0} v_{0n_-} = - v_{n_-0} v'_{0n_-}.$$

Дополнительный к C_0 член в правой части появляется благодаря учету (во втором приближении) энергии взаимодействия электрона ($n_+ = 0$) с электрон-позитронным вакуумом.

Как известно, при наличии энергии возмущения U уравнение движения электрона можно записать в виде:

$$\left(-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} - \mathrm{H} \right) \psi = U \psi. \tag{43,36}$$

В случае отсутствия возмущения ($U = 0$) решение имеет вид:

$$\psi = C_0 \psi_0.$$

При включении возмущения коэффициент $\overline{C}_0(t)$ следует считать функцией времени, и для его определения будем иметь соотношение

$$\overline{C}_0(t) = C_0 - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{t} dt' \int d^3x' \psi_0^+(\boldsymbol{r}', t') U(\boldsymbol{r}', t') \psi_0(\boldsymbol{r}', t') C_0, \qquad (43{,}37)$$

причем величину

$$V = \int d^3x' \psi_0^+(\boldsymbol{r}', t) U(\boldsymbol{r}', t) \psi_0(\boldsymbol{r}', t)$$

следует рассматривать как дополнительную энергию электрона, которую он получает благодаря наличию возмущения U.

Сопоставляя формулы (43,35) и (43,37), мы находим для искомой дополнительной энергии электрона, обусловленной учетом (во втором приближении) вакуумных членов, следующее выражение:

$$V = V^A + V^N, \qquad (43{,}38)$$

где V^A и V^N представляют собой соответственно обменные и необменные части:

$$V^A = \hbar i \int_{-\infty}^{t} dt' \left[w_{0n_+}(t) w_{n_+0}(t') - w_{n_-0}(t) w_{0n_-}(t') \right], \qquad (43{,}39)$$

$$V^N = \frac{1}{2} \hbar i \int_{-\infty}^{t} dt' \left\{ \left[w_{00}(t) w_{n_-n_-}(t') \right]_- - \left[w_{00}(t) w_{n_+n_+}(t') \right]_- \right\}. \qquad (43{,}40)$$

д) Необменная часть взаимодействия. Для дальнейших вычислений нам необходимо принять во внимание, что[1])

$$w_{nn'}(t) = \frac{ie}{\hbar} \int \psi_n^+(\boldsymbol{r}') \alpha_{\mu'} \Phi_{\mu'}(\boldsymbol{r}', t) \psi_{n'}(\boldsymbol{r}') e^{-ict(K_{n'} - K_n)} d^3x',$$

а для свободных потенциалов имеют место четырехмерные перестановочные соотношения [см. (42,21)]:

$$[\Phi_\mu(\boldsymbol{r}, t) \Phi_{\mu'}(\boldsymbol{r}', t')]_- = \frac{c\hbar}{i} \delta_{\mu\mu'} \frac{1}{2\pi^2} \int d^3\varkappa e^{i\boldsymbol{\varkappa}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')} \frac{\sin c\varkappa(t - t')}{\varkappa}. \qquad (43{,}41)$$

Отсюда видно, что необменная часть взаимодействия не содержит вторично квантованных амплитуд потенциалов и поэтому не может зависеть от наличия реальных фотонов.

---

[1]) Ради простоты мы не пишем спиновых значков у волновой функции ψ.

Подставляя (43,41) в (43,40), мы найдем после интегрирования по t' [1]):

$$\int_{-\infty}^{t} dt' \sin c\varkappa (t - t') = \frac{1}{c\varkappa}$$

значение для необменного взаимодействия:

$$V^N = \frac{e^2}{4\pi^2} \sum_n \sum_{\mu=1}^{4} \int \langle \psi_0^+ e^{i\varkappa r} \alpha_\mu \psi_0 \rangle \, \delta_n \langle \psi_n^+ e^{-i\varkappa r} \alpha_\mu \psi_n \rangle \frac{d^3\varkappa}{\varkappa^2}, \quad (43,42)$$

где $\langle U \rangle = \int U \, d^3x'$, а $\delta_n = K_n/|K_n|$ является знаковой функцией, равной при суммировании по положительным и отрицательным энергиям соответственно $+1$ и -1. В равенстве (43,42) сумма по n берется по всем квантовым состояниям как с положительной (n_+), так и с отрицательной (n_-) энергиями.

Формулу (43,42) мы можем представить в более наглядной форме. Вводя обозначения для плотности заряда

$$\rho_n = -e\psi_n^+ \psi_n$$

и для плотности тока

$$\boldsymbol{j}_n = -e\psi_n^+ \boldsymbol{\alpha} \psi_n$$

и интегрируя по $\varkappa$, мы можем записать необменную часть взаимодействия в виде [2])

$$V^N = \frac{1}{2} \int \frac{d^3x \, d^3x'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \{\rho_0(\boldsymbol{r}) [\rho_-(\boldsymbol{r}') - \rho_+(\boldsymbol{r}')] - \boldsymbol{j}_0(\boldsymbol{r}) [\boldsymbol{j}_-(\boldsymbol{r}') - \boldsymbol{j}_+(\boldsymbol{r}')]\}. \quad (43,43)$$

Здесь

$$\rho_- = -e\psi_{n_-}^+ \psi_{n_-}, \quad \boldsymbol{j}_- = -e\psi_{n_-}^+ \boldsymbol{\alpha} \psi_{n_-}$$

являются плотностью заряда и плотностью тока частиц с отрицательной, а ρ_+ и $\boldsymbol{j}_+$ — с положительной энергией.

е) Обменная часть взаимодействия. Обменная часть взаимодействия (43,39) зависит от вторично-квантованных амплитуд поля

---

1) Это выражение понимается как предельное значение

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t} \sin bt \, dt \text{ при } \alpha \to 0.$$

2) Обменная часть взаимодействия может быть получена как результат взаимодействия электрона с флуктуациями электромагнитного поля. Соответствующие поправки мы будем кратко называть флуктуационными. Необменная же часть взаимодействия связана с поляризацией электрон-позитронного вакуума, и поэтому соответствующие дополнительные поправки мы назовем вакуумными.

фотонов. Поэтому при ее вычислении надо учитывать наличие реальных фотонов. В случае отсутствия реальных фотонов мы имеем [см. также (43,5)]:

$$\Phi_\mu(\boldsymbol{r}, t)\,\Phi_{\mu'}(\boldsymbol{r}', t') = \frac{c\hbar}{4\pi^2}\,\delta_{\mu\mu'}\int \frac{d^3\varkappa}{\varkappa}\,e^{-ic\varkappa(t-t')+i\varkappa(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}.$$

Подставляя последнее соотношение в (43,39), мы найдем в результате интегрирования по переменной t' следующее выражение для обменной энергии:

$$V^A = \frac{e^2}{4\pi^2}\sum\int\frac{d^3\varkappa}{\varkappa}\sum_{\rho=1}^{4}\left[\frac{1}{K_0 - K_{n_+} - \varkappa}\langle\psi_0^+ e^{i\varkappa r}\alpha_\rho\psi_{n_+}\rangle \times\right.$$

$$\left.\times\langle\psi_{n_+}^+ e^{-i\varkappa r}\alpha_\rho\psi_0\rangle + \frac{1}{K_0 - K_{n_-} + \varkappa}\langle\psi_0^+ e^{i\varkappa r}\alpha_\rho\psi_{n_-}\rangle\langle\psi_{n_-}^+ e^{-i\varkappa r}\alpha_\rho\psi_0\rangle\right]. \quad (43,44)$$

Последнее соотношение можно представить в виде

$$V^A = \frac{e^2}{4\pi^2}\sum_n\int\frac{1}{K_0 - K_n - \varkappa\delta_n}\sum_{\rho=1}^{4}\langle\psi_0^+ e^{i\varkappa r}\alpha_\rho\psi_n\rangle\langle\psi_n^+ e^{-i\varkappa r}\alpha_\rho\psi_0\rangle\frac{d^3\varkappa}{\varkappa}. \quad (43,45)$$

Для дальнейших преобразований воспользуемся следующим свойством матричных элементов:

$$\sum_n\langle\psi_0^+ A\psi_n\rangle\langle\psi_n^+ B\psi_0\rangle = \langle\psi_0^+ AB\psi_0\rangle, \quad (43,46)$$

имеющим место, когда величины A и B не зависят от индекса n, а суммирование следует произвести по всем квантовым состояниям.

Поэтому в нашем случае необходимо прежде всего избавиться в соотношении (43,45) от величин с индексом n (т. е. от K_n и δ_n). Заметим, что величина K_n связана с гамильтонианом, не зависящим от n,

$$\mathrm{H}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{c\hbar}\mathrm{H} = (\boldsymbol{\alpha}\mathbf{k}) + k_0\rho_3 - \frac{e}{c\hbar}(\Phi - (\boldsymbol{\alpha}A)), \quad (43,47)$$

соотношением

$$(K_n - \mathrm{H}_{\mathbf{k}})\,\psi_n = 0.$$

Последнюю формулу можно представить в более общем виде

$$K_n^s\psi_n = \mathrm{H}_{\mathbf{k}}^s\psi_n,$$

где s является положительным целым числом, а $\mathbf{k} = -i\nabla$. Поэтому для функций $f(K_n)$, разложимых по степеням K_n, мы имеем:

$$f(K_n)\,\psi_n = f(\mathrm{H}_{\mathbf{k}})\,\psi_n. \quad (43,48)$$

Отсюда, воспользовавшись формулами

$$\frac{1}{K_0 - K_n - \varkappa\delta_n}\psi_n = \frac{1}{K_0 - \mathrm{H}_{\mathbf{k}} - \varkappa\dfrac{\mathrm{H}_{\mathbf{k}}}{|\mathrm{H}_{\mathbf{k}}|}}\psi_n, \tag{43,49}$$

$$\mathrm{H}_{\mathbf{k}} e^{-i\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{r}} = e^{-i\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{r}}\mathrm{H}_{\mathbf{k}-\boldsymbol{\varkappa}},$$

найдем:

$$V^A = \frac{e^2}{4\pi^2}\int\sum_{\mu=1}^{4}\left\langle\psi_0^+\alpha_\mu\frac{1}{K_0 - \mathrm{H}_{\mathbf{k}-\boldsymbol{\varkappa}} - \varkappa\dfrac{\mathrm{H}_{\mathbf{k}-\boldsymbol{\varkappa}}}{|\mathrm{H}_{\mathbf{k}-\boldsymbol{\varkappa}}|}}\alpha_\mu\psi_0\right\rangle\frac{d^3\varkappa}{\varkappa}, \tag{43,50}$$

где

$$\mathrm{H}_{\mathbf{k}-\boldsymbol{\varkappa}} = \mathrm{H}_{\mathbf{k}} - (\boldsymbol{\alpha\varkappa}).$$

Наконец, используя последнее равенство, мы можем получить следующие соотношения, которыми воспользуемся в дальнейшем:

$$\begin{gathered}\langle\psi_n^+ e^{i\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{r}}(\boldsymbol{\alpha\varkappa})\psi_0\rangle = \langle\psi_n^+(\mathrm{H}_{\mathbf{k}} e^{i\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{r}} - e^{i\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{r}}\mathrm{H}_{\mathbf{k}})\psi_0\rangle = (K_n - K_0)\langle\psi_n^+ e^{i\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{r}}\psi_0\rangle,\\ \langle\psi_n^+ e^{-i\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{r}}(\boldsymbol{\alpha\varkappa})\psi_0\rangle = -(K_n - K_0)\langle\psi_n^+ e^{-i\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{r}}\psi_0\rangle.\end{gathered} \tag{43,51}$$

§ 44. Исследование обменной части взаимодействия

При более детальном исследовании обменной части взаимодействия рассмотрим случай малых скоростей, когда расчет можно вести путем разложения энергии в ряд по величине v/c. Мы получим члены взаимодействия, которые будем сравнивать с экспериментальными данными, ограничившись лишь величинами порядка $(v/c)^2$ (v — скорость электрона). Это равносильно разложению до $(p^2/m_0)\,(p/m_0c)^2$ (p—импульс электрона) для членов, не содержащих внешнего поля, и до $(p/m_0c)^2\,U$ для членов, содержащих внешнее поле (в нерелятивистском приближении $U \sim p^2/m_0$). Члены, пропорциональные U^2/m_0c^2, в разложении должны отсутствовать, поскольку они не обладают калибровочной инвариантностью. Отсутствие этих членов можно показать также непосредственным расчетом. Члены, пропорциональные $(p^2/m_0)(p/m_0c)^2$, не зависят от внешнего потенциала и поэтому относятся к энергии самодействия, на анализе которой мы остановимся особо.

Таким образом, при разложении энергии в ряд мы оставим, кроме величин, связанных с энергией самодействия, члены, пропорциональные

$$U, \quad \frac{p}{m_0c}U, \quad \frac{p^2}{m_0^2c^2}U.$$

Подробный расчет мы будем производить для случая лишь одного электростатического потенциала, когда можно положить

$$u = \frac{1}{c\hbar}U = -\frac{e}{c\hbar}\Phi. \tag{44,1}$$

Переход к общему случаю, когда кроме электрического поля появляется еще магнитное, может быть совершен по следующей схеме[1]):

$$\Phi \to \Phi - (\boldsymbol{\alpha} A). \tag{44,2}$$

а) Общие формулы. Обменную часть взаимодействия (43,50) мы представим в виде

$$V^A = \langle \psi_0^+ U^A \psi_0 \rangle = \frac{e^2}{4\pi^2} \int \sum_{\mu=1}^{4} \langle \psi_0^+ \alpha_\mu \mathrm{S} \alpha_\mu \psi_0 \rangle \frac{d^3\varkappa}{\varkappa}, \tag{44,3}$$

причем оператор S имеет вид

$$\mathrm{S} = \frac{1}{K_0 - \mathrm{H}_{\mathbf{k}-\boldsymbol{\varkappa}} - \varkappa \mathrm{H}_{\mathbf{k}-\boldsymbol{\varkappa}}/|\mathrm{H}_{\mathbf{k}-\boldsymbol{\varkappa}}|}. \tag{44,4}$$

При разложении оператора S мы должны учесть, что от потенциала u зависит оператор

$$\mathrm{H}_{\mathbf{k}-\boldsymbol{\varkappa}} = \mathrm{G}_{\mathbf{k}-\boldsymbol{\varkappa}} + u, \tag{44,5}$$

где

$$\mathrm{G}_{\mathbf{k}} = (\boldsymbol{\alpha}\mathbf{k}) + \rho_3 k_0, \quad \mathrm{G}_{\mathbf{k}-\boldsymbol{\varkappa}} = \mathrm{G}_{\mathbf{k}} - (\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\varkappa}),$$

и

$$(K_0 - \mathrm{G}_{\mathbf{k}} - u)\psi_0 = 0. \tag{44,6}$$

При перемене местами u и функции, зависящей от оператора $\mathbf{k}$, удобно воспользоваться следующим соотношением:

$$uf(\mathbf{k}) = f'(\mathbf{k})\, u, \tag{44,7}$$

где

$$f'(\mathbf{k}) = f(\mathbf{k} - \boldsymbol{\pi}), \tag{44,8}$$

а оператор $\boldsymbol{\pi} = \nabla/i$ действует только на функцию u; например,

$$\mathbf{k} u \psi_0 = \boldsymbol{\pi} u \psi_0 + u \mathbf{k} \psi_0. \tag{44,9}$$

Вводя обозначения

$$\mathrm{G} = \sqrt{\mathrm{G}_{\mathbf{k}}^2} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + k_0^2},$$
$$\mathrm{G}_0 = \sqrt{\mathrm{G}_{\mathbf{k}-\boldsymbol{\varkappa}}^2} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + K^2 - 2(\mathbf{k}\boldsymbol{\varkappa})}, \tag{44,10}$$

где $K = \sqrt{\varkappa^2 + k_0^2}$, имеем:

$$|\mathrm{H}_{\mathbf{k}-\boldsymbol{\varkappa}}| = \mathrm{G}_0 + \frac{1}{\mathrm{G}_0 + \mathrm{G}_0'} (\mathrm{G}_{\mathbf{k}-\boldsymbol{\varkappa}} u + u \mathrm{G}_{\mathbf{k}-\boldsymbol{\varkappa}}). \tag{44,11}$$

Соотношение (44,11) проще всего проверить, возведя обе части равенства в квадрат.

---

[1]) Разумеется, такая замена может быть сделана лишь у той части, связанной с дополнительной энергией, которая обладает релятивистской инвариантностью. Более подробно этот вопрос мы разберем в § 44, п. б).

Далее, при разложении в ряд величины

$$\frac{1}{N-u},$$

когда следует ограничиться лишь линейными членами относительно u, можно воспользоваться следующим соотношением:

$$\frac{1}{N-u}=\frac{1}{N}+\frac{1}{N}u\frac{1}{N}+\ldots, \tag{44,12}$$

имеющим место также для случая, когда оператор N не коммутирует с функцией u.

Тогда для оператора S [см. соотношение (44,4)] находим:

$$\mathrm{S}=\frac{1}{K_0-Q\mathrm{G}_{\mathbf{k}-\varkappa}}+\frac{1}{K_0-Q\mathrm{G}_{\mathbf{k}-\varkappa}}(au+b\mathrm{G}_{\mathbf{k}-\varkappa}u\mathrm{G}_{\mathbf{k}-\varkappa})\frac{1}{K_0-Q\mathrm{G}_{\mathbf{k}-\varkappa}}, \tag{44,13}$$

где

$$Q=\left(1+\frac{\varkappa}{\mathrm{G}_0}\right),\quad a=1+\frac{\varkappa}{\mathrm{G}_0+\mathrm{G}_0'},$$
$$b=-\frac{\varkappa}{\mathrm{G}_0\mathrm{G}_0'\left(\mathrm{G}_0+\mathrm{G}_0'\right)}. \tag{44,14}$$

Для исключения величины K_0 в знаменателе учтем, что согласно (44,6) величина $K_0^2-\mathrm{G}^2$ коммутирует с оператором α_μ, и действие ее на функцию ψ_0 имеет порядок u:

$$(K_0^2-\mathrm{G}^2)\psi_0=(u\mathrm{G}_{\mathbf{k}}+\mathrm{G}_{\mathbf{k}}u)\psi_0. \tag{44,15}$$

Поэтому, вводя обозначение

$$P=\frac{1}{2}(Q^2\mathrm{G}_0^2-\mathrm{G}^2), \tag{44,16}$$

мы найдем вместо (44,13):

$$\mathrm{S}=-\frac{K_0+Q\mathrm{G}_{\mathbf{k}-\varkappa}}{2P}\left(1+\frac{K_0^2-\mathrm{G}^2}{2P}\right)+$$
$$+\frac{K_0+Q\mathrm{G}_{\mathbf{k}-\varkappa}}{2P}(au+b\mathrm{G}_{\mathbf{k}-\varkappa}u\mathrm{G}_{\mathbf{k}-\varkappa})\frac{K_0+Q\mathrm{G}_{\mathbf{k}-\varkappa}}{2P}. \tag{44,17}$$

При вычислении суммы

$$\sum_{\mu=1}^{4}\alpha_\mu \mathrm{S}\alpha_\mu=\sum \mathrm{S}$$

следует использовать равенства

$$\left.\begin{aligned}&\sum I=(\boldsymbol{\alpha\alpha})-I^2=2, && \sum\rho_3(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{A})=0,\\ &\sum\rho_3=-4\rho_3, && \sum(\boldsymbol{A\alpha})(\boldsymbol{B\alpha})=2(\boldsymbol{\alpha B})(\boldsymbol{\alpha A}),\\ &\sum(\boldsymbol{\alpha A})=-2(\boldsymbol{\alpha A}), && \text{и т. д.,}\end{aligned}\right\} \tag{44,18}$$

причем последнее соотношение имеет место, когда величины A и B коммутируют между собою.

Из (44,18) также следует:

$$\left.\begin{aligned}&\sum u = u\sum I = 2u,\\&\sum \mathrm{G}_{\mathbf{k}-\varkappa} u \mathrm{G}_{\mathbf{k}-\varkappa} = [\mathrm{G}_0^2 + \mathrm{G}_0'^2 + (\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k}-\boldsymbol{\varkappa}-\boldsymbol{\pi}))(\boldsymbol{\alpha\pi}) -\\&\qquad - (\boldsymbol{\alpha\pi})(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k}-\boldsymbol{\varkappa}))]\,u,\\&\sum \mathrm{G}_{\mathbf{k}-\varkappa} u = -2(\mathrm{G}_{\mathbf{k}} + k_0\rho_3 - (\boldsymbol{\alpha\varkappa}))\,u,\\&\sum u\mathrm{G}_{\mathbf{k}-\varkappa} = \sum \mathrm{G}'_{\mathbf{k}-\varkappa} u = \sum \mathrm{G}_{\mathbf{k}-\varkappa} u + 2(\boldsymbol{\alpha\pi})\,u,\end{aligned}\right\}\quad (44,19)$$

где

$$\mathrm{G}'_{\mathbf{k}-\varkappa} = \mathrm{G}_{\mathbf{k}-\varkappa} - (\boldsymbol{\alpha\pi}).$$

Разобьем оператор S на две части: на часть S_0, не зависящую от u, и на часть S_1, пропорциональную u. Принимая во внимание последние соотношения, находим:

$$\sum \mathrm{S}_0 = -\frac{1}{P}[\mathrm{G}_{\mathbf{k}} - (\mathrm{G}_{\mathbf{k}} + k_0\rho_3 - (\boldsymbol{\alpha\varkappa}))\,Q], \quad (44,20)$$

$$\begin{aligned}\sum \mathrm{S}_1 = \Big\{&-\frac{1}{P} - \frac{1}{2P^2}[\mathrm{G}_{\mathbf{k}} - (\mathrm{G}_{\mathbf{k}} + k_0\rho_3 - (\boldsymbol{\alpha\varkappa}))\,Q](\mathrm{G}_{\mathbf{k}} + \mathrm{G}'_{\mathbf{k}}) +\\&+\frac{1}{2PP'}\Big[\mathrm{G}^2\Big(a + \frac{1}{2}b(\mathrm{G}_0^2 + \mathrm{G}_0'^2)\Big) +\\&+ QQ'\Big(\mathrm{G}_0^2\mathrm{G}_0'^2 b + \frac{1}{2}a(\mathrm{G}_0^2 + \mathrm{G}_0'^2)\Big) -\\&- (Qa + Q'a + Qb\mathrm{G}_0^2 + Q'b\mathrm{G}_0'^2)\,\mathrm{G}_{\mathbf{k}}(\mathrm{G}_{\mathbf{k}} + k_0\rho_3 - (\boldsymbol{\alpha\varkappa})) +\\&+\frac{1}{2}(\mathrm{G}^2 b + QQ'a)(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k}-\boldsymbol{\varkappa}-\boldsymbol{\pi}))(\boldsymbol{\alpha\pi}) - (\boldsymbol{\alpha\pi})(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k}-\boldsymbol{\varkappa})) +\\&+ (Q'a + b\mathrm{G}_0^2 Q)\,\mathrm{G}_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\alpha\pi})\Big]\Big\}\,u. \quad (44,21)\end{aligned}$$

Для дальнейших упрощений воспользуемся следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{G}_0 - \mathrm{G}'_0 = -\frac{(\varkappa\pi)}{K}, \qquad \mathrm{G}_{\mathbf{k}} - \mathrm{G}'_{\mathbf{k}} = (\boldsymbol{\alpha\pi}),\\&a + \frac{1}{2}b(\mathrm{G}_0^2 + \mathrm{G}_0'^2) = 1 - \frac{\varkappa(\varkappa\pi)^2}{4K^5},\\&\mathrm{G}_0^2\mathrm{G}_0'^2 b + \frac{1}{2}a(\mathrm{G}_0^2 + \mathrm{G}_0'^2) = \frac{1}{2}\Big(\mathrm{G}_0^2 + \mathrm{G}_0'^2 + \frac{\varkappa(\varkappa\pi)^2}{2K^3}\Big),\\&Qa + Q'a + bQ'\mathrm{G}_0'^2 + bQ\mathrm{G}_0^2 = Q + Q' - \frac{\varkappa(\varkappa\pi)^2}{2K^5}.\end{aligned}\right\}\quad (44,22)$$

Кроме того, с помощью равенства (44,6) легко показать, что

$$\psi_0^+(\mathrm{G}_{\mathbf{k}} + u)f\psi_0 = \psi_0^+ f(\mathrm{G}_{\mathbf{k}} + u)\psi_0. \quad (44,23)$$

В частности, когда величина f пропорциональна u, мы можем в нашем приближении ($u^2 \cong 0$) написать

$$\psi_0^+ G_{\mathbf{k}} f \psi_0 = \psi_0^+ f G_{\mathbf{k}} \psi_0. \tag{44,24}$$

Это соотношение может быть представлено также в более общем виде:

$$\psi_0^+ [((\boldsymbol{\alpha}\mathbf{k}) + \rho_3 k_0)^n f - f((\boldsymbol{\alpha}\mathbf{k}) + \rho_3 k_0)^n] \psi_0 = 0, \tag{44,25}$$

где n — целое положительное число. Полагая, в частности, $n = 2$ и принимая во внимание, что постоянная k_0^2 коммутирует с любой функцией, мы найдем, что оператор $\mathbf{k}^2$ также коммутирует с функцией u:

$$\mathbf{k}^2 u = u\mathbf{k}^2. \tag{44,26}$$

Из (44,26) легко получить

$$(\boldsymbol{\pi} u \mathbf{k}) = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\pi}^2 u. \tag{44,27}$$

Полагая, далее, в (44,25) $n = 1$ и $f = u$, найдем:

$$(\boldsymbol{\alpha\pi}) u = 0 \tag{44,28}$$

или

$$K_0 (\boldsymbol{\alpha\pi}) u = G_{\mathbf{k}} (\boldsymbol{\alpha\pi}) u = (\boldsymbol{\alpha\pi}) u G_{\mathbf{k}} = 0. \tag{44,29}$$

Подставляя сюда значение оператора $G_{\mathbf{k}} = (\boldsymbol{\alpha}\mathbf{k}) + \rho_3 k_0$, имеем:

$$\begin{gathered}(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{k})(\boldsymbol{\alpha\pi}) u = -k_0\rho_3 (\boldsymbol{\alpha\pi}) u, \\ (\boldsymbol{\alpha\pi})(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{k}) u = \boldsymbol{\pi}^2 u + (\boldsymbol{\alpha\pi}) u (\boldsymbol{\alpha}\mathbf{k}) = \boldsymbol{\pi}^2 u + k_0\rho_3 (\boldsymbol{\alpha\pi}) u.\end{gathered} \tag{44,30}$$

Заметим, что равенства (44,26) — (44,30) носят операторный характер. При применении надо умножить их слева на ψ_0^+, а справа на ψ_0.

При интегрировании по углам полезно воспользоваться соотношениями

$$\int (\boldsymbol{\varkappa} A)\, d^3\varkappa = 0, \qquad \int (\boldsymbol{\varkappa} A)(\boldsymbol{\varkappa} B)\, d^3\varkappa = \int_0^\infty \frac{4\pi}{3} (AB)\, \varkappa^4\, d\varkappa,$$

или, усредняя по углам:

$$\overline{(\boldsymbol{\varkappa} A)} = 0, \qquad \overline{(\boldsymbol{\varkappa} A)(\boldsymbol{\varkappa} B)} = \frac{1}{3}\boldsymbol{\varkappa}^2 (AB). \tag{44,31}$$

Отсюда, в частности, следует:

$$(\boldsymbol{\varkappa\pi})\, G_{\mathbf{k}} (\boldsymbol{\alpha\varkappa}) u = \frac{\varkappa^2}{3} G_{\mathbf{k}} (\boldsymbol{\alpha\pi}) u = 0,$$

т. е. согласно (44,7)

$$Ff' G_{\mathbf{k}} (\boldsymbol{\alpha\varkappa}) u = Ff\, G_{\mathbf{k}} (\boldsymbol{\alpha\varkappa}) u. \tag{44,32}$$

Аналогичным путем легко показать, что

$$Ff'\left((\varkappa\alpha)(\alpha\pi)-(\alpha\pi)(\alpha\varkappa)\right)u = Ff\left((\alpha\varkappa)(\alpha\pi)-(\alpha\pi)(\alpha\varkappa)\right)u. \quad (44,33)$$

Учитывая последние соотношения, мы приведем (44,21) к виду

$$\sum\overline{S_1} = \sum\overline{S_1'} + \sum\overline{S_1''}, \quad (44,34)$$

причем величина

$$\sum\overline{S_1'} = \left\{-\left(Q\frac{\varkappa}{G_0}+\frac{\varkappa}{G_0^3}P\right)\frac{1}{2P^2}k_0\rho_3(\alpha\pi) - \right.$$
$$\left. -\left(Q^2+\frac{\varkappa}{G_0^3}P+Q\right)\frac{1}{2P^2}(\alpha\varkappa)(\alpha\pi)\right\}u \quad (44,35)$$

оказывается пропорциональной члену $\rho_3(\alpha\pi)u$, приводящему к энергии дополнительного электрического момента, а величина

$$\sum\overline{S_1''} = \left\{\frac{G^2}{2}\left(\frac{1}{PP'}-\frac{1}{P^2}\right)+\frac{1}{4}\left[\frac{QQ'}{PP'}(G_0^2+G_0'^2)-2\frac{Q^2G_0^2}{P^2}\right] - \right.$$
$$-G_k(G_k+k_0\rho_3)\left(\frac{Q+Q'}{2PP'}-\frac{Q}{P^2}\right)+$$
$$+\frac{\varkappa^3}{12K^5}\left(\frac{1}{P}+\frac{2k_0^2}{P^2}\right)\pi^2-\left(Q^2+\frac{\varkappa}{G_0^3}P\right)\frac{1}{2P^2}\pi^2+$$
$$\left.+\left(Q^2+\frac{\varkappa}{G_0^3}P\right)\frac{1}{2P^2}(\pi\varkappa)\right\}u \quad (44,36)$$

будет пропорциональна величине $\pi^2 u$ и приводит к основному члену, обусловливающему лэмбовский сдвиг уровней.

б) Полевая масса свободного электрона. Как известно, в волновом уравнении для электрона

$$\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}-c(\alpha\mathbf{p})-U-\rho_3 m_0 c^2\right)\psi = 0 \quad (44,37)$$

функция, определяющая взаимодействие с электромагнитным полем,

$$U = -e(\Phi-(\alpha A)) = e\alpha_\mu A_\mu,$$

где $\alpha_4 = i'I$, $A_4 = i'\Phi$, а также член, связанный с собственной энергией электрона,

$$U_0 = \rho_3 m_0 c^2,$$

представляют собой скалярные величины. Остальные члены

$$-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}-c(\alpha\mathbf{p}) = -\hbar c\alpha_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}$$

также образуют скаляр, что, впрочем, совершенно естественно, так как все величины, входящие в уравнение, должны иметь одинаковую тензорную размерность. В противном случае уравнение не будет релятивистски инвариантным.

Если учитывать взаимодействие электрона с виртуальным электромагнитным полем, то, как уже отмечалось выше, в волновом уравнении электрона появляются некоторые новые члены[1]), в частности связанные с продольной

$$U^{\text{прод}}_{\text{собств}} = \frac{e^2}{\pi}\int_0^\infty d\varkappa$$

и поперечной

$$U^{\text{попер}}_{\text{собств}} = \frac{e^2}{\pi k_0}\int_0^\infty \varkappa\, d\varkappa$$

электромагнитной собственной энергией [см. (25,33) и (26,46)]. Эти члены не обладают необходимой тензорной размерностью, и поэтому их появление нарушает релятивистскую инвариантность волнового уравнения.

В развиваемой симметричной теории электронов и позитронов обе эти энергии исчезают.

В то же время энергия взаимодействия электрона с вакуумными электронами не обращается в нуль, и это приводит к появлению в уравнении (44,37) дополнительных членов, которые можно сопоставить с новой (т. е. третьей по счету) собственной массой.

Прежде всего найдем полевую массу свободного электрона. Полагая внешнее электромагнитное поле U равным нулю, мы получаем с помощью (44,20) следующее выражение для оператора самодействия:

$$\sum S_0 = \frac{1}{P}\left(\frac{2\varkappa}{G_0}+1\right)k_0\rho_3 + \frac{1}{P}\left[\frac{\varkappa}{G_0}(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{k}) - \left(1+\frac{\varkappa}{G_0}\right)(\boldsymbol{\alpha\varkappa})\right], \qquad (44,38)$$

причем согласно (44,16)

$$P = (\varkappa^2 + \varkappa G_0 - (\mathbf{k}\boldsymbol{\varkappa})).$$

Ограничиваясь при разложении в ряд величинами порядка $(\mathbf{k}\boldsymbol{\varkappa})/K^2$ и принимая во внимание, что при усреднении по направлениям вектора $\boldsymbol{\varkappa}$ имеют место соотношения

$$\overline{(\boldsymbol{\alpha\varkappa})} = 0, \quad \overline{(\boldsymbol{\alpha\varkappa})(\mathbf{k}\boldsymbol{\varkappa})} = \frac{1}{3}\varkappa^2(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{k}),$$

мы получим:

$$\sum S_0 = \frac{2\varkappa+K}{K\varkappa(K+\varkappa)}k_0\rho_3 + \left(\frac{1}{K(K+\varkappa)} - \frac{1}{3K^2} - \frac{\varkappa^2}{3K^3(K+\varkappa)}\right)(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{k}),$$

---

[1]) Заметим, что функция V будет связана с функцией U при помощи соотношения

$$V = \langle \psi_0^+ U \psi_0 \rangle.$$

В данном случае обе функции равны друг другу.

откуда с помощью равенства (44,3):

$$U^{\text{эл-поз}}_{\text{собств}} = \frac{e^2}{4\pi^2} \int \sum \bar{S}_0 \frac{d^3\varkappa}{\varkappa} = \rho_3 \frac{\alpha}{\pi}\left(\frac{3}{2}\int\limits_0^\infty \frac{d\varkappa}{K} - \frac{1}{4}\right) m_0 c^2 + (\alpha \mathbf{k}) \frac{e^2}{6\pi}.$$

Последняя величина (энергия самодействия) содержит две части. Первая часть, пропорциональная матрице ρ_3, расходится по логарифмическому закону, но является скаляром, т. е. обладает той же тензорной размерностью, что и величина U_0, связанная с собственной энергией. Вторая же часть, пропорциональная произведению $(\alpha\mathbf{k})$, является нерасходящейся величиной, но не образует скаляра в четырехмерном пространстве.

Заметим, что выражение для $U^{\text{эл-поз}}_{\text{собств}}$, полученное нами с учетом влияния электрон-позитронного вакуума, обладает тем основным преимуществом перед $U^{\text{прод}}_{\text{собств}}$ и $U^{\text{попер}}_{\text{собств}}$, что содержит часть, обладающую необходимой тензорной размерностью.

Исследуем более подробно часть взаимодействия, пропорциональную матрице ρ_3, которая связана с дополнительной массой Δm соотношением

$$\Delta m = \frac{\alpha}{\pi}\left(\frac{3}{2}\int\limits_0^\infty \frac{d\varkappa}{K} - \frac{1}{4}\right) m_0.$$

Из последнего равенства следует, что дополнительная масса Δm может появиться только в том случае, если электрон обладает собственной массой m_0 не электромагнитного происхождения. Дополнительная масса имеет более слабую расходимость (логарифмическую), чем, скажем, классическая электромагнитная масса точечного электрона, которая расходится линейно:

$$m^{\text{эл}} = \lim_{R\to 0} \frac{e^2}{2c^2 R} = \frac{e^2}{c^2\pi}\int\limits_0^\infty d\varkappa.$$

Появление расходимости для собственной массы опять-таки связано с суммированием по бесконечному числу виртуальных состояний. Однако в теории вакуума, где учитываются состояния как с положительной, так и с отрицательной энергиями, происходит известное понижение степени расходимости.

В квантовой теории, как правило, логарифмически расходящиеся члены можно приравнивать величинам, имеющим порядок единицы. В самом деле, ограничивая этот интеграл некоторым максимальным значением $\varkappa_{\text{макс}} = E_{\text{макс}}/c\hbar$, для Δm найдем:

$$\Delta m \sim \alpha m_0 \ln \frac{E_{\text{макс}}}{m_0 c^2}.$$

Величина Δm будет сохранять порядок $(1/137)m_0$ при сравнительно широком диапазоне изменения $E_{\text{макс}}$. Величина Δm становится порядка m_0 лишь при $E_{\text{макс}} \sim 10^{53} m_0 c^2$, что соответствует собственной энергии массы, в 100 000 раз превышающей массу Земли. Тем не менее, указанная логарифмическая расходимость в области больших значений волновых чисел имеет принципиальный характер и не связана, как это имеет место в случае «инфракрасной катастрофы» [см. § 37, п. г)], с незаконностью применения метода возмущений. Для устранения этих расходимостей приходится выходить за рамки существующей теории.

Большим достижением современной квантовой теории поля явилось то обстоятельство, что эффекты реакции собственных полей были разделены на две части: наблюдаемые и ненаблюдаемые. Наблюдаемая часть в эффектах квантовой электродинамики, как правило, всегда давала в первых приближениях теории возмущений конечный результат, и в тех случаях, когда предсказания теории можно было проверить на опыте, они как правило находились в прекрасном согласии с экспериментом.

До настоящего времени мы не можем указать ни одного серьезного расхождения между теорией и экспериментом, превышающего пределы точности вычислений.

Для исключения ненаблюдаемой части, которая наряду с конечными членами содержит также и расходящиеся, была предложена теория регуляризации. Современная теория регуляризации далека от своего математического завершения, но, тем не менее, она представляет собою значительный шаг вперед в развитии современной квантовой теории и, можно надеяться, что она сыграет известную роль при построении последовательной теории элементарных частиц.

Если при регуляризации достаточно ввести конечное число величин, с помощью которых удается скомпенсировать расходящиеся члены, то теория является ренормируемой. Если этого сделать нельзя, то теория — неренормируема. В качестве примера ренормируемой теории можно привести квантовую электродинамику, когда энергия взаимодействия между электронами (позитронами) и электромагнитным полем полностью определяется выражением

$$U = e\alpha_\mu A_\mu. \tag{44,39a}$$

Если первоначальное взаимодействие содержало бы еще дипольные члены вида

$$U = \mu\alpha_{\mu\nu} H_{\mu\nu}, \tag{44,39б}$$

как это имеет место в тензорном и псевдовекторном вариантах мезодинамики, то теория стала бы неренормируемой.

в) Различные методы регуляризации. В современной квантовой электродинамике расходимости, связанные с взаимодействием (44,39а), вызываются бесконечной собственной массой электрона, обусловленной

его взаимодействием с полем флуктуаций фотонов [обменная часть взаимодействия, см. п. б) этого параграфа] и бесконечным собственным зарядом, связанным с поляризацией вакуума [необменная часть взаимодействия, см. § 45, пп. б) и в)].

Поэтому вопросы регуляризации, т. е. устранении, например, бесконечной собственной массы электрона, возникли уже в классической теории Лоренца, и соответствующие классические приемы регуляризации были подробно рассмотрены нами в монографии «Классическая теория поля» (§§ 33 и 34).

Согласно терминологии Паули и Вилларса[1]) все методы регуляризации удобно разбить на реалистические и формалистические. В реалистических методах регуляризиции вводятся вспомогательные поля, связанные либо с нелинейностями (теория Борна), либо с высшими производными (теория Боппа — Подольского). Эти вспомогательные поля носят реальный характер и поэтому входят в окончательные результаты. Как правило, в реалистических методах в том или ином виде искусственно вводится радиус электрона. В настоящее время реалистические методы получили свое продолжение в нелинейных и нелокальных теориях. В формалистических методах для компенсации бесконечностей вводятся вспомогательные поля, которые из окончательных результатов исчезают, например путем устремления к нулю искусственно введенного радиуса электрона или масс, связанных со вспомогательными полями, — к бесконечности. К числу формалистических методов можно отнести классическую теорию точечного электрона Дирака, квантовые методы регуляризации Фейнмана, Паули — Вилларса, Дайсона, Швингера и т. д.

Остановимся более подробно на методе регуляризации Паули — Вилларса, который является наиболее прозрачным и простым в математическом отношении и вполне достаточным для устранения расходимостей в простейших задачах, рассматриваемых нами.

При изложении метода регуляризации Паули — Вилларса мы со всей ясностью будем подчеркивать трудности и неоднозначности теории регуляризации, вместо того чтобы пытаться затушевывать их благоприятными для теории аргументами.

Применим регуляризацию (т. е. релятивистски инвариантное обрезание) к вычислению вакуумных интегралов. Все коэффициенты даже при наличии внешнего поля (см. ниже) могут быть представлены в виде определенного интеграла

$$I = \int f(\varkappa, K)\frac{d^3\varkappa}{K} = I(k_0), \tag{44,40}$$

где $K = \sqrt{\varkappa^2 + k_0^2}$, а $k_0\hbar/c$ — масса частиц, сопоставленных с электрон-позитронным полем, которое в данном случае участвует

[1]) W. Pauli and F. Villars, Rev. Mod. Phys. 21, 439 (1949); русский перевод в сб. «Сдвиг уровней атомных электронов», ИЛ, 1950, стр. 139.

в переносе взаимодействия. Этот интеграл может быть представлен в виде

$$I = 2\int d^3\varkappa \int_0^\infty f(\varkappa, \eta)\,\delta\left(\eta^2 - \varkappa^2 - k_0^2\right) d\eta.$$

Методы регуляризации сводятся к тому, что вместо δ-функции вводится некоторая сглаженная функция, отличающаяся от нее лишь в малой окрестности светового конуса. В частности, в теории Паули — Вилларса конкретное релятивистски-инвариантное размазывание сводится к замене δ-функции суммой δ-функций:

$$\delta\left(\eta^2 - \varkappa^2 - k_0^2\right) \to \delta\left(\eta^2 - \varkappa^2 - k_0^2\right) + \sum_i c_i \delta\left(\eta^2 - \varkappa^2 - k_{0i}^2\right). \quad (44,41)$$

Осуществляя замену (44,41), мы получим вместо (44,40):

$$I \to I(k_0) + \sum_i c_i I(k_{0i}).$$

Решение для дополнительного взаимодействия ищется в виде разложения по величине ∇^2/k_0^2. Поэтому могут появиться следующие типы интегралов I:

$$I_{-2} = \int_0^\infty d\,\frac{\varkappa^3}{K} = \lim_{\varkappa_{\text{макс}} \to \infty}\left(\varkappa_{\text{макс}}^2 - \frac{1}{2}k_0^2\right), \quad (44,42\text{а})$$

$$I_0 = \int_0^\infty \frac{d\varkappa}{K} = \lim_{\varkappa_{\text{макс}} \to \infty}\left(\ln 2\varkappa_{\text{макс}} - \ln k_0\right), \quad (44,42\text{б})$$

$$I_0' = \int_0^\infty \left(\frac{1}{K+\varkappa} - \frac{1}{2K}\right) d\varkappa = \frac{1}{4}, \quad (44,42\text{в})$$

$$I_2 = \int_0^\infty \frac{d\varkappa}{K^3} = \frac{1}{k_0^2}. \quad (44,42\text{г})$$

Как будет показано ниже, члены взаимодействия, пропорциональные интегралам I_0 и I_2, всегда будут обладать необходимой тензорной размерностью даже при наличии внешнего поля U. Другая же часть взаимодействия, пропорциональная интегралам I_0' или I_{-2}, является релятивистски неинвариантной величиной. Поэтому мы должны подобрать коэффициенты c_i и массы k_{0i} таким образом, чтобы неинвариантные члены $\left(I_{-2}\text{ и } I_0'\right)$ обратились в нуль, логарифмически расходящийся интеграл I_0 сделался бы конечным, а релятивистски инвариантные члены остались бы без изменения.

Мы сможем произвести требуемую регуляризацию, если введем следующие условия:

$$\sum_i c_i = -1, \tag{44,43а}$$

$$\sum_i c_i k_{0i}^2 = -k_0^2, \tag{44,43б}$$

$$\sum_i \frac{c_i}{k_{0i}^2} = 0, \tag{44,43в}$$

$$\sum_i c_i \ln k_{0i} + \ln k_0 = \mathrm{const}. \tag{44,43г}$$

Тогда мы будем иметь:

$$I_{-2} = \left(1 + \sum_i c_i\right) \lim_{\varkappa_{\text{макс}} \to \infty} \varkappa_{\text{макс}}^2 - \frac{1}{2}\left(k_0^2 + \sum_i c_i k_{0i}^2\right) = 0, \tag{44,44а}$$

$$I_0 = \left(1 + \sum_i c_i\right) \lim_{\varkappa_{\text{макс}} \to \infty} \ln 2\varkappa_{\text{макс}} - \left(\ln k_0 + \sum_i c_i \ln k_{0i}\right) =$$

$$= -\left(\ln k_0 + \sum_i c_i \ln k_{0i}\right), \tag{44,44б}$$

$$I_0' = \frac{1}{4}\left(1 + \sum_i c_i\right) = 0, \tag{44,44в}$$

$$I_2 = \frac{1}{k_0^2} + \sum_i \frac{c_i}{k_{0i}^2} = \frac{1}{k_0^2}. \tag{44,44г}$$

Мы сможем удовлетворить соотношению (44,43в), если выберем достаточно большие значения для вспомогательных масс (например, $k_{0i}/k_0 \to \infty$).

Таким образом, при $k_{0i} \to \infty$ правила регуляризации Паули — Вилларса сводятся к соотношениям (44,43а) и (44,43б).

На первый взгляд может показаться, что правила регуляризации (44,43) страдают отсутствием однозначности. Однако от выбора решения зависят только члены, пропорциональные интегралу I_0, которые не являются для нас существенными, так как они автоматически могут быть исключены из теории с помощью перенормировки массы (см. ниже) или заряда [см. § 45, п. в)]. Поэтому мы не нарушим единственности нашего решения, если в правой части равенства (44,43г) постоянную величину положим равной нулю. Тогда

$$\ln k_0 + \sum_i c_i \ln k_{0i} = 0, \tag{44,43г$'$}$$

и все величины, пропорциональные интегралу I_0, должны также обращаться в нуль. В этом случае наша задача становится совершенно однозначной.

Например, введем три вспомогательные массы:

$$k_{01} = k_0\beta,$$

$$k_{02} = k_0\beta^3\left(1+\sqrt{1-3\frac{1}{\beta^4}+2\frac{1}{\beta^6}}\right)^{1/2},$$

$$k_{03} = k_0\beta^3\left(1+\sqrt{1-3\frac{1}{\beta^4}+2\frac{1}{\beta^6}}\right).$$

Полагая затем коэффициенты c_i соответственно равными

$$c_1 = -\frac{3}{2}, \quad c_2 = 1, \quad c_3 = -\frac{1}{2},$$

мы сможем удовлетворить необходимым равенствам (44,43), если будем стремить величину β, а следовательно, и все три вспомогательные массы, к бесконечности. При $\beta \to \infty$ комптоновские длины волн $\Delta_i = 1/k_{0i}$, соответствующие вспомогательным массам, будут стремиться к нулю, благодаря чему регуляризация будет носить δ-образный характер. Как известно, δ-функцию мы можем сконструировать бесчисленным множеством способов, и окончательные результаты совершенно не зависят от конкретного способа ее образования. Точно так же для δ-образной регуляризации совершенно несуществен конкретный выбор величин c_i и k_{0i}.

Если мы на коэффициенты c_i не наложим условия (44,43г'), то тогда уравнение Дирака

$$\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t} - c(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}) - U - \rho_3(m_0+\Delta m)c^2\right)\psi = 0$$

будет включать на совершенно равных основаниях как основную массу m_0, так и дополнительную полевую массу Δm. Как известно, в настоящее время мы не можем массу элементарных частиц вычислить теоретически, и она определяется опытным путем. Опытным же путем мы можем определить только суммарную массу $m_0+\Delta m$, которая является конечной величиной. Автоматическое включение полевой массы в основную без анализа подробностей компенсации расходящихся полевых добавок носит название перенормировки массы.

Таким образом, в результате регуляризации в нашем разложении должны остаться лишь члены, пропорциональные $I_2 = 1/k_0^2$, которые, как будет показано ниже, всегда будут обладать всеми необходимыми свойствами тензорной размерности.

Легко показать, что в случае отсутствия внешнего поля ($U = 0$ следующий член разложения $\left(\sim 1/k_0^2\right)$ оператора (44,38) обращается в нуль. Таким образом, вся или во всяком случае основная часть собственной массы электрона в этой теории регуляризации должна носить явно неполевой характер.

Как будет показано ниже, при наличии внешнего поля U члены, пропорциональные $1/k_0^2$, не обращаются в нуль. Соответствующую

этим членам энергию мы можем рассматривать как дополнительную полевую энергию взаимодействия между зарядом и электромагнитным полем, переносимую электрон-позитронным вакуумом.

С помощью метода Паули — Вилларса удобно производить регуляризацию во втором порядке теории возмущений. Матричные элементы в более высоких же порядках теории возмущений становятся чрезвычайно сложными, а число подлежащих вычислению расходящихся выражений значительно увеличивается.

Одна из попыток сформулировать правила исключения бесконечностей в матричных элементах любого порядка была сделана Дайсоном[1]), который при установлении правил отбрасывания расходящихся

[1]) F. Dyson, Phys. Rev. **75**, 1736 (1949); Matthews and Salam, Rev. Mod. Phys. **23**, 311 (1951); русский перевод см. в сб. «Новейшее развитие квантовой электродинамики», стр. 205, 327. Метод Дайсона так же, как метод Паули — Вилларса, относится к устранению расходимостей в области больших импульсов («ультрафиолетовая катастрофа»).

При графическом анализе матрицы рассеяния Дайсон разделил все графики на приводимые и неприводимые. Неприводимой называется такая часть графика, которая не может быть разделена на отдельные части, соединенные между собою одной линией, и не содержит внутри себя частей собственной энергии и вершинной части. В противном случае внутренняя часть графика называется приводимой.

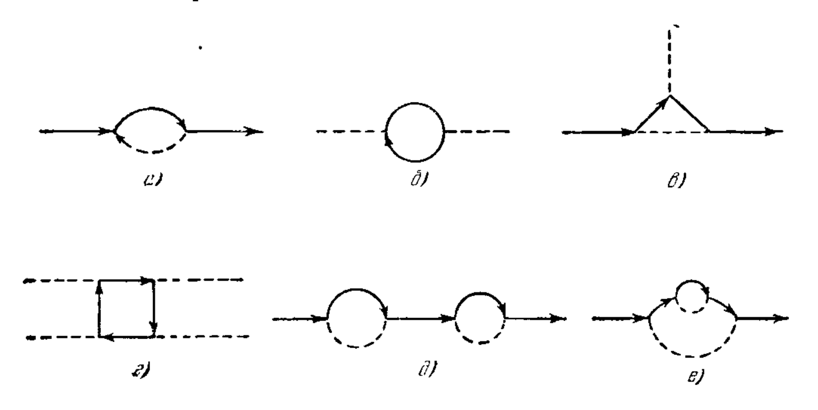


Рис. 22. Неприводимые и приводимые графики Фейнмана.

Рассматривая расходимости, связанные с неприводимыми внутренними частями графиков, Дайсон показал, что существует четыре вида расходимостей:

а) линейная, связанная с неприводимой частью собственной энергии электрона (рис. 22, *а*);

б) квадратичная, связанная с неприводимой частью собственной энергии фотона (рис. 22, *б*);

в) логарифмическая, связанная с неприводимой, так называемой вершинной, частью (рис. 22, *в*);

г) логарифмическая, связанная с неприводимыми частями рассеяния фотона фотонами (рис. 22, *г*).

Общий метод устранения указанных выше расходимостей заключается в следующем. Обозначим через $M(k, \varkappa)$ один из указанных выше матричных элементов, где под k и $\varkappa$ мы будем понимать внешние электронные и

выражений широко использовал технику графического изображения матричных элементов, предложенную Фейнманом [см. § 43, п. в)].

Введение графиков ничего принципиально нового в квантовую электродинамику не вносит, но, представляя собою вспомогательную иллюстрацию, они облегчают анализ многих общетеоретических вопросов, и, в особенности, матричных элементов, связанных с процессами высоких порядков.

Следует обратить внимание также на регуляризацию, использованную Швингером. Он ввел нижний предел s_0 для интеграла по собственному времени. Лишь в конце вычислений после регуляризации он полагает $s_0 = 0$. В этом случае расходящиеся интегралы становятся конечными. Если придать величине s_0 смысл минималь-

---

фотонные линии. Величина $M(k, \varkappa)$ разлагается в ряд по степеням $\alpha_\mu k_\mu - \rho_3 k_0$ и $\varkappa$; из этого разложения вычитается минимальное число членов, обеспечивающих сходимость. Указанным приемом производится устранение расходимостей в неприводимых внутренних частях графика.

Если рассматриваемая внутренняя часть графика или график в целом приводимы (см., например, графики рис. 22, *д*, *е*), то устранение расходимостей в нем производится последовательными стадиями, начиная с внутренних неприводимых частей. Эти последовательные шаги должны привести в конечном счете к конечной регуляризованной величине рассматриваемого графика в целом.

Недавно В. Гейзенберг [W. Heisenberg, Zs. f. Naturforsch. **10a**, 425 (1955); **12a**, 177 (1957); Zs. f. Phys. **144**, 1 (1956); Rev. Mod. Phys. **29**, 269 (1957)] начал развивать нелинейную теорию поля с индефинитной метрикой, которую по терминологии Паули следует отнести к «реалистическим». В этой теории часть лагранжиана, соответствующая массе покоя $k_0 \psi^+ \rho_3 \psi$, заменяется нелинейным членом, и поэтому общий лагранжиан принимает [вместо (22.7)] вид:

$$L = -\hbar c \left\{ \psi^+ \frac{1}{i} \alpha_\mu \psi_\mu \pm \frac{1}{2} l^2 \sum (\psi^+ \sigma_\mu \psi)^2 \right\},$$

т. е. для описания нелинейности избирается псевдовекторный вариант, причем под σ_4 в данном случае следует понимать четвертую компоненту псевдовектора $i'\rho_1$ [см. (19,1)], а не единичную матрицу I, как при вычислении матричных элементов [см. (21,13)]. Вообще же не исключено введение аналогичных нелинейных членов, составленных из скалярных, псевдоскалярных и т. д. величин или даже из их линейных комбинаций. Эти новые инварианты встречаются также и в работах Д. Д. Иваненко [Д. Иваненко, Sow. Phys. **13**, 141 (1938); Suppl. Nuovo Cim. **6**, 349 (1957); Д. Иваненко и М. Мирианошвили, ДАН СССР **106**, 413 (1956); Д. Иваненко и А. Бродский, ЖЭТФ **24**, 383 (1953); А. Соколов и Д. Иваненко, Квантовая теория поля, Гостехиздат, 1952, стр. 572], развивающего независимо от Гейзенберга нелинейную квантовую теорию для «универсального спинора», который должен описать основные свойства всех элементарных частиц.

Гейзенберг считает, что этот лагранжиан (возможно, в дальнейшем несколько подправленный на случай слабых взаимодействий) должен содержать в себе полную теорию элементарных частиц.

В данном случае функция L будет инвариантна относительно двух калибровочных преобразований:

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha}\psi \quad \text{и} \quad \psi \rightarrow e^{i\alpha\rho_1}\psi.$$

ного времени $s_0 = \hbar/M_0c^2$, то предельный случай $s_0 = 0$ будет соответствовать $M_0 \to \infty$, т. е. теория в целом будет носить явно «формалистический» характер. Более подробно см., например, [1]) и [2]).

Большое значение в развитии квантовой теории поля имеет также исследование вопросов улучшения теории возмущений. Как известно, отдельные члены ряда теории возмущений для функции Грина и вершинного оператора не являются инвариантными по отношению к ренормализационной группе. Вследствие этого в ультрафиолетовой области ряды теории возмущений оказываются расположенными не по степеням тонкой структуры α, а по степеням величины $\alpha \ln \frac{k^2_{\text{макс}}}{k_0^2}$.

В монографии Боголюбова и Ширкова (см. стр. 345) показано, что преобразование ренормализационно-неинвариантных разложений теории возмущений в ренормализационно-инвариантные приводит к улучшению теории возмущений.

В соответствии с этим мы будем иметь два закона сохранения (заряда и спина):

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}(\psi^+\alpha_\mu\psi) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial x_\mu}(\psi^+\rho_1\alpha_\mu\psi) = 0.$$

Из условия, что лагранжиан будет также инвариантен относительно преобразования

$$\psi \to a\psi + b\rho_1\widetilde{\psi}^{+\mathrm{T}},$$

где $a^2 + b^2 = 1$, а $\widetilde{\psi}^+$ получается из ψ с помощью преобразования зарядового сопряжения, Гейзенберг надеется с помощью удвоения числа векторов в гильбертовом пространстве описать изотопический спин частицы.

В основу теории Гейзенберга положены нуклоны, масса которых связана с длиной l соотношением $M = 7{,}426\, \hbar/cl$. Другие частицы рассматриваются как возбуждения или как результат слияния нуклонных полей, причем большую роль при этом должен играть изотопический спин. Для массы бозонов Гейзенберг получил значения меньшие, чем для протона. Это до некоторой степени напоминает старые теории слияния полей, например нейтринную теорию света или теорию Ферми и Янга, согласно которой π-мезоны состоят из двух нуклонов, масса которых «съедается» сильной энергией притяжения.

Наличие же индефинитной метрики позволяет надеяться, что при квантовании нелинейных уравнений расходящиеся члены могут в дальнейшем быть автоматически исключены.

Таким образом, нелинейная теория элементарных частиц является весьма перспективной; однака пока не будет разработан весьма сложный математический аппарат нелинейной теории, который позволит исследовать конкретные эффекты, с окончательными выводами спешить не следует. В самом деле, эта теория на сегодня является лишь началом большого нового направления в теории элементарных частиц.

[1]) Н. Н. Боголюбов и Д. В. Ширков, Введение в теорию квантованных полей, Гостехиздат, 1957.

[2]) Д. Д. Иваненко, Вступительная статья к сб. «Новейшее развитие квантовой электродинамики», ИЛ, 1954.

г) Вычисление полевой части электрического и магнитного моментов электрона. Коэффициенты $1/P$, Q и $1/G_0$ в (44,36) представим в виде

$$\frac{1}{P}=a_0[1+a_1(\varkappa\mathbf{k})], \qquad Q=b_0[1+b_1(\varkappa\mathbf{k})],$$
$$\frac{1}{G_0}=c_0[1+c_1(\varkappa\mathbf{k})]. \tag{44,45}$$

Строго говоря, величины a_0, b_0, c_0 должны зависеть еще от оператора $\mathbf{k}^2$, который, как было показано выше, коммутирует с функцией u. Однако в окончательных результатах, кроме этих коэффициентов, в произведение будут входить величины, пропорциональные $\mathbf{k}$. В нашем приближении, когда величинами порядка $\mathbf{k}^3u$ мы пренебрегаем, в коэффициентах a_0, b_0 и c_0 мы сразу можем отбросить величины порядка $\mathbf{k}^2$. Тогда с помощью равенств (44,10), (44,14) и (44,16) находим:

$$\left.\begin{aligned} a_0&=\frac{1}{\varkappa(K+\varkappa)}, & b_0&=\frac{K+\varkappa}{K}, & c_0&=\frac{1}{K},\\ a_1&=\frac{1}{\varkappa K}, & b_1&=\frac{\varkappa}{K^2(\varkappa+K)}, & c_1&=\frac{1}{K^2}. \end{aligned}\right\} \tag{44,46}$$

Подставляя (44,45) в (44,35) и учитывая соотношения (44,31) и (44,30), найдем:

$$\sum\overline{S'_1}=\left\{-\frac{\varkappa}{2}b_0c_0a_0^2-\frac{\varkappa}{2}c_0^3a_0+\frac{\varkappa^2}{3}b_0^2a_0^2(a_1+b_1)+\right.$$
$$\left.+\frac{\varkappa^2}{6}b_0a_0^2(2a_1+b_1)+\frac{\varkappa^3}{6}a_0c_0^3(a_1+3c_1)\right\}k_0\rho_3(\boldsymbol{\alpha\pi})u. \tag{44,47}$$

После ряда алгебраических преобразований последнее равенство приводится к виду

$$\sum\overline{S'_1}=\left[\frac{1}{3\varkappa k_0^4}\left(K-\varkappa-\frac{1}{2}\frac{k_0^2}{K}\right)+\frac{1}{2\varkappa K^3}-\frac{k_0^2}{2\varkappa K^5}\right]k_0\rho_3(\boldsymbol{\alpha\pi})u. \tag{44,48}$$

Соответствующее дополнительное взаимодействие мы можем найти с помощью равенства $V'^A=\langle\psi_0^+U'^A\psi_0\rangle$, где

$$U'^A=\frac{e^2}{\pi}\int_0^\infty \varkappa\sum\overline{S'_1}\,d\varkappa. \tag{44,49}$$

Воспользовавшись далее формулами для определенных интегралов:

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\infty\left(K-\varkappa-\frac{k_0^2}{2K}\right)d\varkappa=\frac{1}{4}k_0^2,\\ &\int_0^\infty\frac{d\varkappa}{K^3}=\frac{1}{k_0^2}, \qquad \int_0^\infty\frac{d\varkappa}{K^5}=\frac{2}{3}\frac{1}{k_0^4}, \end{aligned}\right\} \tag{44,50}$$

получим:

$$U'^A = \frac{i\alpha}{2\pi}\mu_0\rho_3(\boldsymbol{\alpha}\nabla)\Phi = \frac{\alpha}{2\pi}\mu_0\rho_2(\boldsymbol{\sigma E}), \tag{44,51}$$

где $\mu_0 = e\hbar/2m_0c$ — магнетон Бора, $\alpha = e^2/\hbar c$ — постоянная тонкой структуры.

Для того чтобы определить дополнительное взаимодействие при наличии еще внешнего магнитного поля, мы должны согласно (44,2) потенциал Φ заменить на $\Phi - (\boldsymbol{\alpha A})$. Тогда находим[1]):

$$U'^A = \frac{\alpha}{2\pi}\mu_0[\rho_3(\boldsymbol{\sigma H}) + \rho_2(\boldsymbol{\sigma E})]. \tag{44,52}$$

Сравнивая (44,52) с (24,5), мы видим, что электрон должен обладать полевым магнитным моментом

$$\mu^{\text{полев}} = -\frac{\alpha}{2\pi}\mu_0. \tag{44,53}$$

Как было указано в § 17, в нерелятивистском приближении электрон обладает еще кинематическим магнитным моментом, равным магнетону Бора, взятому с обратным знаком, $-\mu_0$. Поэтому полный магнитный момент электрона будет равен

$$\mu = -\left(1 + \frac{\alpha}{2\pi}\right)\mu_0.$$

---

[1]) Заметим, что выражение для дополнительной энергии при наличии магнитного поля может быть получено также непосредственно из формулы (43,50), если положить

$$u = \frac{e}{c\hbar}(\boldsymbol{\alpha A})$$

и ограничиться величииами первого порядка относительно оператора **k**.

В этом случае для оператора, связанного с дополнительной энергией, мы находим:

$$U'^A = \frac{\alpha}{2\pi}\mu_0\rho_3(\boldsymbol{\sigma H}) + \frac{\alpha}{6\pi}e(\boldsymbol{\alpha A}). \tag{44,51a}$$

Сопоставление (44,51а) с (44,51) показывает, что член взаимодействия, связанный с дополнительным моментом электрона, обладает необходимым свойством релятивистской инвариантности. Однако второй член

$$\frac{\alpha}{6\pi}e(\boldsymbol{\alpha A})$$

не является релятивистски ииварнантным, так как соответствующее ему дополиеиие $(-\alpha e\Phi/6\pi)$ для образоваиия скаляра в формуле (44,51а) отсутствует.

Для исключения неинвариантного члена в формуле (44,51а) мы должны применить при вычислении иитегралов правила регуляризации (44,44). Тогда неинвариантный член $\alpha e(\boldsymbol{\alpha A})/6\pi$, пропорциональный интегралу I_0', обратится в нуль, а релятивистски инвариантный член $\alpha\mu_0\rho_3(\boldsymbol{\sigma H})/2\pi$, пропорциональный интегралу I_2, останется без изменения.

Здесь важно подчеркнуть, что значение полевой добавки к магнитному моменту получается совершенно естественно в рамках общей теории поля и находится в хорошем согласии с экспериментом (более подробно см. § 47).

д) Вычисление флуктуационной части энергии взаимодействия. Найдем вторую часть энергии взаимодействия, определяемую формулой (44,36), которая приводит к флуктуационному сдвигу[1]) уровней. Все члены, входящие в формулу (44,36) могут быть разбиты на три части. Первая часть не зависит явно от оператора $\boldsymbol{\pi}$, т. е. пропорциональна π^0; вторая часть пропорциональна $(\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{\pi})$ и, наконец, третья пропорциональна π^2.

Записывая остальные величины, входящие в (44,36), в виде

$$F = F_0(1 + F_1(\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{k})), \quad f = f_0(1 + f_1(\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{k})), \tag{44,54}$$

удобно при вычислении элементов, пропорциональных π^0, воспользоваться соотношением

$$Ff - Ff' = Ff - F'f = F_0 f_0 \frac{F_1 f_1 \varkappa^2}{6} \pi^2, \tag{44,55}$$

которое получается после усреднения всего выражения по вектору $\boldsymbol{\varkappa}$. Элементы, пропорциональные $(\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\varkappa})$, могут быть вычислены с помощью формулы

$$F(\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\varkappa}) = F_0 F_1 \frac{\varkappa^2}{3} (\mathbf{k}\boldsymbol{\pi}) = F_0 F_1 \frac{\varkappa^2 \pi^2}{6}. \tag{44,56}$$

Наконец, для элементов, пропорциональных оператору π^2, можно просто положить

$$F\pi^2 = F_0 \pi^2. \tag{44,57}$$

Подставляя выражения (44,55), (44,56) и (44,57) в формулу (44,36) находим:

$$\sum \overline{S_1''} = \Big[-\frac{1}{12} k_0^2 a_0^2 a_1^2 \varkappa^2 - \frac{1}{12} a_0^2 b_0^2 c_0^{-2} \varkappa^2 (a_1 + b_1 - 2c_1)(a_1 + b_1) + \\ + \frac{1}{3} k_0^2 a_0^2 b_0 (b_1 + a_1) a_1 \varkappa^2 + \frac{1}{12} \varkappa^3 K^{-5} (a_0 + 2k_0^2 a_0^2) - \\ - \frac{1}{2} (a_0^2 b_0^2 + a_0 K^{-3} \varkappa) + \frac{1}{6} a_0^2 b_0^2 \varkappa^2 (a_1 + b_1) + \\ + \frac{1}{12} a_0 c_0^3 (a_1 + 3c_1) \varkappa^3 \Big] \pi^2 u, \tag{44,57a}$$

---

[1]) Флуктуационный сдвиг, как мы отмечали, может быть получен в результате учета взаимодействия электрона с вторично квантованным электромагнитным полем.

откуда после простых алгебраических преобразований имеем:

$$\sum \overline{S_1''} = \left[-\frac{1}{3\varkappa k_0^2}\left(\frac{1}{\varkappa} - \frac{1}{K}\right) + \frac{1}{6\varkappa k_0^4}\left(K - \varkappa - \frac{k_0^2}{2K}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{12}\frac{1}{\varkappa K^3} - \frac{k_0^2}{6\varkappa K^5}\right]\pi^2 u. \qquad (44{,}57б)$$

Заметим, что при вычислении энергии связи [см. (44,3)]

$$V''^A = \langle \psi_0^+ U''^A \psi_0 \rangle,$$

где

$$\overline{U''^A} = \frac{e^2}{\pi}\int_0^\infty \varkappa \sum \overline{S_1''}\, d\varkappa, \qquad (44{,}58)$$

интеграл

$$I_0 = \int_0^\infty \left(\frac{1}{\varkappa} - \frac{1}{K}\right) d\varkappa \qquad (44{,}59)$$

логарифмически расходится на нижнем пределе. Однако эта расходимость («инфракрасная катастрофа») не представляет собою принципиальной трудности, а связана, как было уже указано [§ 37, п. г)], с не совсем корректным способом разложения равенства (44,17) по величине

$$\gamma = \frac{e\Phi}{c\hbar\varkappa}, \qquad (44{,}60)$$

которое нельзя производить при малых значениях $\varkappa$.

Для того чтобы избежать «инфракрасной катастрофы», мы должны вычислить величину $\sum \overline{S_1''}$ при малых значениях $\varkappa$, не прибегая к разложению по величине γ. Это будет нами сделано в конце параграфа.

Выделяя в интеграле (44,59) логарифмически расходящийся член, получаем:

$$I_0 = \int^{k_0} \frac{d\varkappa}{\varkappa} - \ln 2. \qquad (44{,}61)$$

Учитывая, далее, значения интегралов (44,50), находим для оператора полевой энергии (44,58) следующее выражение[1]):

$$U''^A = -\frac{1}{3\pi k_0^2}\alpha e\left(\int_0^{k_0} \frac{d\varkappa}{\varkappa} - \ln 2 + \frac{11}{24}\right)\nabla^2\Phi. \qquad (44{,}62)$$

[1]) С полуклассическим выводом формулы (44,62) можно познакомиться, например, в монографии «Классическая теория поля», стр. 458.

При наличии еще магнитного поля будем иметь:

$$U''^A = -\frac{1}{3\pi k_0^2}\alpha e\left(\int_0^{k_0}\frac{d\varkappa}{\varkappa} - \ln 2 + \frac{11}{24}\right)\nabla^2(\Phi - (\boldsymbol{\alpha}\mathbf{A})). \quad (44,63)$$

Последняя формула может быть получена или с помощью релятивистски-инвариантного обобщения выражения (44,62) [см. соотношение (44,2)] [1]) или путем непосредственного вычисления, если положить в формуле (44,3)

$$u = -\frac{e}{c\hbar}(\Phi - (\boldsymbol{\alpha}\mathbf{A})). \quad (44,64)$$

В последнем случае следует производить вычисления с точностью до величины третьего порядка малости относительно оператора $\mathbf{k}$, поскольку матрица $\boldsymbol{\alpha}$ имеет порядок $\mathbf{k}/k_0$, точнее,

$$\psi_0^+\boldsymbol{\alpha}\psi_0 \sim \psi_0^+\frac{\mathbf{k}}{k_0}\psi_0.$$

е) Устранение инфракрасной катастрофы. Найдем прежде всего сумму $\sum S_1''$ при малых значениях $\varkappa$, не прибегая к разложению по величине γ. Для этого в исходной формуле (43,44) сделаем преобразование

$$\frac{1}{K_0 - K_{n_+} - \varkappa} = -\frac{1}{\varkappa} + \frac{(K_0 - K_{n_+})^2}{\varkappa^2(K_0 - K_{n_+} - \varkappa)} - \frac{K_0 - K_{n_+}}{\varkappa^2}.$$

Далее, с помощью формулы (43,51) можно показать, что для членов, пропорциональных $(K_0 - K_{n_+})^2$, имеет место замена

$$(K_0 - K_{n_+})^2 \to -(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\varkappa})^2.$$

Из (43,51) и (43,46) следует, что члены, пропорциональные $(K_0 - K_{n_+}) \sim (\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\varkappa})$, вообще исчезают. Отбрасывая в случае нерелятивистского приближения члены с отрицательной энергией $(\psi_{n_+} = \psi_n, \psi_{n_-} = 0)$, полагая

$$e^{i\varkappa r} \approx 1 \text{ и } \boldsymbol{\alpha} = \frac{\boldsymbol{k}}{k_0}$$

и принимая во внимание равенство (44,31), а также, что $\alpha_4 = i'I$, получим:

$$V^A = \frac{e^2}{4\pi^2}\sum_n\int\left[\frac{\langle\psi_0^+\psi_n\rangle\langle\psi_n^+\psi_0\rangle}{\varkappa^2} - \frac{2}{3}\frac{\langle\psi_0^+\mathbf{k}\psi_n\rangle\langle\psi_n^+\mathbf{k}\psi_0\rangle}{\varkappa(\varkappa + K_n - K_0)k_0^2}\right]d^3\varkappa. \quad (44,65)$$

---

[1]) Релятивистски инвариантное обобщение формулы (44,62) является вполне законным, поскольку оператор U''^A, пропорциональный интегралу I_2 [см. соотношение (44,42г)] должен образовывать четырехмерный скаляр.

С помощью соотношения

$$\frac{1}{K_0-K_n-\varkappa}=\frac{1}{\varkappa}\left(\frac{K_0-K_n}{K_0-K_n-\varkappa}-1\right),$$

а также равенства (43,46) легко показать, что обменное взаимодействие V^A состоит из двух частей. Часть

$$V_0^A=\frac{e^2}{4\pi^2}\int\left\langle\psi_0^+\left(1-\frac{2}{3}\frac{\mathbf{k}^2}{k_0^2}\right)\psi_0\right\rangle\frac{d^3\varkappa}{\varkappa^2}$$

не зависит от внешнего поля, и поэтому мы ее исключим из дальнейшего рассмотрения. Другая же часть

$$V''^A=-\frac{2}{3}\frac{e^2}{\pi k_0^2}\sum_n\int\limits_0^\infty\frac{K_0-K_n}{K_n-K_0+\varkappa}|\boldsymbol{k}_{0n}|^2\,d\varkappa, \tag{44,66}$$

где

$$\boldsymbol{k}_{0n}=\langle\psi_0^+\mathbf{k}\psi_n\rangle=\frac{1}{i}\langle\psi_0^+\nabla\psi_n\rangle,$$

пропорциональная u (см. ниже), связана с энергией взаимодействия электрона с электростатическим полем.

При вычислении суммы по n в равенстве (44,66) мы не можем непосредственно воспользоваться формулой (43,46), поскольку под знаком суммы стоит величина K_n. Величина K_n, стоящая в числителе, может быть легко исключена с помощью соотношения (44,70) (см. ниже). Для того чтобы исключить величину K_n, стоящую в знаменателе, мы постараемся преобразовать (44,66) к выражению

$$V''^A=-\frac{2}{3}\frac{e^2}{\pi k_0^2}\sum_n\int\limits_0^\infty\frac{K_0-K_n}{\varkappa_0+\varkappa}|\boldsymbol{k}_{0n}|^2\,d\varkappa, \tag{44,67}$$

знаменатель которого не зависит от значка n.

Интегрируя по $\varkappa$ соотношения (44,66) и (44,67), находим уравнение для определения постоянной величины $\varkappa_0$:

$$\sum_n(K_0-K_n)|\boldsymbol{k}_{0n}|^2\ln\frac{K_\infty}{\varkappa_0}=\sum_n(K_0-K_n)|\boldsymbol{k}_{0n}|^2\ln\frac{K_\infty}{|K_0-K_n|}. \tag{44,68}$$

Верхний предел K_∞ следует положить равным бесконечности. Однако члены, зависящие от K_∞, сокращаются и не входят в окончательный результат. При $K_0=K_n$ интеграл следует брать в смысле главного значения.

Из равенства (44,68) находим искомое значение для величины $\varkappa_0$:

$$\ln \varkappa_0 = \frac{\sum\limits_n (K_0 - K_n)\,|\,\boldsymbol{k}_{0n}\,|^2 \ln |\,K_0 - K_n\,|}{\sum\limits_n (K_0 - K_n)\,|\,\boldsymbol{k}_{0n}\,|^2}, \tag{44,69}$$

которое не зависит от квантового числа n промежуточных состояний.

В нерелятивистском случае волновая функция ψ_n подчиняется уравнению

$$K_n\psi_n = \left(k_0 + \frac{\mathbf{k}^2}{2k_0} + u\right)\psi_n, \tag{44,70}$$

где

$$u = -\frac{e}{c\hbar}\,\Phi.$$

Отсюда получаем:

$$\left(K_0 - K_n\right)\langle\,\psi_0^+ \mathrm{k}_s \psi_n\,\rangle = \langle\,\psi_0^+\left(u\mathrm{k}_s - \mathrm{k}_s u\right)\psi_n\,\rangle.$$

Используя, далее, преобразование (43,46), находим:

$$(K_0 - K_n)\,\boldsymbol{k}_{0n}\boldsymbol{k}_{n0} = \langle\,\psi_0^+\,(u\mathbf{k}^2 - \mathbf{k}u\mathbf{k})\,\psi_0\,\rangle = -\,\langle\psi_0^+ \pi u \mathbf{k}\psi_0\,\rangle.$$

Принимая во внимание еще равенства

$$V''^A = \langle\,\psi_0^+ U''^A \psi_0\,\rangle, \qquad U''^A = \frac{e^2}{\pi}\int\limits_0^\infty \varkappa \sum \overline{S_1''}\,d\varkappa, \tag{44,71}$$

а также соотношение (44,27), получаем выражение для $\sum S_1''$, пригодное для сколь угодно малых $\varkappa$:

$$\sum \overline{S_1''} = -\frac{1}{3k_0^2}\,\frac{1}{\varkappa(\varkappa + \varkappa_0)}\,\pi^2 u. \tag{44,72}$$

Выражение (44,72) имеет место в нерелятивистском случае, т. е. когда величина $\varkappa$ изменяется в пределах $0 \leqslant \varkappa \ll k_0$. Сравним его с соответствующим выражением для $\sum \overline{S_1''}$ [см. соотношение (44,57б)], ограниченным лишь со стороны малых значений $\varkappa\,(\varkappa_0 \ll \varkappa)$. Как и следовало ожидать, в области, к которой оба соотношения одинаково применимы $(\varkappa_0 \ll \varkappa \ll k_0)$, вычисления $\sum \overline{S_1''}$ как по формуле (44,72), так и по формуле (44,57б) приводят к одинаковым результатам:

$$\sum \overline{S_1''} = -\frac{1}{3k_0^2\varkappa^2}\,\pi^2 u.$$

Поэтому весьма хорошим приближением для $\sum \overline{S_1''}$, пригодным для любых значений $\varkappa$, является выражение

$$\sum \overline{S_1''} = \left[-\frac{1}{3k_0^2\varkappa}\left(\frac{1}{\varkappa + \varkappa_0} - \frac{1}{K}\right) + \frac{1}{6\varkappa k_0^4}\left(K - \varkappa - \frac{k_0^2}{2K}\right) - \frac{1}{12\varkappa K^3} - \frac{k_0^2}{6\varkappa K^5}\right]\pi^2 u, \tag{44,73}$$

которое при малых значениях $\varkappa$ переходит в равенство (44,72), а при больших — в (44,57б).

Подставляя оператор $\sum \overline{S_1''}$ в формулу (44,58), мы получим выражение для полевой энергии, в котором устранены как «инфракрасные», так и «ультрафиолетовые» расходимости [1]), т. е. выражение для U''^A будет пропорционально сходящемуся интегралу.

Таким образом, вместо расходящегося выражения (44,62) мы будем теперь иметь конечное выражение

$$U''^A = -\frac{1}{3\pi k_0^2}\alpha e\left(\ln\frac{k_0}{\varkappa_0} - \ln 2 + \frac{11}{24}\right)\nabla^2\Phi. \qquad (44,74)$$

Найдем численное значение величины $\varkappa_0$. При самой грубой оценке мы можем положить

$$\varkappa_0 \sim |K_0 - k_0| = \frac{1}{c\hbar}|E_0 - m_0c^2|.$$

В частности, для атома водорода, когда состояние E_0 соответствует квантовому числу $n=2$, мы имеем:

$$|E_0 - m_0c^2| = \frac{m_0c^2}{2n^2}\alpha^2 = \frac{m_0c^2}{8}\alpha^2.$$

Отсюда находим:

$$\ln\frac{k_0}{\varkappa_0} \sim 2\ln\frac{2}{\alpha} \sim 10.$$

Более же точные расчеты, проделанные по формуле (44,69), дают:

$$\ln\frac{k_0}{\varkappa_0} = 7,6876.$$

§ 45. Поляризация электрон-позитронного вакуума [2])

а) Общие формулы. Согласно формуле (43,42) необменная часть взаимодействия может быть представлена в виде

$$V^N = e\int \psi_0^+\alpha_\mu A_\mu^{\text{вак}}\psi_0 d^3x, \qquad (45,1)$$

где

$$A_\mu^{\text{вак}} = \frac{e}{4\pi^2}\int\sum_n \delta_n\int d^3x'\psi_n^+(\boldsymbol{r}')\,e^{i\varkappa(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}\alpha_\mu\psi_n(\boldsymbol{r}')\frac{d^3\varkappa}{\varkappa^2}, \qquad (45,2)$$

---

[1]) Заметим, что, вычисляя U''^A с нерелятивистским выражением оператора $\sum \overline{S_1''}$, мы получаем расходящийся на верхнем пределе интеграл. Однако появившаяся ультрафиолетовая катастрофа является кажущейся, поскольку это выражение неприменимо для больших значений $\varkappa$.

[2]) P. A. M. Dirac, Proc. Cambr. Phil. Soc. **30**, 150 (1934); см. также W. Heisenberg, Zs. f. Phys. **90**, 209 (1934); Д. Иваненко и А. Соколов, Sow. Phys. **11**, 590 (1937).

или

$$\nabla^2 A_\mu^{\text{вак}} = -2\pi e \sum_n \delta_n \psi_n^+ (\boldsymbol{r}) \alpha_\mu \psi_n (\boldsymbol{r}). \tag{45,3}$$

Отсюда видно, что величина $A_\mu^{\text{вак}}$ является потенциалом электромагнитного поля, которое возникает благодаря поляризации электрон-позитронного вакуума.

В формуле (45,3) знаковую функцию δ_n мы можем представить в виде

$$\delta_n = \frac{K_n}{|K_n|} = \frac{\mathrm{H}_{\mathbf{k}}}{|\mathrm{H}_{\mathbf{k}}|}. \tag{45,4а}$$

Далее, учтем связь δ-функции с полной системой ортонормированных функций φ_n^+ и φ_n [1]):

$$\sum_n \varphi_n^+ (\boldsymbol{r}) \varphi_n (\boldsymbol{r}') = \delta (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') = \frac{1}{8\pi^3} \int e^{i\varkappa (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')} d^3\varkappa. \tag{45,4б}$$

Если в качестве ортонормированных функций взяты решения уравнения Дирака, мы должны еще принять во внимание, что каждое состояние имеет четыре решения (более подробно см. § 21), на которые действуют матрицы Дирака β. В этом случае вместо формулы (45,4б) мы будем иметь:

$$\sum_n \psi_n^+ (\boldsymbol{r}) \gamma \psi_n (\boldsymbol{r}') = \frac{1}{8\pi^3} \int e^{i\varkappa \boldsymbol{r}} \operatorname{Sp} \gamma e^{-i\varkappa \boldsymbol{r}'} d^3\varkappa. \tag{45,5}$$

В частности, полагая γ равной единичной матрице ($\gamma = I$), получим

$$\sum_n \psi_n^+ (\boldsymbol{r}) \psi_n (\boldsymbol{r}') = 4\delta (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}').$$

Появление множителя 4 связано с особой нормировкой функций Дирака, учитывающей возможность нахождения в заданном квантовом состоянии четырех частиц (например, в свободном состоянии с импульсом $\boldsymbol{p} = \hbar \boldsymbol{k}$ могут находиться два электрона с положительной энергией и два электрона с отрицательной энергией).

Принимая во внимание соотношения (45,4а) и (45,5) (последнее при $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}'$), мы получаем следующее дифференциальное уравнение для определения потенциалов поляризации:

$$\nabla^2 A_\mu^{\text{вак}} = -\frac{e}{4\pi^2} \int \operatorname{Sp} \left(\alpha_\mu \frac{\mathrm{H}_{\mathbf{k}-\varkappa}}{|\mathrm{H}_{\mathbf{k}-\varkappa}|} \right) d^3\varkappa. \tag{45,6}$$

При выводе последнего соотношения учтено также равенство (44,7), согласно которому

$$\mathrm{H}_{\mathbf{k}} e^{-i\varkappa \boldsymbol{r}} = e^{-i\varkappa \boldsymbol{r}} \mathrm{H}_{\mathbf{k}-\varkappa}, \tag{45,7}$$

---

[1]) См., например, «Классическая теория поля», стр. 21.

где

$$\mathrm{H}_{\mathbf{k}-\varkappa} = \mathrm{G}_{\mathbf{k}-\varkappa} + u = k_0\rho_3 + (\boldsymbol{\alpha}\mathbf{k}) - (\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\varkappa}) + u. \tag{45,8}$$

С помощью соотношений (44,11) и (44,12) находим:

$$\frac{\mathrm{H}_{\mathbf{k}-\varkappa}}{|\mathrm{H}_{\mathbf{k}-\varkappa}|} = \frac{\mathrm{G}_{\mathbf{k}-\varkappa}}{\mathrm{G}_0} + \frac{1}{\mathrm{G}_0+\mathrm{G}_0'}u - \frac{1}{\mathrm{G}_0\mathrm{G}_0'(\mathrm{G}_0'+\mathrm{G}_0)}(\mathrm{G}_{\mathbf{k}-\varkappa}u\mathrm{G}_{\mathbf{k}-\varkappa}). \tag{45,9}$$

Рассмотрим прежде всего случай наличия одного лишь электростатического поля:

$$u = -\frac{e}{c\hbar}\Phi.$$

Тогда

$$\frac{\mathrm{H}_{\mathbf{k}-\varkappa}}{|\mathrm{H}_{\mathbf{k}-\varkappa}|} = \frac{\mathrm{G}_{\mathbf{k}-\varkappa}}{\mathrm{G}_0} - \frac{(\mathrm{G}_0-\mathrm{G}_0')^2 - \pi^2 - \mathrm{G}_{\mathbf{k}-\varkappa}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\pi}) + (\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\pi})\mathrm{G}_{\mathbf{k}-\varkappa}}{2\mathrm{G}_0\mathrm{G}_0'(\mathrm{G}_0+\mathrm{G}_0')}u. \tag{45,10}$$

Отсюда легко показать, что

$$\mathrm{Sp}\,\frac{\mathrm{H}_{\mathbf{k}-\varkappa}}{|\mathrm{H}_{\mathbf{k}-\varkappa}|} = -\frac{2}{\mathrm{G}_0\mathrm{G}_0'(\mathrm{G}_0+\mathrm{G}_0')}\left((\mathrm{G}_0-\mathrm{G}_0')^2 - \pi^2\right)u. \tag{45,11}$$

В этом частном случае составляющие вектор-потенциала $A^{\text{вак}}$ не будут зависеть от внешнего поля Φ, а для скалярного потенциала находим выражение

$$\nabla^2\Phi^{\text{вак}} = -\frac{e}{2\pi^2}\int\frac{\pi^2 - (\mathrm{G}_0-\mathrm{G}_0')^2}{\mathrm{G}_0\mathrm{G}_0'(\mathrm{G}_0+\mathrm{G}_0')}u\,d^3\varkappa. \tag{45,12}$$

В нашем приближении потенциал $\Phi^{\text{вак}}$ должен быть вычислен с точностью до величины $\pi^2 u$. Поскольку, однако, левая часть равенства (45,12) имеет порядок $\pi^2\Phi^{\text{вак}}$, в правую часть мы должны включить члены, пропорциональные $\pi^4 u$.

Согласно (44,10)

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{G}_0 &= K_1\left(1 - \frac{2(\mathbf{k}\varkappa)}{K_1^2}\right)^{1/2}, \\ \mathrm{G}_0' &= K_1'\left(1 - \frac{2((\mathbf{k}-\boldsymbol{\pi})\varkappa)}{K_1^2}\right)^{1/2}, \end{aligned}\right\} \tag{45,13}$$

где

$$K_1 = \sqrt{K^2+\mathbf{k}^2} = \sqrt{k_0^2+\varkappa^2+\mathbf{k}^2},$$

$$K_1' = \sqrt{K^2+(\mathbf{k}-\boldsymbol{\pi})^2}.$$

Принимая во внимание, что оператор $\mathbf{k}^2$ коммутирует с функцией u [см. соотношение (44,26)], мы имеем:

$$uf(\mathbf{k}^2) = f((\mathbf{k}-\boldsymbol{\pi})^2)u = f(\mathbf{k}^2)u. \tag{45,14}$$

Подставляя (45,13) в равенство (45,12) и усредняя по углам вектора $\varkappa$ с помощью соотношений

$$\left.\begin{aligned} &\overline{(\varkappa A)} = 0, \quad \overline{(\varkappa A)(\varkappa B)} = \frac{\varkappa^2 (AB)}{3}, \quad \overline{(\varkappa A)(\varkappa B)(\varkappa C)} = 0, \\ &\overline{(\varkappa A)(\varkappa B)(\varkappa C)(\varkappa D)} = \frac{\varkappa^4}{15}[(AB)(CD) + (AC)(BD) + (AD)(BC)], \end{aligned}\right\} \qquad (45,15)$$

получаем:

$$\frac{\pi^2 - (G_0 - G_0')^2}{G_0 G_0' (G_0 + G_0')} = \frac{\pi^2}{2K^3} - \frac{\pi^2 \varkappa^2}{6K^5} - \frac{3\pi^2 \mathbf{k}^2}{4K^5} + \frac{5}{4}\frac{\pi^2 \mathbf{k}^2 \varkappa^2}{K^7} + \\ + \frac{5}{12}\frac{\pi^2 (\mathbf{k}(\mathbf{k}-\pi))\varkappa^2}{K^7} - \frac{21}{40}\frac{\pi^4 \varkappa^4}{K^9} - \frac{7}{12}\frac{\varkappa^4}{K^9}[\pi^2(\mathbf{k}(\mathbf{k}-\pi)) + 2(\pi\mathbf{k})(\pi(\mathbf{k}-\pi))]. \qquad (45,16)$$

Дальнейшие вычисления проделаем с помощью равенств (44,26) и (44,27):

$$\mathbf{k}^2 u = u\mathbf{k}^2, \quad (\pi u \mathbf{k}) = -\frac{1}{2}\pi^2 u.$$

Кроме того, из соотношения

$$\mathbf{k}^4 u = u\mathbf{k}^4,$$

которое легко получить, полагая в равенстве (44,25) $n = 4$, следует:

$$\pi^2 u \mathbf{k}^2 = \pi^2 \mathbf{k}^2 u = \frac{\pi^4}{4} u.$$

Отсюда легко преобразовать соотношение (45,16) к виду

$$\frac{(G_0 - G_0')^2 - \pi^2}{G_0 G_0' (G_0 + G_0')} = -\pi^2\left(\frac{1}{2K^3} - \frac{\varkappa^2}{6K^5}\right) + \pi^4\left(\frac{3}{16K^5} - \frac{5}{24}\frac{\varkappa^2}{K^7} + \frac{7}{80}\frac{\varkappa^4}{K^9}\right). \qquad (45,17)$$

Подставляя (45,17) в (45,12), имеем:

$$\nabla^2 \Phi^{\text{вак}} = \left[-\frac{2}{3\pi}\alpha\left(\int_0^\infty \frac{d\varkappa}{K} - \frac{5}{6}\right)\nabla^2 - \frac{\alpha}{15\pi k_0^2}\nabla^4 + \ldots\right]\Phi. \qquad (45,18)$$

При выводе последнего выражения мы приняли во внимание следующие равенства:

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\infty \left(\frac{\varkappa^2}{K^3} - \frac{\varkappa^4}{3K^5}\right) d\varkappa = \frac{2}{3}\left(\int_0^\infty \frac{d\varkappa}{K} - \frac{5}{6}\right), \\ &\int_0^\infty \left(\frac{\varkappa}{K}\right)^{2n} \frac{d\varkappa}{K^3} = \frac{1}{(2n+1)k_0^2}, \end{aligned}\right\} \qquad (45,19\text{a})$$

где $n = 0, 1, 2, 3$.

Найдем вектор-потенциал $A^{\text{вак}}$, возникающий в результате поляризации вакуума при наличии внешнего магнитного поля A. Подставляя в формулу (45,9) функцию взаимодействия u:

$$u = \frac{e}{c\hbar}(\alpha A),$$

получим:

$$\left(\alpha_n \operatorname{Sp} \alpha_n \frac{H_{\mathbf{k}-\varkappa}}{|H_{\mathbf{k}-\varkappa}|}\right) = -\frac{e}{c\hbar}\left(\pi^2 - (G_0 - G_0')^2\right)\frac{2}{G_0 G_0'(G_0+G_0')}(\alpha A) + \frac{4(\alpha(\mathbf{k}-\varkappa))}{G_0} + \frac{8e}{c\hbar}\left(\frac{1}{G_0+G_0'}(\alpha A) - \frac{1}{G_0G_0'(G_0+G_0')}(\alpha(\mathbf{k}-\varkappa))((\mathbf{k}-\varkappa)A)\right). \tag{45,19б}$$

Первый член правой части равенства (45,19б) приводит к следующему выражению:

$$\nabla^2(\alpha A^{\text{вак}}) = \left[-\frac{2}{3\pi}\alpha\left(\int_0^\infty \frac{d\varkappa}{K} - \frac{5}{6}\right)\nabla^2 - \frac{\alpha}{15\pi k_0^2}\nabla^4\right](\alpha A),$$

которое в совокупности с выражением (45,18) для скалярного потенциала $\Phi^{\text{вак}}$ образует четырехмерный скаляр. Второй и третий члены правой части равенства (45,19а) дают релятивистски неинвариантное выражение для $A_1^{\text{вак}}$, из которого видно, что вектор-потенциал, связанный с поляризацией вакуума, не обращается в нуль даже в случае отсутствия внешнего поля ($u = 0$).

Раскладывая второй и третий члены правой части равенства (45,19а) в ряд по величине $\mathbf{k}^2/k_0^2$, мы найдем неинвариантный добавочный член

$$\nabla^2(\alpha A_1^{\text{вак}}) = -\frac{e}{\pi}\left[\frac{4}{3}I_{-2} - \frac{1}{15}\mathbf{k}^2\right](\alpha\mathbf{k}) - \frac{\alpha}{\pi}\left[\frac{4}{3}I_{-2}(\alpha A) - \frac{1}{15}\pi^2(\alpha A) - \frac{4}{15}\mathbf{k}^2(\alpha A) - \frac{8}{15}(\alpha\mathbf{k})(\mathbf{k}A)\right]. \tag{45,19в}$$

Здесь расходящийся интеграл I_{-2} задан формулой (44,42а). Интересно отметить, что следующий неинвариантный член разложения, пропорциональный интегралу $I_2 = 1/k_0^2$ [см. соотношение (44,42 г)], обращается в нуль, т. е. [как мы отмечали в § 44, п. б)] члены, пропорциональные $1/k_0^2$, обладают необходимым свойством релятивистской инвариантности.

б) Полевая масса фотона. Выражение (45,19в) содержит бесконечные члены, пропорциональные A, которые отсутствуют в случае электростатического поля [см. соотношение (45,18)]. Появление

неинвариантных членов, как было отмечено в § 44, связано с тем обстоятельством, что в современной квантовой электродинамике некоторые члены самодействия могут нарушать релятивистскую инвариантность. Неинвариантые бесконечности появляются при исследовании проблемы собственной массы электрона (продольная и поперечная бесконечные массы электрона). Неинвариантные члены появляются при вычислении самодействия с учетом электрон-позитронного вакуума [см. § 44, п. б)]. Более того, появление подобных членов в (45,19в) непосредственно связано с несколько неожиданным вопросом о наличии полевой массы фотонов[1]). В самом деле, электромагнитное поле виртуально может порождать пару электрон — позитрон с последующим ее поглощением. Таким образом появляется специфическое самодействие. Однако мы знаем, что экспериментальные данные приводят к нулевому значению для массы покоя фотона; кроме того, современная электродинамика базируется на калибровочной инвариантности, что также существенным образом связано с отсутствием массы покоя у фотонов.

Для собственной энергии фотона мы получили к тому же явно неинвариантный результат, поскольку эти члены самодействия появляются лишь в дифференциальных уравнениях для вектор-потенциала и отсутствуют в уравнениях для скалярного потенциала. Чтобы избежать указанной трудности, мы должны применить метод регуляризации, использованный нами при вычислении обменной части взаимодействия [см. § 44, п. б)]. Тогда с помощью формул (44,44а) и (44,44в) легко показать, что вся неинвариантная часть самодействия (45,19в), а вместе с тем и полевая масса фотона обращаются в нуль.

в) Полевой добавок к заряду. Перейдем к анализу второго члена полевого взаимодействия, пропорционального величине $\nabla^2\Phi$. Несмотря на то, что коэффициент при нем логарифмически расходится, этот член обладает необходимым свойством релятивистской инвариантности (если с помощью метода регуляризации неинвариантную часть самодействия для вектор-потенциала $A_1^{\text{вак}}$ обратить в нуль) и поэтому входит как в уравнение для скалярного, так и для векторного потенциалов.

Принимая во внимание, что внешний потенциал удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2\Phi = -4\pi\rho, \tag{45,20}$$

---

[1]) G. Wentzel, Phys. Rev. 74, 1070 (1948).

Напомним, что статическое уравнение поля, которое можно сопоставить с частицами, имеющими массу покоя $m_0 = \varkappa_0\hbar/c$, согласно формуле (2,3) имеет вид

$$\left(\nabla^2 - \varkappa_0^2\right)\varphi = 0.$$

Поэтому появление в дифференциальном уравнении членов, пропорциональных A, может быть интерпретировано как наличие полевой массы у фотонов.

где ρ является плотностью внешних зарядов, мы находим для дополнительной плотности зарядов, связанных с поляризацией вакуума:

$$\rho^{\text{вак}} = -\frac{1}{4\pi}\nabla^2\Phi^{\text{вак}} = -\frac{2}{3\pi}\alpha\left(\int\limits_0^\infty \frac{d\varkappa}{K} - \frac{5}{6}\right)\rho.$$

Благодаря поляризации общий заряд электрона по абсолютному значению уменьшается и становится равным

$$e' = -e + e^{\text{вак}} = -e\left[1 - \frac{2}{3\pi}\alpha\left(\int\limits_0^\infty \frac{d\varkappa}{K} - \frac{5}{6}\right)\right]. \qquad (45,21)$$

Таким образом, некоторая часть заряда электрона может носить полевой характер, и если, как обычно, приравнять логарифмически расходящийся интеграл величине порядка единицы [см. § 44, п. б)], то найдем, что полевая часть заряда составляет не более 1/137 части всего заряда.

Природа полевой части заряда весьма напоминает собою природу полевой части массы, рассмотренную нами в § 44, п. б). Обе полевые добавки обладают необходимым свойством релятивистской инвариантности и обе расходятся по логарифмическому закону.

Так же как и в теории полевой массы, с помощью только перенормировки заряда [см. § 44, п. б)] мы не сможем избавиться от неинвариантных членов самодействия. Используя же метод регуляризации, который позволяет избавиться от неинвариантных членов [см. формулы (44,44б) и (44,44в)], мы преобразуем полевой заряд к виду

$$e^{\text{вак}} = e\alpha\frac{2}{3\pi}\left(\ln k_0 + \sum_i c_i \ln k_{0i}\right).$$

Неоднозначность величины $e^{\text{вак}}$ носит кажущийся характер. Полевую часть заряда, так же как и полевую часть массы, мы можем исключить или с помощью соответствующей перенормировки, или подчиняя компенсирующие поля еще дополнительному условию (44,43г').

г) Энергия поляризации. Следующий член разложения в дифференциальном уравнении для потенциалов поляризационных зарядов [см. уравнения (45,18) и (45,19б)] пропорционален $\nabla^4\Phi$ (или $\nabla^4 A$) и является конечной величиной, удовлетворяющей всем требованиям релятивистской инвариантности. Он не может быть исключен простой перенормировкой заряда и поэтому должен приводить к специфическим эффектам, которые могут быть обнаружены экспериментальным путем.

Эта часть четырехмерного потенциала $A_\mu^{\text{вак}}$ имеет вид

$$A_\mu^{\text{вак}} = -\frac{\alpha}{15\pi k_0^2}\nabla^2 A_\mu, \tag{45,22}$$

где A_μ — четырехмерный потенциал внешнего поля.

Подставляя (45,22) в (45,1), найдем общее выражение для необменной части взаимодействия:

$$V^N = \langle \psi_0^+ U^N \psi_0 \rangle, \tag{45,23}$$

где

$$U^N = \frac{\alpha e}{15\pi k_0^2}\nabla^2(\Phi - (\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{A})). \tag{45,24}$$

д) Общая энергия взаимодействия. Итак, наряду с обычной энергией взаимодействия электрона с полем

$$U = -e(\Phi - (\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{A}))$$

должна существовать дополнительная полевая энергия взаимодействия U', состоящая из следующих частей: части U'^A [см. формулу (44,52)], определяющей взаимодействие полевого момента с внешним полем, части U''^A [см. формулу (44,74)] и части U^N [см. формулу (45,24)], которые отличаются друг от друга численным значением коэффициента и пропорциональны $\nabla^2 U$, т. е.

$$U' = U'^A + U''^A + U^N = \frac{\alpha}{2\pi}\mu_0[\rho_3(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{H}) + \rho_2(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{E})] - \\ - \frac{1}{3\pi k_0^2}\alpha e\left(\ln\frac{k_0}{\varkappa_0} - \ln 2 + \frac{11}{24} - \frac{1}{5}\right)\nabla^2(\Phi - (\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{A})), \tag{45,25}$$

где $\mu_0 = e\hbar/2m_0c$ — боровский магнетон, $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137$ — постоянная тонкой структуры, а значение $\varkappa_0$ определяется формулой (44,69).

Положим вектор-потенциал $\boldsymbol{A}$ внешнего поля равным нулю. Тогда, пренебрегая членом взаимодействия, пропорциональным $\rho_2(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{E})$, мы найдем, что дополнительная энергия будет иметь порядок

$$U' = -\frac{e\alpha}{3\pi}\frac{1}{k_0^2}\ln\frac{k_0}{\varkappa_0}\nabla^2\Phi.$$

Наглядная интерпретация этой формулы с помощью квазиклассического метода, согласно которому этот сдвиг связан с движением электрона как броуновской частицы в флуктуационном поле виртуальных фотонов, была дана в § 28, п. и).

Среднее значение энергии (45,25) равно

$$V = \langle \psi_0^+ U' \psi_0 \rangle.$$

Рассматривая $v/c \sim \nabla/k_0 \sim |\boldsymbol{\alpha}|$ как величину первого порядка малости, мы можем заключить, что взаимодействие, пропорциональное $\rho_3(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{H})$, является величиной первого порядка малости,

а взаимодействие, пропорциональное $\rho_2(\sigma \mathbf{E})$ и $\nabla^2\Phi$ — второго порядка. Взаимодействие первого порядка малости ведет к дополнительному моменту электрона, а второго порядка — к сдвигу уровней. Оба этих теоретических вывода находятся не только в качественном, но также и в количественном соответствии с последними экспериментальными исследованиями. Это говорит прежде всего о том, что мы находимся на правильном пути исследования взаимодействия частиц с различными виртуальными полями. Таким образом, начинается новый этап познания явлений, самым тесным образом связанных с проблемой собственной массы элементарных частиц.

§ 46. Проблема атома водорода и теория вакуума

а) Постановка вопроса. Как известно, в результате классических опытов Рёзерфорда (1911) по рассеянию α-частиц тяжелыми ядрами[1]), была окончательно установлена планетарная модель атома.

В этой модели атом, положение которого в системе Менделеева определяется порядковым номером Z, имеет центральное ядро с положительным зарядом Ze, где e представляет собою элементарный положительный заряд ($e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ абс. эл.-стат. ед.). Вокруг ядра вращаются Z электронов с зарядом — e. Таким образом, атом в целом является электрически нейтральным. Простейшей моделью атома является модель атома водорода, состоящего из протона (ядро водорода) и вращающегося вокруг него электрона.

Прежде всего заметим, что планетарная модель является динамической, и поэтому нельзя объяснить ее устойчивое состояние на базе классической электродинамики. В самом деле, вращающийся со скоростью v по орбите радиуса a электрон обладает центростремительным ускорением $w = v^2/a$. Поэтому он должен излучать электромагнитную энергию (количество излучаемой в единицу времени энергии пропорционально квадрату ускорения $2e^2w^2/3c^3$) до тех пор, пока не упадет на ядро. Частота излучаемого света ν должна быть равна частоте вращения ν_0 ($\nu_0 = v/2\pi a$) или в случае, когда возможно излучение гармоник, может быть также кратна ей:

$$\nu = s\nu_0 \qquad (s = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \tag{46,1}$$

В то же время тщательное излучение спектральных линий атома водорода показывает, что все они могут быть объединены формулой

$$\nu = R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2}\right). \tag{46,2}$$

Здесь $R = 3{,}29 \cdot 10^{15}$ сек$^{-1}$ — постоянная Ридберга, а n и n' ($n' = n+1,\ n+2,\ \ldots$) являются целыми числами, получившими название квантовых чисел.

---

[1]) Более подробно см. § 36.

Полагая $n=1$, мы получим ультрафиолетовую серию Лаймана; при $n=2$ мы получим серию Бальмера, лежащую в видимой части спектра; при $n=3$ мы получим инфракрасную серию Пашена и т. д.

Классическая формула для частоты излучения (46,1) получается из формулы (46,2) лишь в предельном случае больших квантовых чисел, когда мы можем положить $s=n'-n \ll n$. Тогда формула (46,2) принимает вид

$$\nu=\frac{2R}{n^3}s,$$

совпадающий с формулой (46,1) ($\nu_0=2R/n^3$).

В общем случае с помощью классической теории нельзя получить спектральные серии вида (46,2). Поэтому развитие учения об атоме было самым тесным образом связано с квантовой теорией. Каждый новый этап теории прежде всего проверялся на простейшей модели атома, а именно на модели атома водорода. Современное изложение теории атома водорода наряду с учетом релятивистских и спиновых поправок требует также учета вакуумных членов, без которых нельзя объяснить некоторые расщепления спектральных линий, недавно открытые с помощью весьма чувствительного радиочастотного метода.

б) Первоначальная квантовая теория. Согласно первоначальному варианту квантовой теории (теория Бора) электрон вращается вокруг ядра под действием кулоновского притяжения по законам классической механики, подобно тому как движутся планеты вокруг Солнца. Однако законы излучения классической электродинамики должны были быть заменены новыми квантовыми законами, открытыми, в частности, Планком при исследовании излучения абсолютно черного тела. Первая формулировка квантовых законов в применении к атому сводилась к двум положениям.

Во-первых, предполагалось, что в каждом атоме имеется ряд стационарных состояний, находясь в которых электрон не излучает, несмотря на то, что движется с ускорением.

При квантовании периодического движения, т. е. при нахождении соответствующих устойчивых значений для энергии $\mathcal{E}_n$, адиабатические инварианты I $\left(I=\oint p\,dq\right.$, где p является импульсом, а q — координатой частицы$\left.\right)$, которые по классической механике могли принимать любые постоянные значения, полагались кратными постоянной Планка h:

$$\oint p\,dq=nh. \tag{46,3}$$

Во-вторых, предполагалось, что атом должен излучать один квант энерги ($h\nu$) при переходе из начального устойчивого состояния

(энергия $\mathscr{E}_{n'}$) в конечное ($\mathscr{E}_n$). Частота излучения находилась в этом случае из соотношения

$$\nu = \frac{\mathscr{E}_{n'} - \mathscr{E}_n}{h}. \tag{46,4}$$

Применим эти результаты к атому водорода.

Как известно, при движении под действием центральных сил кулоновского притяжения траектория электрона заряда $-e$ в атоме водорода, заряд ядра которого равен $+e$, должна быть плоской (рис. 23). Выбирая за независимые координаты радиус r и полярный угол φ, имеем для функции Лагранжа:

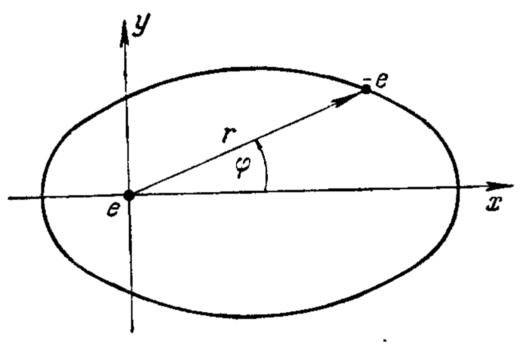


Рис. 23. Движение электрона в атоме водорода.

$$L = \frac{m_0}{2}\left(r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2\right) + \frac{e^2}{r}, \tag{46,5}$$

где m_0 — масса электрона, а $V = -e^2/r$ — потенциальная энергия.

Из формулы (46,5) получаем значения обобщенных импульсов:

$$\left.\begin{aligned} p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_0 r^2 \dot{\varphi}, \\ p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m_0 \dot{r}. \end{aligned}\right\} \tag{46,6}$$

В частности, для круговых орбит мы можем положить $\dot{r} = 0$, а

$$r = a = \text{const}.$$

Поскольку φ является циклической координатой, мы имеем:

$$p_\varphi = m_0 a^2 \dot{\varphi} = \text{const}. \tag{46,7}$$

Кроме того, при $p_r = 0$ мы можем написать

$$\left.\frac{\partial L}{\partial r}\right|_{r=a} = m_0 a \dot{\varphi}^2 - \frac{e^2}{a^2} = 0. \tag{46,8}$$

Последнее уравнение представляет собою второй закон Ньютона, согласно которому произведение массы (m_0) на ускорение ($w = a\dot{\varphi}^2$) равно кулоновской силе (e^2/a^2).

Поскольку лагранжиан L явно не зависит от времени t, мы можем учесть еще закон сохранения энергии

$$\mathscr{E} = \frac{m_0}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{e^2}{r} = \text{const}, \tag{46,9}$$

который в случае круговых орбит принимает вид

$$\mathscr{E} = \frac{m_0}{2} a^2 \dot{\varphi}^2 - \frac{e^2}{a} = \text{const}. \qquad (46,10)$$

Исключая из последних соотношений a и $\dot{\varphi}$, находим связь импульса p_φ с энергией $\mathscr{E}$:

$$p_\varphi = e^2 \sqrt{-\frac{m_0}{2\mathscr{E}}}.$$

Для определения устойчивых состояний мы должны воспользоваться квантовым постулатом (46,3), который в нашем случае ($q = \varphi$, $p = p_\varphi = \text{const}$) дает:

$$e^2 \sqrt{-\frac{m_0}{2\mathscr{E}}} = n\hbar.$$

Отсюда находим энергию устойчивых состояний:

$$\mathscr{E}_n = -\frac{e^4 m_0}{2n^2\hbar^2}, \qquad (46,11)$$

а также спектр излучения (частоты):

$$\nu = \frac{\mathscr{E}_{n'} - \mathscr{E}_n}{2\pi\hbar} = \frac{e^4 m_0}{4\pi\hbar^3}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2}\right),$$

который совпадает с эмпирической формулой (46,2). Для постоянной Ридберга имеем:

$$R = \frac{m_0 e^4}{4\pi\hbar^3},$$

что численно совпадает с опытными результатами [см. формулу (46,2)].

Учет эллиптических орбит фактически не изменяет полученных результатов. В самом деле, в этом случае с помощью уравнений (46,6) и (46,9) находим:

$$\left.\begin{aligned} p_\varphi &= m_0 r^2 \dot{\varphi}, \\ p_r &= \sqrt{-A + \frac{2B}{r} - \frac{C}{r^2}}, \end{aligned}\right\} \qquad (46,12)$$

причем постоянные величины

$$A = -2m_0\mathscr{E}, \quad B = m_0 e^2 \quad \text{и} \quad C = p_\varphi^2$$

имеют положительный знак. Используя далее значение интеграла

$$\oint \sqrt{-A + \frac{2B}{r} - \frac{C}{r^2}}\, dr = 2\int_{r_{\text{мин}}}^{r_{\text{макс}}} \sqrt{-A + \frac{2B}{r} - \frac{C}{r^2}}\, dr = 2\pi\left(\frac{B}{\sqrt{A}} - \sqrt{C}\right), \qquad (46,13)$$

где $r_{\text{мин}}$ и $r_{\text{макс}}$ являются корнями уравнения

$$-A+\frac{2B}{r}-\frac{C}{r^2}=0,$$

получаем с помощью квантового уравнения (46,3):

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{C}&=p_\varphi=n_\varphi\hbar, \\ \frac{B}{\sqrt{A}}-\sqrt{C}&=n_r\hbar. \end{aligned}\right\} \tag{46,14}$$

Подставляя значения коэффициентов A, B и C, находим выражение для энергии:

$$\mathcal{E}_{n_\varphi n_r}=-\frac{e^4m_0}{2\hbar^2(n_\varphi+n_r)^2}, \tag{46,15}$$

причем квантовые числа принимают следующие целочисленные значения;

$$n_\varphi=1,\ 2,\ 3,\ \ldots;\quad n_r=0,\ 1,\ 2\ \ldots$$

Заметим, что квантовое число n_φ не может принимать значения, равного нулю, так как в противном случае момент p_φ также обращается в нуль, т. е. движение в классическом случае перестает быть периодическим. Это легко показать с помощью законов классической механики. В самом деле, эксцентриситет ε эллиптической ($\mathcal{E}<0$) орбиты определяется соотношением

$$\varepsilon=\sqrt{1+\frac{2\mathcal{E}p_\varphi^2}{m_0e^4}}=\sqrt{1-\frac{n_\varphi^2}{(n_\varphi+n_r)^2}}, \tag{46,16}$$

откуда видно, что при $n_\varphi=0$ траектория электрона становится параболической.

Вводя главное квантовое число n, равное сумме квантовых чисел n_φ и n_r:

$$n=n_\varphi+n_r,$$

причем величина n может принимать значения

$$n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$$

с помощью формулы (46,15) получаем те же самые уровни энергии, что и в первоначальной теории Бора [см. соотношение (46,11)].

в) Тонкая структура. Как видно из формулы (46,16), учет эллиптических движений приводит к так называемой вырожденной системе, т. е. к различным квантовым состояниям (в данном случае, орбитам), которым соответствует одно и то же значение для энергии ($n=n_r+n_\varphi=\text{const}$).

Однако более детальное изучение спектров атомов показывает, что спектральные линии обладают тонкой структурой, которая, естественно, должна быть связана с мультиплетной структурой энергетических уровней. Для объяснения тонкой структуры следует

использовать релятивистскую теорию применительно к движению электрона в атоме (теория Зоммерфельда).

В релятивистской теории функция Лагранжа имеет вид

$$L = -m_0c^2\sqrt{1-\beta^2} - V, \qquad (46,17)$$

где $v = c\beta$ — скорость движения электрона, причем

$$\beta^2 = \frac{1}{c^2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2),$$

а V — потенциальная энергия ($V = -e^2/r$). Лагранжиан (46,17) приводит к закону сохранения импульса

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} r^2\dot{\varphi} = \text{const} \qquad (46,18)$$

и к закону сохранения энергии

$$E = \mathcal{E} + m_0c^2 = c\sqrt{m_0^2c^2 + p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} - \frac{e^2}{r}} = \text{const}. \qquad (46,19)$$

В последней формуле учтено, что в релятивистской теории полная энергия E содержит также собственную энергию частицы m_0c^2.

Из (46,19) находим:

$$p_r = \sqrt{-A + \frac{2B}{r} - \frac{C}{r^2}}, \qquad (46,20)$$

где

$$A = m_0^2c^2\left[1 - \left(1 + \frac{\mathcal{E}}{m_0c^2}\right)^2\right],$$

$$B = m_0e^2\left(1 + \frac{\mathcal{E}}{m_0c^2}\right),$$

$$C = p_\varphi^2 - \frac{e^4}{c^2}. \qquad (46,21)$$

Отсюда с помощью квантовых условий

$$\oint p_\varphi d\varphi = n_\varphi h, \qquad \oint p_r dr = n_r h,$$

используя также равенство (46,13), находим формулу для тонкой структуры:

$$1 + \frac{\mathcal{E}}{m_0c^2} = \left[1 + \frac{\alpha^2}{(n_r + \sqrt{n_\varphi^2 - \alpha^2})^2}\right]^{-1/2}, \qquad (46,22)$$

где $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137$ — постоянная тонкой структуры.

Раскладывая правую часть формулы (46,22) по α^2 и ограничиваясь величинами порядка α^4, получаем выражение для энергии $\mathcal{E}$ ($l = n_\varphi - 1$):

$$\frac{\mathcal{E}_{nl}}{h} = -\frac{R}{n^2}\left[1 + \frac{\alpha^2}{n^2}\left(\frac{n}{l+1} - \frac{3}{4}\right)\right]. \qquad (46,23)$$

Поскольку величина α^2 очень мала по сравнению с единицей, различные спектральные уровни $\mathscr{E}/h$, соответствующие одному и тому же значению n, близки друг к другу, благодаря чему и наблюдается тонкая структура линий: спектральный уровень с заданным значением главного квантового числа n расщепляется на n близких уровней, поскольку азимутальное квантовое число l может принимать значения 0, 1, 2, 3, ..., $n-1$.

В частности, в серии Бальмера, лежащей в видимой части спектра, переходы совершаются на уровни $n=2$. Каждый из этих уровней по рассматриваемой теории имеет свое значение энергии:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathscr{E}_{20}}{h} &= -\frac{R}{4}\left(1+\frac{\alpha^2}{4}\left(2-\frac{3}{4}\right)\right), \\ \frac{\mathscr{E}_{21}}{h} &= -\frac{R}{4}\left(1+\frac{\alpha^2}{4}\left(1-\frac{3}{4}\right)\right). \end{aligned}\right\} \tag{46,24}$$

Это должно привести к дублетному расщеплению с постоянным расстоянием между составляющими для всей серии:

$$\Delta\nu = \frac{\mathscr{E}_{21}-\mathscr{E}_{20}}{h} = \frac{R\alpha^2}{16}. \tag{46,25}$$

Подставляя сюда численные значения вместо величин R и α, найдем:

$$\Delta\nu = 1{,}095\cdot 10^4 \text{ мггц},$$

что является весьма малой величиной по сравнению с основным уровнем

$$-\frac{\mathscr{E}_{10}}{h} \simeq R = 3{,}29\cdot 10^9 \text{ мггц}\left(1 \text{ мггц} = 10^6 \text{ сек}^{-1} = \frac{1}{3}\,10^{-4} \text{ см}^{-1}\right).$$

Эта величина с достаточной точностью совпадает с величиной, найденной экспериментальным путем.

Несмотря на большие успехи первоначальной квантовой теории Бора, позволившей подвести теоретический фундамент под огромный материал атомной спектроскопии, эта теория обладала существенными недостатками, которые были ясны с самого начала ее возникновения и все сильнее давали о себе знать при дальнейшем ее развитии. Первоначальная квантовая теория позволяла вычислять только частоты спектральных линий, но не их интенсивности. Далее, теория Бора, носившая явно полуклассический характер, не могла объяснить явлений, связанных со спином электрона. Поэтому естественно, что после открытия электронных волн она была заменена другой более точной теорией — волновой механикой. Однако благодаря простоте трактовки ряда атомных явлений первоначальная квантовая теория Бора часто служит отправным пунктом для понимания многих квантовых процессов в атоме.

г) Нерелятивистское волновое уравнение. Нерелятивистское волновое уравнение в применении к атому водорода имеет вид

$$\nabla^2\psi + \frac{2m_0}{\hbar^2}\left(\mathscr{E} + \frac{e^2}{r}\right)\psi = 0. \tag{46,26}$$

Вводя, в частности, сферические координаты (r, θ, φ), мы можем разбить оператор Лапласа на две части:

$$\nabla^2 = \nabla_r^2 + \frac{1}{r^2}\nabla_{\theta,\varphi}^2, \tag{46,27}$$

радиальную

$$\nabla_r^2 = \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) \tag{46,28}$$

и угловую

$$\nabla_{\theta,\varphi}^2 = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}. \tag{46,29}$$

Решение уравнения (46,26) будем искать в виде произведения двух функций:

$$\psi = R(r)\,Y(\theta, \varphi), \tag{46,30}$$

из которых одна зависит от радиуса r, а другая — от углов θ и φ. Решение для функции Y может быть представлено в следующем виде:

$$Y(\theta, \varphi) = N_{lm}Y_l^m(\theta,\varphi) = N_{lm}(l-m)!\,e^{im\varphi}P_l^m(\cos\theta), \tag{46,31}$$

где $P_l^m(x)$ — обобщенный полином Лежандра, который связан с полиномом Лежандра:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l(x^2-1)^l}{dx^l}. \tag{46,32}$$

Для P_l^m мы имеем выражение¹):

$$P_l^m = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}\frac{(x^2-1)^l}{2^l l!} = (-1)^m\frac{(l+m)!}{(l-m)!}P_l^{-m}(x). \tag{46,33}$$

---

¹) Во многих современных курсах по квантовой механике для полиномов Лежандра выбирают соотношение

$$P_l^m = (1-x^2)^{\frac{|m|}{2}}\frac{d^{l+|m|}}{dx^{l+|m|}}\frac{(x^2-1)^l}{2^l l!}. \tag{46,33a}$$

Этим соотношением хорошо пользоваться только в теории Шредингера, где в выражение для волновой функции входит лишь один полином Лежандра. В теории же Дирака, где волновая функция зависит от четырех различных полиномов Лежандра, значительно проще пользоваться соотношением (46,33), тем более, что рекуррентные соотношения [см. ниже, (46,131а)] для полиномов вида (46,33а) при $m = 0$ просто нарушаются.

Квантовые числа l и m могут принимать следующие значения:

$$l = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$$

$$m = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots,\ \pm l.$$

Заметим, что формула (46,33) дает конечное значение для $P_l^m(x)$ при $1 \geqslant x \geqslant -1$.

Шаровые функции $Y_l^{+m} = (-1)^m Y_l^{-m}$ обладают свойством ортогональности, а постоянная N_{lm} выбирается таким образом, чтобы функция $N_{lm} Y_l^m$ была нормирована на единицу, именно:

$$N_{lm} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{1}{(l+m)!\,(l-m)!}}. \tag{46,34}$$

Оба эти условия могут быть выражены одним равенством:

$$N_{lm} N_{l'm'} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} Y_l^{+m}(\theta, \varphi)\, Y_{l'}^{m'}(\theta, \varphi) \sin\theta\, d\theta = \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \tag{46,35}$$

Как известно, шаровые функции обладают следующим свойством:

$$\nabla^2 Y_l^m R = \left(\nabla_r^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right) Y_l^m R. \tag{46,36}$$

Поэтому, подставляя решение (46,30) в (46,26), находим дифференциальное уравнение для определения радиальной функции:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr}\right) + \frac{2m_0}{\hbar^2} \left(\mathcal{E} + \frac{e^2}{r} - \frac{l(l+1)\hbar^2}{2m_0 r^2}\right) R = 0. \tag{46,37}$$

Это равенство может быть представлено в следующем операторном виде:

$$\mathcal{E} = -\frac{e^2}{r} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2m_0 r^2} + \frac{1}{2m_0} \left(\frac{\hbar}{i}\right)^2 \nabla_r^2.$$

Величина $T_r = (1/2m_0)(\hbar/i)^2 \nabla_r^2$ представляет собою оператор кинетической энергии, связанный с движением по направлению r. Величину

$$V_{\text{эфф}} = -\frac{e^2}{r} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2m_0 r^2} \tag{46,38}$$

можно рассматривать как некоторое эффективное значение потенциальной энергии, состоящей из двух членов. Первый член, $-e^2/r$, представляет собою просто потенциальную энергию, а второй член, $l(l+1)\hbar^2/2m_0 r^2$, — энергию, связанную с вращательным движением.

Появление второго члена может быть интерпретировано по классической теории следующим образом. Исключая из классического

уравнения движения (46,9) угловую скорость при помощи соотношения (46,12), мы найдем:

$$\mathcal{E} = -\frac{e^2}{r} + \frac{p_\varphi^2}{2m_0 r^2} + \frac{1}{2m_0} p_r^2.$$

Величина p_φ, как импульс циклической координаты, остается постоянной (в квантовом случае квадрат этой постоянной величины равен $p_\varphi^2 = \hbar^2 l(l+1)$). Отсюда видно, что движение в радиальном направлении будет совершаться под действием эффективной потенциальной энергии (46,38).

Потенциальная яма ограничена потенциальным барьером со стороны малых и больших r. Для этих двух крайних значений r мы должны будем найти асимптотические значения волновой функции, а также выбрать значения для энергий (дискретный спектр), при которых экспоненциально возрастающие решения будут отсутствовать.

Вводя новую переменную

$$\rho = 2\sqrt{A}\, r,$$

где

$$A = -\frac{2m_0\mathcal{E}}{\hbar^2} > 0, \quad B = \frac{m_0 e^2}{\hbar^2}, \qquad (46,39)$$

приведем уравнение (46,37) к виду

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{dR}{d\rho} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{B}{\sqrt{A}\,\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right)R = 0. \qquad (46,39\text{а})$$

Асимптотическое решение при $\rho \to \infty$ будет следовать из уравнения

$$\frac{d^2R_\infty}{d\rho^2} - \frac{1}{4}R_\infty = 0.$$

Отсюда

$$R_\infty = A_\infty e^{-\rho/2} + B_\infty e^{\rho/2}. \qquad (46,39\text{б})$$

Для того чтобы избавиться от экспоненциально возрастающего решения, мы должны положить $B_\infty = 0$. Величина A_∞ может быть включена в нормировочный коэффициент, и поэтому в (46,39б) мы можем положить $A_\infty = 1$. Тогда

$$R_\infty = e^{-\rho/2}.$$

Точно так же асимптотическое решение при $\rho \to 0$ может быть найдено из уравнения

$$\frac{d^2R_0}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{dR_0}{d\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2}R_0 = 0,$$

т. е.

$$R_0 = A_0\rho^l + B_0\rho^{-(l+1)}.$$

Отбрасывая расходящееся при $\rho \to 0$ решение ($B_0 = 0$), мы можем положить:

$$R_0 = \rho^l.$$

Производя далее в уравнении (46,39а) замену переменных:

$$R = R_0 R_\infty u,$$

найдем для функции u следующее уравнение:

$$\rho \frac{d^2u}{d\rho^2} + [2(l+1) - \rho]\frac{du}{d\rho} + \left(\frac{B}{\sqrt{A}} - l - 1\right)u = 0. \quad (46,40)$$

Чтобы функция u не меняла характера решения R при $r \to \infty$ и $r = 0$ по сравнению с найденными убывающими асимптотическими решениями (точнее, чтобы не возникали асимптотически возрастающие решения), необходимо подобрать функцию u таким образом, чтобы она представляла конечный полином степени k:

$$u = \sum_{\nu=0}^{k} a_\nu \rho^\nu.$$

Это требование ($a_{k+1} = 0$) приводит к следующим собственным значениям для параметра $B/\sqrt{A}$:

$$\frac{B}{\sqrt{A}} = l + k + 1 = n = 1, 2, 3, 4, \ldots, \quad (46,41)$$

где n — главное квантовое число.

Соответствующие значения для собственных функций, подчиняющихся уравнению

$$\rho \frac{d^2u}{d\rho^2} + [2(l+1) - \rho]\frac{du}{d\rho} + ku = 0,$$

будут представлять собою обобщенные полиномы Лагерра порядка k:

$$u = Q_k^s(\rho) = e^\rho \rho^{-s} \frac{d^k}{d\rho^k}(e^{-\rho}\rho^{s+k}) \quad (46,42)$$

при $s = 2l + 1$. Раскрывая последнее выражение, имеем:

$$Q_k^s = (-1)^k \left(\rho^k - \frac{k(k+s)}{1!}\rho^{k-1} + \right.$$

$$\left. + \frac{k(k-1)(k+s)(k+s-1)}{2!}\rho^{k-2} - \ldots\right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k+j}\rho^{k-j} \frac{k!\,\Gamma(s+k+1)}{j!\,(k-j)!\,\Gamma(s+k+1-j)}.^{1)} \quad (46,43)$$

---

[1]) Полиномы Лагерра Q_k^s связаны с вырожденной гипергеометрической функцией

$$F(\alpha, \beta, \rho) = 1 + \frac{\alpha}{\beta \cdot 1!}\rho + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta(\beta+1)2!}\rho^2 + \ldots$$

соотношением

$$Q_k^s(\rho) = \frac{\Gamma(s+k+1)}{k!} F(-k, s+1, \rho), \quad (46,43а)$$

которое имеет место лишь для целых значений k ($k \geqslant 0$).

Отсюда видно, что величина k обязательно должна быть целым числом. Величина же $s=2l+1$ должна быть больше или равна нулю и может принимать не только целые, но и дробные значения. Это обстоятельство является чрезвычайно важным при решении релятивистской проблемы.

Таким образом, решение для радиальных функций будет иметь вид:

$$R_{kl}=N_{kl}e^{-\rho/2}\rho^l Q_k^{2l+1}(\rho). \tag{46,44}$$

Нормировочный коэффициент может быть найден из условия

$$\int_0^\infty r^2R_{kl}^2\,dr=\frac{1}{8A^{3/2}}\int_0^\infty \rho^2R_{kl}^2d\rho=1, \tag{46,45}$$

или

$$\frac{N_{kl}^2}{8A^{3/2}}\int_0^\infty e^{-\rho}\rho^{2l+2}Q_k^{2l+1}Q_k^{2l+1}\,d\rho=1.$$

Вместо одного из полиномов Q_k^{2l+1} мы подставим сюда ряд (46,43), оставляя в нем первые два члена:

$$Q_k^{2l+1}=(-1)^k(\rho^k-k(2l+k+1)\rho^{k-1}+\ldots),$$

поскольку остальные члены при интегрировании обращаются в нуль.

Вместо второго полинома Q_k^{2l+1} мы подставим замкнутое выражение (46,42). Тогда будем иметь:

$$\frac{N_{kl}^2}{A8^{3/2}}(-1)^k\int_0^\infty d\rho\,(\rho^{k+1}-k(2l+k+1)\rho^k+\ldots)\frac{d^k}{d\rho^k}e^{-\rho}\rho^{s+k}=1,$$

откуда в результате интегрирования по частям получим:

$$\frac{N_{kl}^2}{A8^{3/2}}\int_0^\infty e^{-\rho}[(k+1)!\rho^{2l+k+2}-k!k(2l+k+1)\rho^{2l+k+1}]\,d\rho=1.$$

Последний интеграл легко может быть вычислен с помощью формулы

$$\int_0^\infty e^{-\rho}\rho^s d\rho=\Gamma(s+1),$$

откуда находим [1]):

$$N_{kl}=A^{3/4}\sqrt{\frac{4}{nk!\,\Gamma(n+l+1)}}, \tag{46,46}$$

где

$$n=l+k+1.$$

[1]) Во многих курсах квантовой теории обобщенные полиномы Лагерра Q_k^{2l+1} записываются через функцию

$$L_{k+s}^s(\rho)=(-1)^{k+s}\frac{d^s}{d\rho^s}e^\rho\frac{d^{s+k}}{d\rho^{s+k}}(e^{-\rho}\rho^{s+k}). \tag{46,45a}$$

С помощью формул (46,39) и (46,41) находим энергию:

$$\mathcal{E}_n = -\frac{e^4 m_0}{2n^2\hbar^2} = -\frac{e^2}{2a_0 n^2} = -\frac{Rh}{n^2}, \tag{46,47}$$

точно совпадающую с выражением (46,11), найденным по теории Бора. Отсюда получаем выражение для коэффициента A:

$$A = \frac{1}{a_0^2 n^2}, \tag{46,48}$$

где величина $a_0 = \hbar^2/m_0 e^2$ является радиусом первой боровской орбиты.

Итак, мы видим, что волновая механика позволяет автоматически определить нижнюю границу изменения квантовых чисел, в то время как в теории Бора нулевое значение для квантового числа n_φ было исключено на основе дополнительных соображений. Кроме того, определив волновые функции ψ, мы можем найти правила отбора и интенсивность излучения [см. § 46, п. к)].

д) Релятивистское скалярное уравнение. Согласно формуле (10,9) релятивистское скалярное уравнение (уравнение Клейна — Гордона) применительно к атому водорода имеет вид

$$\nabla^2\psi + \frac{1}{c^2\hbar^2}\left[\left(E + \frac{e^2}{r}\right)^2 - m_0^2 c^4\right]\psi = 0, \tag{46,49}$$

причем энергия E частицы включает в себя значение собственной энергии $m_0 c^2$, т. е.

$$E = \mathcal{E} + m_0 c^2. \tag{46,50}$$

Решение уравнения (46,49) будем искать в виде

$$\psi = R(r)\, Y_l^m(\theta, \varphi). \tag{46,51}$$

В случае целых значений s оба полинома связаны между собой простым линейным соотношением

$$L_{k+s}^s(\rho) = (-1)^k \frac{\Gamma(s+k+1)}{k!} Q_k^s. \tag{46,45б}$$

При дробных же значениях s замкнутый вид функции L (46,45а) теряет свой смысл, в то время как в полиноме Q_k^s величина s может принимать дробные значения.

Точно так же большинство авторов предпочитают функцию R_{kl} записывать несколько иначе, а именно через R_{nl}. Вообще говоря, этот вопрос не имеет существенного значения. Однако при рассмотрении релятивистского движения значительно удобнее оставлять индекс k, подчеркивая тем самым, что он должен всегда оставаться целым числом, тогда как l и $n = l + k + 1$ могут принимать в релятивистском случае дробные значения.

Учитывая тогда соотношение (46,36), находим дифференциальное уравнение для радиальной части

$$\left(\nabla_r^2 - A + \frac{2B}{r} - \frac{l'(l'+1)}{r^2}\right)R = 0, \qquad (46,52)$$

совпадающее с уравнением (46,37), но с несколько другими значениями постоянных коэффициентов:

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\left(1 - \left(1 + \frac{\mathcal{E}}{m_0c^2}\right)^2\right), \\ B &= \frac{m_0e^2}{\hbar^2}\left(1 + \frac{\mathcal{E}}{m_0c^2}\right), \\ l(l+1) - \alpha^2 &= l'(l'+1), \end{aligned}\right\} \qquad (46,53)$$

откуда

$$l' = -\frac{1}{2} + \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - \alpha^2}, \quad \alpha = \frac{e^2}{c\hbar} \cong \frac{1}{137}.$$

Второе решение для l' ($l_1' = -{}^1/_2 - \sqrt{(l + {}^1/_2)^2 - \alpha^2}$), приводящее к расходимости выражения (46,44) в начале координат ($\rho \to 0$), должно быть отброшено.

Для определения возможного спектра энергий мы можем воспользоваться равенством (46,41), согласно которому

$$\frac{B}{\sqrt{A}} = l' + k + 1 = n', \qquad (46,54)$$

где радиальное квантовое число $k = 0, 1, 2, \ldots$

Отсюда находим формулу для определения тонкой структуры:

$$1 + \frac{\mathcal{E}}{m_0c^2} = \left[1 + \frac{\alpha^2}{(l' + k + 1)^2}\right]^{-1/2} = \left[1 + \frac{\alpha^2}{(k + {}^1/_2 + \sqrt{(l + {}^1/_2)^2 - \alpha^2})^2}\right]^{-1/2}, \qquad (46,55)$$

а также решение для волновой функции R:

$$R = R_{kl'}, \qquad (46,55a)$$

где $R_{kl'}$ определяется равенством (46,44), имеющим место при целых значениях k и любых (целых или дробных) значениях $l' \geqslant 0$.

Раскладывая последнее выражение по степеням α^2, получаем значения для термов:

$$\frac{\mathcal{E}_{nl}}{h} = -\frac{R}{n^2}\left(1 + \frac{\alpha^2}{n^2}\left(\frac{n}{l + {}^1/_2} - \frac{3}{4}\right)\right), \qquad (46,56)$$

где главное квантовое число n равно

$$n = l + k + 1 = 1, 2, 3 \ldots$$

Сопоставляя соотношение (46,56) с соотношением (46,23), мы видим, что формула волновой механики отличается от соответст-

вующей формулы старой квантовой теории заменой азимутального квантового числа $n_\varphi = l+1$ на величину $l+{}^1/_2$.

В частности, используя новый результат для определения дублетного расщепления в серии Бальмера, находим:

$$\Delta\nu = \frac{\mathcal{E}_{21}-\mathcal{E}_{20}}{h} = \frac{8}{3}\frac{R\alpha^2}{16}. \qquad (46,57)$$

Следовательно, новый результат отличается от прежнего результата (46,25) на множитель 8/3, т. е. получается явно завышенное значение для расщепления. Таким образом, по релятивистской волновой механике, на первый взгляд, мы получаем для спектрального расщепления худший результат, чем по старой квантовой теории.

Полное решение проблемы может быть получено только с учетом спиновых эффектов, которые дают такой же порядок для расщепления термов, как и релятивистские. Поэтому такую задачу следует решать с помощью спинорных уравнений.

Возможно, что полученные с помощью релятивистского скалярного уравнения результаты найдут применение при изучении образования водородоподобных атомов с бесспиновыми частицами [например, при вращении бесспинового π-мезона вокруг протона (мезоводород)].

е) Уравнение Дирака. Уравнение Дирака, которое описывает и релятивистские, и спиновые эффекты, применительно к атому водорода принимает вид [см. (17,23) и (17,24)]:

$$\left(E - c(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}) - m_0c^2\rho_3 + \frac{e^2}{r}\right)\psi = 0, \qquad (46,58)$$

где $E = \mathcal{E} + m_0c^2$, а ψ — четырехрядная матрица Дирака. Одно матричное уравнение (46,58) эквивалентно системе четырех линейных уравнений [см., например, (17,18)].

Вводя двухрядные матрицы Паули (17,8):

$$\sigma_1' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2' = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad (46,59)$$

а также разбивая функцию ψ на систему двухрядных матриц:

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi' \\ \chi' \end{pmatrix}, \qquad (46,60)$$

уравнение (46,58) мы можем представить в форме:

$$iW'\begin{pmatrix} \varphi' \\ \chi' \end{pmatrix} = (\nabla\sigma')\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \qquad (46,61)$$

$$iW\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = (\nabla\sigma')\begin{pmatrix} \varphi' \\ \chi' \end{pmatrix}, \qquad (46,62)$$

где

$$\left.\begin{aligned} W &= \frac{E - m_0c^2}{c\hbar} + \frac{\alpha}{r}, \\ W' &= \frac{E + m_0c^2}{c\hbar} + \frac{\alpha}{r}, \qquad \alpha = \frac{e^2}{c\hbar}. \end{aligned}\right\} \tag{46,63}$$

В этом представлении уравнение Дирака симметрично относительно замены штрихованных величин на нештрихованные и наоборот.

Выражение в правой части (46,61) может быть представлено в виде

$$(\nabla\sigma')\begin{pmatrix}\varphi \\ \chi\end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\chi + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi - \frac{\partial\chi}{\partial z} \end{vmatrix}. \tag{46,64}$$

Аналогичное соотношение мы будем иметь для штрихованных функций.

Решения уравнений (46,61) и (46,62) будем искать в виде

$$\varphi = CY_l^{m-1}R, \qquad \chi = DY_l^mR, \tag{46,65}$$

$$\varphi' = C'Y_{l'}^{m'-1}R', \qquad \chi' = D'Y_{l'}^{m'}R', \tag{46,66}$$

где Y_l^m представляет собой шаровые функции, определяемые равенством (46,31), R и R' являются пока что неизвестными функциями r, а C, D, C' и D' — постоянные, но неизвестные коэффициенты.

Воспользуемся следующими равенствами, которые легко получить, если перейти от производных по декартовым координатам к производным по сферическим координатам и использовать рекуррентные соотношения между шаровыми функциями:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} \pm i\frac{\partial}{\partial y}\right) Y_l^m R = \frac{1}{2l+1}\Big[\pm Y_{l+1}^{m\pm1}\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{l}{r}\right)R \mp \\ \mp (l \mp m)(l \mp m - 1)\, Y_{l-1}^{m\pm1}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{l+1}{r}\right)R\Big], \end{aligned} \tag{46,67}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y_l^m R}{\partial z} = \frac{1}{2l+1}\Big[Y_{l+1}^m\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{l}{r}\right)R + (l+m)(l-m)\times \\ \times Y_{l-1}^m\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{l+1}{r}\right)R\Big]. \end{aligned} \tag{46,68}$$

Тогда правая часть уравнения (46,61) принимает вид:

$$\begin{aligned} (\nabla\sigma')R\begin{pmatrix} CY_l^{m-1} \\ DY_l^m \end{pmatrix} = \frac{1}{2l+1}\Big\{(C-D)\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{l}{r}\right)R\begin{pmatrix} Y_{l+1}^{m-1} \\ Y_{l+1}^m \end{pmatrix} + \\ + [C(l-m+1) + D(l+m)]\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{l+1}{r}\right)R\begin{pmatrix} (l+m-1) & Y_{l-1}^{m-1} \\ -(l-m) & Y_{l-1}^m \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{46,69}$$

Для исключения угловых переменных мы должны подчинить коффициенты C и D такому условию, чтобы в правой части последнего равенства осталась лишь одна матрица. Как видно из (46,69), этого можно достичь двояким способом, что приводит к двум типам шаровых спиноров.

Первый шаровой спинор $\Omega_{l,m}^{(1)}$ мы получим, полагая:

$$C^{(1)} = (l+m)\,N_{lm}^{(1)}, \qquad D^{(1)} = -(l-m+1)\,N_{lm}^{(1)},$$

где коэффициент

$$N_{lm}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\,(l+m)!\,(l-m+1)!}} \tag{46,69a}$$

выбран таким образом, чтобы шаровой спинор был нормирован на единицу.

Второй шаровой спинор $\Omega_{l,\,m}^{(2)}$ мы получим, полагая

$$C^{(2)} = D^{(2)} = N_{l,\,m}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\,(l+m-1)!\,(l-m)!}} = N_{l-1,\,m}^{(1)}. \tag{46,69б}$$

Можно показать, что наши шаровые спиноры[1])

$$\left.\begin{aligned} \Omega_{l,\,m}^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\,(l+m)!\,(l-m+1)!}}\begin{pmatrix} (l+m) & Y_l^{m-1} \\ -(l-m+1)\,Y_l^m & \end{pmatrix}, \\ \Omega_{l,\,m}^{(2)} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\,(l+m-1)!\,(l-m)!}}\begin{pmatrix} Y_l^{m-1} \\ Y_l^m \end{pmatrix}, \end{aligned}\right\} \tag{46,70}$$

будут удовлетворять условию ортонормированности ($i,\ i' = 1,\ 2$):

$$\oint \Omega_{l',\,m'}^{+(i')}\,\Omega_{l,\,m}^{(i)} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \delta_{ll'}\delta_{mm'}\delta_{ii'}, \tag{46,71}$$

---

[1]) Если ввести нормированные на единицу шаровые функции

$$\overline{Y}_l^m = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi\,(l-m)!\,(l+m)!}}\,Y_l^m = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\,\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\,e^{im\varphi}P_l^m, \tag{46,70a}$$

то тогда шаровые спиноры будут равны

$$\left.\begin{aligned} \Omega_{l,\,m}^{(1)} &= \begin{pmatrix} \sqrt{\dfrac{l+m}{2l+1}}\,\overline{Y}_l^{m-1} \\ -\sqrt{\dfrac{l-m+1}{2l+1}}\,\overline{Y}_l^m \end{pmatrix}, \\ \Omega_{l,\,m}^{(2)} &= \begin{pmatrix} \sqrt{\dfrac{l-m+1}{2l+1}}\,\overline{Y}_l^{m-1} \\ \sqrt{\dfrac{l+m}{2l+1}}\,\overline{Y}_l^m \end{pmatrix}. \end{aligned}\right\} \tag{46,70б}$$

где $\Omega^{+(i')}_{l',m'}$ будет представлять собою двухрядную матрицу с одной строкой.

При указанных соотношениях между коэффициентами C и D уравнение (46,69) принимает вид:

$$\left.\begin{aligned}(\nabla\sigma')R\Omega^{(1)}_{l,m} &= \Omega^{(2)}_{l+1,m}\left(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{l}{r}\right)R,\\ (\nabla\sigma')R\Omega^{(2)}_{l,m} &= \Omega^{(1)}_{l-1,m}\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{l+1}{r}\right)R.\end{aligned}\right\}\qquad(46,72)$$

В связи с этим мы можем выбрать два типа решения. Рассмотрим прежде всего первый тип решения:

$$\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} = R\Omega^{(1)}_{l,m},\qquad \begin{pmatrix}\varphi'\\ \chi'\end{pmatrix} = iR'\,\Omega^{(2)}_{l+1,m},\qquad(46,73)$$

т. е. положим $l'=l+1$, $m'=m$.

Подставляя последние соотношения в равенство (46,61) и (46,62) и принимая во внимание (46,72), мы легко увидим, что угловая часть сокращается.

В этом случае функции R' и R будут связаны между собою соотношениями:

$$W'R' = -\left(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{l}{r}\right)R,\qquad(46,74)$$

$$WR = \left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{l+2}{r}\right)R'.\qquad(46,75)$$

Подействуем слева оператором $\frac{\partial}{\partial r}+\frac{l+2}{r}$ на уравнение (46,74). Тогда, принимая во внимание, что

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{l+2}{r}\right)\left(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{l}{r}\right) &= \nabla^2_r-\frac{l(l+1)}{r^2},\\ \left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{l+2}{r}\right)W'R' &= W'WR-\frac{\alpha}{r^2}R',\end{aligned}\right\}\qquad(46,76)$$

получим:

$$\left(\nabla^2_r-\frac{l(l+1)}{r^2}+W'W\right)R-\frac{\alpha}{r^2}R'=0.\qquad(46,77)$$

Аналогичным путем, действуя слева оператором $\frac{\partial}{\partial r}-\frac{l}{r}$ на уравнение (46,75), находим:

$$\left(\nabla^2_r-\frac{(l+2)(l+1)}{r^2}+W'W\right)R'+\frac{\alpha}{r^2}R=0.\qquad(46,78)$$

Решение этих уравнений будем искать в виде:

$$R'=bR.\qquad(46,79)$$

Величина b может быть найдена из условия, что уравнения (46,77) и (46,78) должны тождественно совпадать друг с другом. Тогда имеем:

$$b^2 - 2\frac{l+1}{\alpha}b + 1 = 0.$$

Отсюда для величины b находим два значения:

$$b_{1,\,1'} = \frac{l+1}{\alpha} \mp \sqrt{\frac{(l+1)^2}{\alpha^2} - 1}, \tag{46,80}$$

где знак минус перед квадратным корнем соответствует b_1, а знак плюс — $b_{1'}$, причем $b_1 b_{1'} = 1$.

Дифференциальное уравнение для R принимает вид:

$$\left(\nabla_r^2 - A + \frac{2B}{r} - \frac{l_{1,\,1'}(l_{1,\,1'}+1)}{r^2}\right)R = 0. \tag{46,81}$$

Значения коэффициентов A и B в последних формулах определяются равенством (46,53), найденным нами для релятивистских бесспиновых частиц, а для величины $l_{1,\,1'}$ имеем два значения:

$$l_{1,\,1'} = \sqrt{(l+1)^2 - \alpha^2} \mp \frac{1}{2} - \frac{1}{2}. \tag{46,82}$$

В последнем равенстве мы должны взять перед коэффициентом $1/2$ тот знак, который стоит перед корнем в (46,80), т. е.

$$\left.\begin{aligned} &l_{1,\,1'} = l_1 = \sqrt{(l+1)^2 - \alpha^2} - 1, \quad \text{если} \quad b_{1,\,1'} = b_1 \\ &\text{и} \\ &l_{1,\,1'} = l_{1'} = \sqrt{(l+1)^2 - \alpha^2} = l_1 + 1, \quad \text{если} \quad b_{1,\,1'} = b_{1'}. \end{aligned}\right\} \tag{46,83}$$

Уравнение (46,81) совпадает с уравнением (46,52) для релятивистских бесспиновых частиц. Поэтому для определения собственных значений энергии мы можем воспользоваться результатом (46,55), подставляя туда соответствующее значение для $l' = l_{1,\,1'}$:

$$\frac{E^{(1,\,1')}}{m_0c^2} = \left[1 + \frac{\alpha^2}{n_{1,\,1'}^2}\right]^{-1/2}, \tag{46,84}$$

где

$$n_{1,\,1'} = l_{1,\,1'} + k + 1, \quad \text{т. е.} \quad n_{1'} = k + 1 + \sqrt{(l+1)^2 - \alpha^2} = n_1 + 1, \tag{46,85}$$

а эффективное главное квантовое число равно

$$n_1 = k + \sqrt{(l+1)^2 - \alpha^2}. \tag{46,86}$$

Соответствующие волновые функции:

$R_1 = R_{kl_1}$, если $n_{1,\,1'} = n_1$; $R_{1'} = R_{kl_{1'}} = R_{k,\,l_1+1}$, если $n_{1,\,1'} = n_{1'}$,

где собственные функции $R_{k,\,l_{1,\,1'}}$ определены равенством (46,55a). Отсюда видно, что решения являются вырожденными, поскольку

для двух различных состояний ($n_{1,1'} = n_1$ и $n_{1,1'} = n_{1'}$) мы имеем одно и тоже значение энергии, если при одном и том же значении l радиальное квантовое число первого состояния равно k, а второго $k-1$.

В самом деле, в этом случае $E^{(1)} = E^{(1')}$, так как

$$n_1 = k + \sqrt{(l+1)^2 - \alpha^2}, \quad n_{1'} = k - 1 + 1 + \sqrt{(l+1)^2 - \alpha^2} = n_1.$$

Поэтому общее решение для R может быть представлено в виде суммы двух линейно не связанных решений:

$$R = R_{k,\, l_1} + a_1 R_{k-1,\, l_1+1}. \qquad (46,87)$$

В соответствии с (46,79) и (46,80) мы будем иметь для функции R'[1]):

$$R' = b_1 R_{kl_1} + a_1 b_1^{-1} R_{k-1,\, l_1+1} = b_1 (R_{kl_1} + a_1' R_{k-1,\, l_1+1}), \qquad (46,88)$$

где

$$a_1' = a_1 b_1^{-2}. \qquad (46,88а)$$

Напомним, что значение для коэффициента b_1 уже найдено [см. (46,80)]:

$$b_1 = \frac{l+1-\sqrt{(l+1)^2-\alpha^2}}{\alpha}. \qquad (46,88б)$$

Поэтому, чтобы определить значение коэффициента a_1, при котором будет удовлетворяться линейное уравнение Дирака, мы должны воспользоваться исходным уравнением первого порядка (46,74), связывающим функции R и R':

$$\left(\frac{E + m_0 c^2}{c\hbar} + \frac{\alpha}{r}\right) R' = -\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{l}{r}\right) R. \qquad (46,89)$$

В последнем равенстве сделаем переход от переменной r к переменной $\rho = 2\sqrt{A}\, r$.

Для величины $2\sqrt{A}$ мы согласно (46,82) и (46,84) находим [см. также (46,48)]:

$$2\sqrt{A} = \frac{2}{n_1 a_0}\left(1 + \frac{\alpha^2}{n_1^2}\right)^{-1/2} = \frac{2m_0 c\alpha}{n_1 \hbar}\left(1 + \frac{\alpha^2}{n_1^2}\right)^{-1/2}, \qquad (46,90)$$

где эффективное главное квантовое число n_1 определяется равенством (46,86). Поэтому уравнение (46,89) мы можем привести к виду

$$\left(\frac{\beta_1}{2} + \frac{\alpha}{\rho}\right) R' = -\left(\frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{l}{\rho}\right) R, \qquad (46,91)$$

---

[1]) Найденные решения при произвольном соотношении коэффициентов a_1 и a_1' будут удовлетворять только квадрированному уравнению Дирака (17,31), которое при наличии лишь кулоновского притяжения принимает вид:

$$\left[\left(E + \frac{e^2}{r}\right)^2 + c^2\hbar^2\nabla^2 - m_0^2 c^4 + ic\hbar \frac{e^2}{r^3}(\boldsymbol{\alpha r})\right]\psi = 0.$$

где

$$\beta_1 = \frac{n_1}{\alpha}\left(\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{n_1^2}}+1\right). \qquad (46,92)$$

Для величин R_{kl_1} и $R_{k-1,\, l_1+1}$ мы согласно (46,44) и (46,46) можем записать следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned} R_{kl_1} &= N_{kl_1} e^{-\rho/2} \rho^{l_1} Q_k^{2l_1+1}(\rho), \\ R_{k-1,\, l_1+1} &= N_{k-1,\, l_1+1} e^{-\rho/2} \rho^{l_1+1} Q_{k-1}^{2l_1+3}(\rho), \end{aligned}\right\} \qquad (46,93)$$

где

$$N_{k-1, l_1+1} = \sqrt{\frac{k}{n_1+l_1+1}}\, N_{k,\, l_1},$$

$$N_{k,\, l_1} = \frac{2A^{3/4}}{\sqrt{n_1}} \frac{1}{\sqrt{k!\,\Gamma(n_1+l_1+1)}}.$$

Ввиду того, что после подстановки R и R' в (46,91) экспоненциальный множитель $e^{-\rho/2}$ сокращается, мы можем искомую величину a_1 определить путем приравнивания в левой и правой частях коэффициентов при старшем члене ρ^{k+l_1}:

$$(-1)^k \frac{\beta_1}{2} N_{kl_1} e^{-\rho/2} \rho^{k+l_1} \left(b_1 - a_1 b_1^{-1} \sqrt{\frac{k}{n_1+l_1+1}}\right) =$$

$$= (-1)^k \frac{1}{2} N_{kl_1} e^{-\rho/2} \rho^{k+l_1} \left(1 - a_1 \sqrt{\frac{k}{n_1+l_1+1}}\right). \qquad (46,94)$$

Отсюда получаем [1]):

$$a_1 = \frac{b_1\beta_1 - 1}{b_1^{-1}\beta_1 - 1} \sqrt{\frac{n_1+l_1+1}{k}} = \sqrt{\frac{b_1^2\beta_1^2 - 1}{b_1^{-2}\beta_1^2 - 1}}. \qquad (46,95)$$

---

[1]) Поскольку (46,91) является тождеством, приравнивание коэффициентов при членах с другими степенями ρ должно дать аналогичное значение величины a_1. Это можно доказать, если в уравнении (46,91) члены, зависящие от a_1, сгруппировать в левой части:

$$a_1\left(\frac{\beta_1 b_1^{-1}}{2} + \frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{l_1+2}{\rho}\right) R_{k-1,\, l_1+1} = -\left(\frac{\beta_1 b_1}{2} + \frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{l_1}{\rho}\right) R_{k,\, l_1}.$$

Затем, используя рекуррентное соотношение между полиномами Лагерр можно последнее равенство привести к виду:

$$a_1\left(\beta_1 b_1^{-1} - 1\right) B = \left(\beta_1 b_1 - 1\right) \sqrt{\frac{n_1+l_1+1}{k}}\, B,$$

где

$$B = \left(1 + \beta_1 b_1^{-1}\right) R_{k-1,\, l_1+1} + \left(1 + \beta_1 b_1 \sqrt{\frac{k}{n_1+l_1+1}}\right) R_{kl_1},$$

откуда, сокращая обе части на величину B, мы найдем соотношение (46,95).

Последнее преобразование для величины a_1 было произведено с помощью тождеств:

$$(b_1\beta_1 - 1)(b_1^{-1}\beta_1 + 1) = \frac{2\beta_1}{\alpha} k,$$

$$(b_1\beta_1 + 1)(b_1^{-1}\beta_1 - 1) = \frac{2\beta_1}{\alpha}(n_1 + l_1 + 1),$$

которые следуют из равенства:

$$\beta_1^2 - 1 = \frac{2\beta_1}{\alpha} n_1.$$

Поэтому окончательно для первого решения мы будем иметь:

$$\frac{E^{(1)}}{m_0c^2} = 1 + \frac{\mathcal{E}^{(1)}}{m_0c^2} = \left(1 + \frac{\alpha^2}{n_1^2}\right)^{-1/2}, \tag{46,96}$$

$$\psi^{(1)} = N_{kl_1}^{(1)} \begin{pmatrix} R_1 \Omega_{l,m}^{(1)} \\ ib_1 R_1' \Omega_{l+1,m}^{(2)} \end{pmatrix} = N_{kl_1}^{(1)} N_{lm}^{(1)} \begin{Vmatrix} (l+m) R_1 Y_l^{m-1} \\ -(l-m+1) R_1 Y_l^m \\ ib_1 R_1' Y_{l+1}^{m-1} \\ ib_1 R_1' Y_{l+1}^m \end{Vmatrix}. \tag{46,97}$$

Здесь $N_{lm}^{(1)}$ — нормировочный коэффициент для шаровой функции, заданный равенством (46,69а).

Заметим, что функции Y_l^{m-1} при $m = -l$ и Y_l^m при $m = l+1$ не существуют, однако решение сохраняет силу и для этих крайних случаев, так как коэффициенты при не существующих для этих значений m шаровых функциях обращаются тождественно в нуль.

Поэтому квантовое число m может принимать следующие значения:

$$m = -l, \quad -l+1, \ldots, 0, \ldots, l, \ l+1. \tag{46,97a}$$

Радиальные функции будут связаны с известными функциями (46,93) соотношениями [1]):

$$R_1 = R_{kl_1} + a_1 R_{k-1,\, l_1+1}, \tag{46,98}$$

$$R_1' = R_{kl_1} + a_1' R_{k-1,\, l_1+1}, \tag{46,99}$$

---

[1]) Очень часто в литературе вводятся обозначения радиальных функций $f = R_1$ и $g = b_1 R_1$. Функции f и g носят соответственно название больших и малых радиальных функций уравнения Дирака. Как правило, они выражаются не через функции R_{kl_1}, пропорциональные обобщенным полиномам Лагерра, а непосредственно через вырожденные гипергеометрические функции. Оба решения являются совершенно тождественными в математическом отношении, поскольку связь между обобщенными полиномами Лагерра и вырожденной гипергеометрической функцией устанавливается формулой (46,43а).

причем коэффициенты a_1 и a_1', b_1 и β_1 определяются равенствами (46,95), (46,88а), (46,88б) и (46,92).

Для определения нормировочного коэффициента $N_{kl_1}^{(1)}$ для радиальных функций воспользуемся соотношением

$$\left(N_{kl_1}^{(1)}\right)^2 \int_0^\infty r^2\,dr\left(R_1^2 + b_1^2 R_1'^2\right) = 1. \tag{46,100}$$

Учитывая, что [см. вычисление интеграла (46,45)]

$$\int_0^\infty r^2\,dr R_{kl_1}^2 = \int_0^\infty r^2\,dr\,R_{k-1,\,l_1+1}^2 = 1,$$

$$\int_0^\infty r^2\,dr\,R_{kl_1} R_{k-1,\,l_1+1} = -\frac{\sqrt{k(l_1+n_1+1)}}{n_1},$$

для определения нормировочного коэффициента $N_{kl_1}^{(1)}$ будем иметь

$$\left|N_{kl_1}^{(1)}\right|^2\left(1 + b_1^2 + a_1^2\left(1 + \frac{1}{b_1^2}\right) - 4a_1\frac{\sqrt{k(l_1+n_1+1)}}{n_1}\right) = \\ = \left|N_{kl_1}^{(1)}\right|^2 \frac{\left(\beta_1^2+1\right)^2\left(1-b_1^2\right)^2}{\left(\beta_1^2-1\right)\left(\beta_1^2-b_1^2\right)} = 1,$$

откуда

$$N_{kl_1}^{(1)} = \frac{\sqrt{\left(\beta_1^2-1\right)\left(\beta_1^2-b_1^2\right)}}{\left(\beta_1^2+1\right)\left(1-b_1^2\right)}. \tag{46,101}$$

Для того чтобы получить второй тип решения, мы должны положить:

$$\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} = R\Omega_{l'+1,\,m}^{(2)}, \qquad \begin{pmatrix}\varphi'\\ \chi'\end{pmatrix} = -iR'\Omega_{l',\,m}^{(1)}, \tag{46,102}$$

где $l' = l - 1$. Тогда соотношения (46,61), (46,62) и (46,72) приводят к следующим уравнениям для определения радиальных функций R и R':

$$\left.\begin{aligned} WR &= -\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{l'}{r}\right)R', \\ W'R' &= \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{l'+2}{r}\right)R, \end{aligned}\right\} \tag{46,103}$$

которые отличаются от соответствующих уравнений для первого типа решения (46,74) и (46,75) заменой штрихованных величин на нештрихованные и наоборот.

Поэтому мы не будем повторять вычислений, а запишем лишь окончательные результаты. Для энергии второго типа решения мы будем иметь выражения [см. также соответствующую формулу (46,96),

найденную для первого типа решения]:

$$\frac{E^{(2)}}{m_0c^2}=\left(1+\frac{\alpha^2}{n_2^2}\right)^{-1/2}, \tag{46,104}$$

где эффективное главное квантовое число равно

$$n_2=k'+\sqrt{(l'+1)^2-\alpha^2}=k+1+\sqrt{l^2-\alpha^2}, \quad l_2=\sqrt{l^2-\alpha^2}. \tag{46,105}$$

Для волновой функции $\psi^{(2)}$ мы находим выражение

$$\psi^{(2)}=N_{kl_2}^{(2)}\begin{pmatrix} R_2\Omega_{l,m}^{(2)} \\ -ib_2R_2'\Omega_{l-1,m}^{(1)}\end{pmatrix}=N_{kl_2}^{(2)}N_{l,m}^{(2)}\begin{Bmatrix} R_2Y_l^{m-1} \\ R_2Y_l^m \\ -ib_2R_2'(l-1+m)\,Y_{l-1}^{m-1} \\ ib_2R_2'(l-m)\,Y_{l-1}^m \end{Bmatrix}. \tag{46,106}$$

Здесь $N_{l,m}^{(2)}$ — нормировочный коэффициент для шаровой функции определяемый равенством (46,69б);

$$\left.\begin{aligned} R_2&=R_{kl_2}+a_2R_{k+1,\,l_2-1}, \\ R_2'&=R_{kl_2}+a_2'R_{k+1,\,l_2-1}, \end{aligned}\right\} \tag{46,107}$$

причем значения коэффициентов a_2 и a_2' могут быть получены из (46,95) и (46,88а), если в последних в полном согласии с переходом от (46,86) к (46,105) сделать замену $k\to k+1$, $l+1\to l$. Тогда будем иметь:

$$a_2=\frac{b_2\beta_2-1}{\beta_2b_2^{-1}-1}\sqrt{\frac{2\sqrt{l^2-\alpha^2}+k+1}{k+1}}=\sqrt{\frac{b_2^2\beta_2^2-1}{b_2^{-2}\beta_2^2-1}}, \quad a_2'=a_2b_2^{-2},$$

$$b_2=\frac{l-\sqrt{l^2-\alpha^2}}{\alpha}, \quad \beta_2=\frac{k+1+\sqrt{l^2-\alpha^2}}{\alpha}\left[\left(1+\frac{\alpha^2}{(k+1+\sqrt{l^2-\alpha^2})^2}\right)^{1/2}+1\right],$$

$$N_{kl_2}^{(2)}=\frac{\sqrt{(\beta_2^2-1)(\beta_2^2-b_2^2)}}{(\beta_2^2+1)(1-b_2^2)}. \tag{46,108}$$

Физический смысл наличия двух решений, а также различие между ними будут установлены в следующем пункте.

ж) Момент количества движения. В § 17 было показано, что в случае центральных сил квадрат полного момента количества движения

$$\mathbf{J}=\frac{1}{2}\hbar\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{M}, \tag{46,109}$$

разный сумме орбитального

$$\mathbf{M}=[\mathbf{rp}]=\frac{\hbar}{i}[\mathbf{r}\nabla] \tag{46,109a}$$

и спинового

$$S = \frac{1}{2}\hbar\boldsymbol{\sigma} \tag{46,109б}$$

моментов, а также его проекция на ось z, коммутируют между собою и с оператором Гамильтона H.

С помощью формулы (46,109а) легко доказать следующие свойства орбитального момента количества движения:

$$\left.\begin{aligned} M_x M_y - M_y M_x = i\hbar M_z = \hbar^2 \frac{\partial}{\partial\varphi}, \\ M_x^2 + M_y^2 + M_z^2 = -\hbar^2 \nabla^2_{\theta\varphi}. \end{aligned}\right\} \tag{46,109в}$$

Подобные соотношения имеем также для спинового момента:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_1 = 2i\sigma_3 \text{ и т. д.}, \\ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 = 3. \end{aligned}\right\} \tag{46,109г}$$

Благодаря коммутативности **J** с гамильтонианом H мы можем написать следующие два закона сохранения:

$$\left(\frac{1}{2}\hbar\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{M}\right)^2 \psi = \hbar^2 j(j+1)\psi, \tag{46,110}$$

$$\left(\frac{1}{2}\hbar\sigma_3 + M_z\right)\psi = \hbar m_j \psi, \tag{46,110а}$$

причем величина j называется внутренним квантовым числом и характеризует абсолютное значение полного момента количества движения, а m_j — проекция полного момента количества движения на ось z. Заметим, что выбор оси z для характеристики проекции не нарушает общности наших рассуждений, поскольку при сферической симметрии все направления являются равноправными.

Согласно формулам (46,109в) и (46,36) оператор **M** действует на сферические волновые функции следующим образом:

$$M^2 Y_l^m = \hbar^2 l(l+1) Y_l^m, \quad M_z Y_l^m = \hbar m Y_l^m. \tag{46,110б}$$

Отсюда мы находим уравнения для определения квантового числа j для первого типа решения (46,97):

$$\left.\begin{aligned} \hbar^2\left[j(j+1) - \left(l+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(m-\frac{1}{2}\right)\right]\psi_1 = \hbar(M_x - iM_y)\psi_2, \\ \hbar^2\left[j(j+1) - \left(l+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(m-\frac{1}{2}\right)\right]\psi_2 = \hbar(M_x + iM_y)\psi_1, \\ \hbar^2\left[j(j+1) - \left(l+\frac{3}{2}\right)^2 - \left(m-\frac{1}{2}\right)\right]\psi_3 = \hbar(M_x - iM_y)\psi_4, \\ \hbar^2\left[j(j+1) - \left(l+\frac{3}{2}\right)^2 + \left(m-\frac{1}{2}\right)\right]\psi_4 = \hbar(M_x + iM_y)\psi_3. \end{aligned}\right\} \tag{46,110в}$$

Исключая из последних уравнений функции ψ_2 и ψ_4 и принимая во внимание соотношения (46,110б), находим:

$$\left[j(j+1)-\left(l+\frac{1}{2}\right)^2\right]^2=\left(l+\frac{1}{2}\right)^2,$$

$$\left[j(j+1)-\left(l+\frac{3}{2}\right)^2\right]^2=\left(l+\frac{3}{2}\right)^2.$$

Последние два уравнения имеют общее решение[1]) при

$$j=l+\frac{1}{2}, \quad l=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{46,111}$$

Точно так же, подставляя первое решение в формулу (46,110а), мы получим значения квантового числа m_j:

$$m_j=m-\frac{1}{2},$$

которые согласно (46,97а) будут меняться в пределах

$$m_j=-j,\ -j+1,\ \ldots,\ j-1,\ j. \tag{46,111а}$$

Подставляя в (46,110) и (46,110а) второе решение (46,106), аналогичным путем получаем значения j:

$$j=l-\frac{1}{2},\quad l=1,\ 2,\ 3,\ \ldots, \tag{46,111б}$$

а для числа m_j мы находим вновь область изменения (46,111а).

Из последних формул видно, что первое решение (46,97) соответствует случаю, когда орбитальный и спиновый моменты параллельны друг другу ($j=l+{}^1/_2$), а второе (46,106) — антипараллельны ($j=l-{}^1/_2$).

з) Четность состояний. Из формул (46,97) и (46,106) видно, что функции (ψ_1, ψ_2) и (ψ_3, ψ_4) относятся к различным собственным значениям оператора M^2. Собственное значение этого оператора для функций (ψ_1, ψ_2) равно $\hbar^2 l(l+1)$, а для функций (ψ_3, ψ_4) — $\hbar^2(l+1)(l+2)$ или $\hbar^2(l-1)l$.

Это означает, что волновая функция ψ, содержащая все четыре компоненты, не является собственной функцией оператора орбитального момента.

Величина l в решениях уравнений Дирака будет характеризовать четность состояния, которая связана с зеркальным отображением, т. е. с заменой $x=r\sin\theta\cos\varphi$ на $-x$, $y=r\sin\theta\sin\varphi$ на $-y$ и

[1]) Второе решение $j=-l-{}^3/_2$ соответствует отрицательным значениям l и поэтому должно быть отброшено. Эти же значения для j могут быть получены из любого одного уравнения системы (46,110в), если учесть соотношение

$$\left(M_x\pm iM_y\right)Y_l^m R=-\hbar\,(l\mp m)\,RY_l^{m\pm 1}. \tag{46,110г}$$

$z = r\cos\theta$ на $-z$. Оператор зеркального отображения I_r должен обладать свойством

$$I_r f(\mathbf{r}) = f(-\mathbf{r}).$$

При зеркальном отображении следует θ заменить на $\pi-\theta$ ($\sin\theta \to \sin\theta$, $\cos\theta \to -\cos\theta$), а φ — на $\pi+\varphi$ ($\cos\varphi \to -\cos\varphi$, $\sin\varphi \to -\sin\varphi$).

Исследуем прежде всего четность шаровой функции Y_l^m, определяемой равенствами (46,31) и (46,33):

$$Y_l^m = (l-m)!\, e^{im\varphi}(1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} \frac{(x^2-1)^l}{2^l l!}.$$

При замене φ на $\varphi+\pi$ имеем: $e^{im\varphi} \to e^{im\pi}e^{im\varphi} = (-1)^m e^{im\varphi}$. При замене $\cos\theta = x$ на $-\cos\theta = -x$ имеем $1-x^2 \to 1-x^2$, а

$$\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} \to (-1)^{l+m} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}.$$

Поэтому общая четность шаровой функции будет определяться квантовым числом l:

$$I_r Y_l^m = (-1)^l Y_l^m. \qquad (46,112)$$

Отсюда видно, что при зеркальных отображениях функции (ψ_3, ψ_4), пропорциональные $Y_{l\pm 1}^m$, помимо общего возможного изменения знака должны изменить знак относительно функций (ψ_1, ψ_2), пропорциональных Y_l^m. Это связано с тем обстоятельством, что, как было показано в § 23, п. д.), оператором зеркального преобразования (пространственной инверсии) уравнения Дирака является матрица ρ_3. Умножение же решения (46,97) на матрицу ρ_3 сведется к изменению знака лишь у функций ψ_3 и ψ_4. Поэтому оператор зеркального преобразования уравнений Дирака равен

$$I = I_r \rho_3. \qquad (46,112\text{a})$$

Отсюда видно, что четность волновой функции будет определяться величиной l, так как

$$I\psi = I_r \rho_3 \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = (-1)^l \psi. \qquad (46,112\text{б})$$

Поскольку, как видно из (46,111) и (46,111б), при заданном j возможны два значения l, отличающиеся на единицу, то одно из решений будет четным, а другое — нечетным. Заметим, что если

искать зеркальное преобразование в функциях, где позитрон сопоставлен с положительными энергиями [см. преобразование (42,67)], то четность будет определяться функциями $(\psi_3, \psi_4) \to (-\psi_2'^{+}, \psi_1'^{+})$, и потому

$$I\psi'^{+T} = I_r\rho_3 \begin{pmatrix} \psi_1'^{+} \\ \psi_2'^{+} \\ \psi_3'^{+} \\ \psi_4'^{+} \end{pmatrix} = (-1)^{l+1}\psi'^{+T}. \qquad (46{,}112в)$$

Наконец, сделаем несколько замечаний о квантовом способе сложения векторов. Для простоты ограничимся сначала нерелятивистским случаем, когда можно пренебречь спиновыми эффектами. Как видно из (46,110б), квадрат момента количества движения (M^2) и его проекция на ось z (M_z) обладают следующими собственными значениями:

$$M^2 = \hbar^2 l(l+1), \quad M_z = \hbar m.$$

Максимальное же значение m в нерелятивистском случае равно l, и поэтому

$$M^2 = (M_z)^2_{макс} + (\Delta M)^2,$$

где

$$(\Delta M)^2 = \hbar^2 l,$$

в то время как в классической теории должно строго соблюдаться соотношение

$$M^2 = (M_z)^2_{макс},$$

поскольку в этом случае вектор $\boldsymbol{M}$ должен быть параллельным оси z.

Появление дополнительного орбитального момента $(\Delta M)^2$ связано с некоммутативностью проекций момента количества движения [см. (46,109в)] и потому является чисто квантовым эффектом. В данном отношении этот дополнительный момент аналогичен нулевой энергии гармонического осциллятора.

В самом деле, из квантовой теории известно, что если два оператора не коммутируют друг с другом:

$$\mathrm{ML} - \mathrm{LM} = i\hbar \mathrm{N},$$

то минимальное значение произведения квадратов средних неопределенностей дается соотношением

$$(\Delta M)^2_{мин} (\Delta N)^2_{мин} = \frac{\hbar^2}{4} N^2,$$

где N — собственное значение оператора N. Поэтому прямым следствием некоммутативности операторов M_x и M_y при $m=l$ является соотношение

$$(\Delta M_x)^2_{\text{мин}} (\Delta M_y)^2_{\text{мин}} = \frac{\hbar^2}{4} (M_z)^2_{\text{макс}} = \frac{\hbar^4}{4} l^2. \qquad (46,113)$$

Отсюда в силу симметрии относительно осей x и y имеем:

$$(\Delta M_x)^2_{\text{мин}} = (\Delta M_y)^2_{\text{мин}} = \frac{\hbar^2}{2} l, \qquad (46,113\text{а})$$

т. е. сумма этих минимальных моментов и определяет искомый дополнительный момент:

$$(\Delta M)^2 = (\Delta M_x)^2_{\text{мин}} + (\Delta M_y)^2_{\text{мин}} = \hbar^2 l. \qquad (46,113\text{б})$$

Точно так же, как видно из (46,109г), проекции спиновых моментов не коммутируют друг с другом:

$$S_x S_y - S_y S_x = i\hbar S_z,$$

и поэтому квадрат спинового момента равен:

$$S^2 = (S_z)^2_{\text{макс}} + (\Delta S_x)^2_{\text{мин}} + (\Delta S_y)^2_{\text{мин}} = \hbar^2 \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{3}{4}\hbar^2,$$

причем

$$(S_z)^2_{\text{макс}} = \frac{1}{4}\hbar^2.$$

Аналогичное соотношение имеет место и для полного момента количества движения:

$$J^2 = (\Delta J_z)^2_{\text{макс}} + (\Delta J_x)^2_{\text{мин}} + (\Delta J_y)^2_{\text{мин}} = \hbar^2 j(j+1), \qquad (46,114)$$

в то время как $(\Delta J_z)^2_{\text{макс}} = \hbar^2 j^2$.

Соотношение (46,114) можно назвать законом вычисления квадрата момента количества движения по квантовой теории.

и) Приближенный вид решений уравнения Дирака. Для дальнейших исследований нет смысла пользоваться точными выражениями для собственных значений энергии и собственных функций. При вычислении энергии достаточно будет ограничиваться величинами порядка α^2, а при вычислении волновых функций — даже величинами порядка α.

Это связано с тем обстоятельством, что добавки к энергии порядка α^4 не только малы, но и перекрываются более сильными поправками α^3, связанными с учетом электрон-позитронного вакуума.

В этом приближении мы будем иметь следующие значения для энергии. Для решения первого типа ($j=l+{}^1/_2$) согласно формуле (46,84) находим[1]):

$$\frac{\mathcal{E}_{nl}^{(1)}}{h}=-\frac{R}{n^2}\left(1+\frac{\alpha^2}{n^2}\left(\frac{n}{l+1}-\frac{3}{4}\right)\right), \tag{46,115}$$

где $n=l+k+1$ — главное квантовое число.

Точно так же для решения второго типа ($j=l-{}^1/_2$) согласно (46,104) имеем[1]):

$$\frac{\mathcal{E}_{nl}^{(2)}}{h}=-\frac{R}{n^2}\left(1+\frac{\alpha^2}{n^2}\left(\frac{n}{l}-\frac{3}{4}\right)\right). \tag{46,116}$$

При вычислении волновой функции для решения первого типа ($j=l+{}^1/_2$) можно с учетом членов порядка α положить:

$$b_1=\frac{\alpha}{2(l+1)},\quad a_1'=\sqrt{1-\frac{(l+1)^2}{n^2}},\quad a_1=0,\quad l_1=l,\quad \beta_1=\frac{2n}{\alpha}$$

[см. (46,97) и (46,106)], а для коэффициента $N_{kl_1}^{(1)}$ согласно (46,101) мы найдем в данном приближении:

$$N_{kl_1}^{(1)}=1.$$

Поэтому решение (46,97) можно представить в виде

$$\psi_{nlm}^{(1)}=N_{lm}^{(1)}\begin{vmatrix}(l+m)\,Y_l^{m-1}R_{kl}\\ -(l-m+1)\,Y_l^mR_{kl}\\ \dfrac{i\alpha}{2(l+1)}\,Y_{l+1}^{m-1}R_{kl}'\\ \dfrac{i\alpha}{2(l+1)}\,Y_{l+1}^{m}R_{kl}'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}R_{kl}\Omega_{l,m}^{(1)}\\ \dfrac{i\alpha}{2(l+1)}R_{kl}'\Omega_{l+1,m}^{(2)}\end{vmatrix}, \tag{46,117}$$

где R_{kl} определяется из (46,44) и (46,46):

$$R_{kl}=N_{kl}e^{-\rho/2}\rho^lQ_k^{2l+1}(\rho), \tag{46,118}$$

$$N_{kl}=\sqrt{\frac{4}{a_0^3n^4k!\,(n+l)!}},\quad \rho=\frac{2r}{a_0n},\quad a_0=\frac{\hbar^2}{m_0e^2}, \tag{46,119}$$

---

[1]) Из формул (46,115) и (46,116) видно, что энергия зависит лишь от главного квантового числа n и внутреннего квантового числа j. Поэтому формулы (46,115) и (46,116) могут быть объединены в одну:

$$\frac{\mathcal{E}_{nj}}{h}=-\frac{R}{n^2}\left[1+\frac{\alpha^2}{n^2}\left(\frac{n}{j+{}^1/_2}-\frac{3}{4}\right)\right]. \tag{46,116a}$$

Полагая в (46,116a) $j=l+{}^1/_2$ и $j=l-{}^1/_2$, получим соответственно формулы (46,115) и (46,116).

т. е. функция R_{kl} будет нормирована на единицу [см. условие (46,45)]. Для функции же R'_{kl} имеем [1]):

$$R'_{kl} = R_{kl} + \sqrt{1 - \frac{(l+1)^2}{n^2}}\, R_{k-1,\, l+1}. \tag{46,119a}$$

Отсюда видно, что функции ψ_3 и ψ_4 малы и имеют порядок $\alpha = e^2/c\hbar$ относительно функций ψ_1 и ψ_2. Заметим, что в атоме водорода

$$\alpha \sim \frac{v}{c}. \tag{46,120}$$

Значения же нормировочного коэффициента $N^{(1)}_{lm}$ согласно (46,69а) остаются в этом приближенном случае без изменения, т. е. [2])

$$N^{(1)}_{lm} = \frac{1}{\sqrt{4\pi (l+m)!\,(l-m+1)!}}. \tag{46,121}$$

Точно так же для решений второго типа ($j = l - {}^1/_2$) мы найдем волновые функции:

$$\psi^{(2)}_{nlm} = N^{(2)}_{lm} \begin{pmatrix} Y_l^{m-1} R_{kl} \\ Y_l^m R_{kl} \\ -\dfrac{i\alpha (l+m-1)}{2l} Y_{l-1}^{m-1} R''_{kl} \\ \dfrac{i\alpha (l-m)}{2l} Y_{l-1}^m R''_{kl} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{kl}\Omega^{(2)}_{l,\,m} \\ -\dfrac{i\alpha}{2l} R''_{kl}\Omega^{(1)}_{l-1,\,m} \end{pmatrix}, \tag{46,122}$$

где

$$R''_{kl} = R_{kl} + \sqrt{1 - \frac{l^2}{n^2}}\, R_{k+1,\, l-1}, \tag{46,123}$$

$$N^{(2)}_{lm} = \frac{1}{\sqrt{4\pi (l-m)!\,(l+m-1)!}}. \tag{46,124}$$

к) Правила отбора. Согласно формуле (27,32) вероятность спонтанного перехода

$$A_{ba} = \frac{4e^2\varkappa_{ba}}{3\hbar} |\boldsymbol{x}^0_{ab}|^2$$

---

[1]) В первом издании книги мы, учитывая при вычислении волновой функции члены порядка α, положили $R'_{kl} = R_{kl}$, т. е. отбросили члены, пропорциональные $R_{k-1,\, l+1}$. Это является математическим дефектом, однако никоим образом не сказавшимся на наших дальнейших вычислениях, поскольку во всех рассматриваемых нами примерах мы или вовсе не учитывали функций ψ_3 и ψ_4 (эффект Зеемана), или решение $R_{k-l;\, l+1}$ было ортогональным решению R_{kl} и поэтому в окончательный результат не входило (сдвиг уровней).

[2]) Значение нормировочного коэффициента $N^{(1)}_{lm}$ может быть найдено в результате нормирования непосредственно приближенного решения (46,117), если при вычислении интеграла отбросить члены порядка α^2.

пропорциональна квадрату матричного элемента $\boldsymbol{\alpha}^0_{ab} = \int \psi_a^+ \boldsymbol{\alpha} \psi_b \, d^3x$. В частности, если начальное состояние b будет характеризоваться квантовыми числами n, l, j, а конечное — числами n', l', j', то значение матричного элемента $(\alpha^0_{ab})_z$ становится равным (в случае, когда оба состояния принадлежат первому решению $j = l + {}^1/_2$):

$$(\alpha^0_{ab})_z = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \left\{ \left[\frac{(l+m)}{2(l'+1)} Y_l^{+m-1} Y_{l'+1}^{m'-1} + \frac{(l-m+1)}{2(l'+1)} Y_l^{+m} Y_{l'+1}^{m'} \right] B + \right.$$
$$\left. + \left[\frac{(l'+m')}{2(l+1)} Y_{l+1}^{+m-1} Y_{l'}^{m'-1} + \frac{(l'-m'+1)}{2(l+1)} Y_{l+1}^{+m} Y_{l'}^{m'} \right] B' \right\} \sin\theta \, d\theta, \qquad (46{,}125)$$

причем для коэффициентов B и B' имеем выражения:

$$B = i\alpha N^{(1)}_{lm} N^{(1)}_{l'm'} \left(\int_0^\infty R_{kl} R_{k'l'} r^2 \, dr + \right.$$
$$\left. + \sqrt{1 - \frac{(l'+1)^2}{n^2}} \int_0^\infty R_{kl} R_{k'-1,\, l'+1} r^2 \, dr \right),$$

$$B' = -i\alpha N^{(1)}_{lm} N^{(1)}_{l'm'} \left(\int_0^\infty R_{kl} R_{k'l'} r^2 \, dr + \right.$$
$$\left. + \sqrt{1 - \frac{(l+1)^2}{n^2}} \int_0^\infty R_{k-1,\, l+1} R_{k'l'} r^2 \, dr \right),$$

которые, как легко показать, при $l \neq l'$ не обращаются в нуль.

Отсюда с помощью условия (46,35) будем иметь отличное от нуля значение для матричного элемента (46,125) лишь в случае, когда

$$m = m', \quad l' = l - 1 \quad \text{или} \quad l' = l + 1.$$

Определяя подобным же способом матричные элементы $(\alpha^0_{ab})_x$, $(\alpha^0_{ab})_y$, а также вычисляя матричные элементы, когда оба состояния принадлежат второму решению ($j = l - {}^1/_2$) или разным решениям, найдем следующие правила отбора, т. е. такие изменения квантовых чисел, для которых вероятность перехода отлична от нуля:

$$\Delta l = \pm 1, \quad \Delta m_j = 0, \pm 1, \quad \Delta j = 0, \pm 1. \qquad (46{,}126)$$

Заметим, что последние правила отбора имеют место для так называемого дипольного излучения, когда в выражении $\boldsymbol{\alpha}_{ab}$ [см. соотношение (27,24)] множитель

$$e^{-i\boldsymbol{\varkappa r}} = 1 - i(\boldsymbol{\varkappa r}) + \frac{(i\boldsymbol{\varkappa r})^2}{2!} - \ldots$$

полагаем равным единице, т. е. считаем длину волны излучаемого света $\lambda \sim 1/\varkappa$ много большей радиуса атома ($(r\varkappa) = r/\lambda \ll 1$). Учитывая в последнем разложении следующие члены, мы получим правила отбора для квадрупольного и т. д. излучений [более подробно см. § 50, п. в)].

л) Тонкая структура. Как было только что показано, уравнение Дирака имеет два типа решений, в противоположность скалярному, обладающему одним решением. Это связано с тем обстоятельством, что уравнение Дирака описывает частицы со спином $^1/_2$, и каждое решение соответствует одному из направлений спина.

Таким образом, положение электрона в атоме характеризуется четырьмя квантовыми числами n, l, j, m_j, три из которых характеризуют его пространственное положение, а четвертое — внутреннее состояние, связанное с направлением спина.

Главное квантовое число n может принимать целые значения, начиная от единицы:

$$n = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

Орбитальное квантовое число l принимает значения

$$l = 0 \ (S\text{-состояние}),\ 1 \ (P\text{-состояние}),\ 2, \ldots, n-1.$$

Внутреннее квантовое число j равно:

$$j = l + \frac{1}{2} \quad \text{(первый тип решения)},$$

$$j = l - \frac{1}{2} \quad \text{(второй тип решения)},$$

причем при $l = 0$ (S-состояние) второй тип решения ($j = -{}^1/_2$) не существует.

Наконец, магнитное квантовое число m_j принимает $2j+1$ значений:

$$m_j = -j, \quad -j+1 \ldots j-1, \ j.$$

Заметим, что выражения для спектральных уровней обоих типов решений [см. формулы (46,115) и (46,116)] могут быть записаны единой формулой [см. (46,116а)]:

$$\frac{\mathscr{E}_{nj}}{h} = -\frac{R}{n^2}\left[1 + \frac{\alpha^2}{n^2}\left(\frac{n}{j+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4}\right)\right], \tag{46,127}$$

согласно которой термы с учетом спиновых и релятивистских эффектов не должны зависеть от квантового числа l и оказываются поэтому двукратно вырожденными.

Рассмотрим для примера уровни атома водорода, принадлежащие серии Бальмера ($n = 2$).

При этом возможны три уровня:

$$\nu(2^2S_{1/2}) = \frac{E_{2\,1/2\,0}}{h}, \quad \nu(2^2P_{1/2}) = \frac{E_{2\,1/2\,1}}{h} \quad \text{и} \quad \nu(2^2P_{3/2}) = \frac{E_{2\,3/2\,1}}{h},$$

величина которых равна

$$\nu(2^2S_{1/2}) = \nu(2^2P_{1/2}) = -\frac{R}{4}\left[1 + \frac{\alpha^2}{4}\left(2 - \frac{3}{4}\right)\right],$$

$$\nu(2^2P_{3/2}) = -\frac{R}{4}\left[1 + \frac{\alpha^2}{4}\left(1 - \frac{3}{4}\right)\right],$$

Отсюда для разности уровней мы находим значение

$$\nu(2^2P_{3/2}) - \nu(2^2P_{1/2}) = \frac{R\alpha^2}{16},$$

совпадающее с формулой тонкой структуры первоначальной квантовой теории (46,25), а не с формулой (46,57), полученной с помощью релятивистского скалярного уравнения. Таким образом, учет спиновых эффектов приводит к формуле, находящейся в хорошем согласии с экспериментом.

Согласно теории Дирака уровни $2^2S_{1/2}$ и $2^2P_{1/2}$ в атоме водорода должны совпадать друг с другом, так как они имеют одни и те же значения n и j. Этот вопрос явился предметом специальных экспериментальных исследований. Более десяти лет тому назад спектроскописты высказали сомнение в правильности этого теоретического заключения, но так как опыты были не слишком точны, на это обстоятельство не было обращено особого внимания. Впервые сдвиг уровня $2S_{1/2}$ убедительно был доказан в 1947 г. опытами Лэмба и Ризерфорда [1]).

Рассмотрим переход электрона из состояния $2^2S_{1/2}$ в состояние $1^2S_{1/2}$. Дипольный или даже квадрупольный переход между этими состояниями запрещен [см. ниже формулу (50,49)]. Поэтому состояние $2^2S_{1/2}$ является метастабильным. Переход из метастабильного состояния возможен или с испусканием двух фотонов (соответствующая вероятность уменьшается по сравнению с разрешенной примерно в 10^8 раз), или с предварительным переходом электрона из метастабильного состояния на уровень 2^2P. Лэмб и Ризерфорд поставили своей целью исследовать последний способ перехода.

В общих чертах схема опытов такова. Пучок атомов водорода подвергался бомбардировке пересекающим его потоком электронов, в результате чего некоторая часть атомов возбуждалась до метастабильного состояния. Метастабильный атом, в противоположность невозбужденному, при падении на металлическую мишень легко отдает

---

[1]) W. Lamb and R. Retherford, Phys. Rev. 72, 241 (1947), [См. сборник «Сдвиг уровней атомных электронов», стр. 45; УФН 45, 553 (1951)]; более поздняя работа: S. Tribwasser, E. Dayhoff and W. Lamb, Phys. Rev. 89, 98 (1953).

свою энергию возбуждения, вырывая электроны из металла, благодаря чему наблюдается электрический ток на мишень. Если пучок подвергнуть действию радиочастотного излучения [1]), то при некоторой частоте ν наблюдается сильное тушащее действие, в результате которого ток на мишень прекращается. Эта частота истолковывается как резонансная частота, вызывающая переходы $2^2S_{1/2} \to 2^2P_{1/2}$ или $2^2S_{1/2} \to 2^2P_{3/2}$ с последующим практически мгновенным переходом на уровень $1^2S_{1/2}$. Отсюда было найдено, что терм $2^2S_{1/2}$ сдвинут вверх относительно терма $2^2P_{1/2}$ примерно на $^1/_{10}$ часть дублета $2^2P_{3/2} - 2^2P_{1/2}$. Дальнейшие исследования дали для сдвига терма (без учета сверхтонкой структуры) значение, равное $1057{,}77 \pm 0{,}10$ *мггц*.

Это, казалось бы ничтожное, расхождение между теорией и экспериментом привело к замечательному прогрессу, достигнутому в квантовой электродинамике за последнее время. Теоретики показали, что этот сдвиг уровня обязан электрон-позитронному вакууму, свойства которого теперь уже изучаются экспериментально.

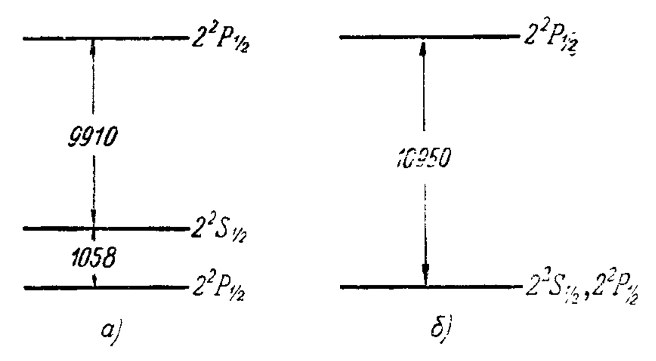


Рис. 24. Расположение термов в атоме водорода:
а — согласно экспериментальным данным, *б* — по теории Дирака.

Расположение термов водородного атома при $n = 2$, полученное на основе экспериментов Лэмба и Ризерфорда, приведено на рис. 24, *а*. Для сравнения на рис. 24, *б* приведено расположение этих же термов по теории Дирака. Расстояния между уровнями даны в *мггц* [2]).

м) Сдвиг уровней, обусловленный вакуумными членами. Согласно формуле (45,25) электрон, находясь в поле ядра

$$\Phi = \frac{e}{r}, \qquad \boldsymbol{E} = \frac{e\boldsymbol{r}}{r^3},$$

---

[1]) Авторы в своих опытах фиксировали волну радиочастотного излучения а условие резонанса, которое соответствовало разности зеемановских компонент между состояниями $2^2S_{1/2}$ и $2^2P_{1/2}$ или $2^2P_{3/2}$, подгоняли путем изменения магнитного поля H, а затем, экстраполируя результат на случай $H = 0$, находили сдвиг уровня.

[2]) Краткая история открытия сдвига уровней дана во вступительной статье Д. Д. Иваненко к сборнику «Сдвиг уровней атомных электронов»; см. также дополнение к монографии «Классическая теория поля».

благодаря вакуумным членам получает дополнительную потенциальную энергию

$$U' = U_1' + U_2' = \frac{4a}{3k_0^2}\alpha e^2\delta(\boldsymbol{r}) - \frac{ie^2 a}{4\pi k_0 r^3}\rho_3(\boldsymbol{\alpha r}), \qquad (46{,}128)$$

где

$$\alpha = \ln\frac{k_0}{\varkappa_0} - \ln 2 + \frac{11}{24} - \frac{1}{5};$$

кроме того, мы приняли во внимание соотношение

$$\nabla^2\frac{1}{r} = -4\pi\delta(\boldsymbol{r}).$$

Найдем сдвиг урозней, обусловленный соответственно первым (U_1') и вторым (U_2') членами взаимодействия.

Сдвиг уровней, связанный с первым членом U_1', будет равен:

$$\frac{\Delta\mathcal{E}_1}{h} = \frac{1}{h}\int\psi^+ U_1'\psi\, d^3x = \frac{4a}{3hk_0^2}\alpha e^2|\psi(0)|^2.$$

Этот сдвиг имеет место только для S-состояний, поскольку для других состояний ($l = 1, 2, 3, \ldots$) величина $|\psi(0)|^2$ равна нулю. Подставляя выражение для ψ из равенства (46,117), находим:

$$|\psi_{n00}(0)|^2 = \lim_{l=m=0} N_{lm}^2 N_{kl}^2\left(Q_k^{2l+1}(0)\right)^2.$$

Принимая, далее, во внимание равенства (46,118), (46,119) и (46,121), получаем:

$$|\psi_{n00}(0)|^2 = \frac{1}{\pi n^3 a_0^3}, \qquad (46{,}128a)$$

причем радиус первой боровской орбиты определяется формулой

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{m_0 e^2}.$$

Отсюда для этого сдвига уровня имеем:

$$\frac{\Delta\mathcal{E}_1}{h} = \frac{8aR\alpha^3}{3\pi n^3}, \qquad (46{,}129)$$

где $R = m_0 e^4/4\pi h^3$ является постоянной Ридберга.

Сдвиг уровня, обусловленный вторым членом взаимодействия U_2', отличен от нуля при любых значениях l:

$$\frac{\Delta\mathcal{E}_2}{h} = -\frac{ie^2 a}{4\pi k_0 h}\int\psi^+\frac{\rho_3(\boldsymbol{\alpha r})}{r^3}\psi\, d^3x =$$

$$= -\frac{i\alpha e^2}{4\pi k_0 h}\int\left[\psi_1^+\left(\sin\theta e^{-i\varphi}\psi_4 + \cos\theta\psi_3\right) +\right.$$

$$+ \psi_2^+\left(\sin\theta e^{i\varphi}\psi_3 - \cos\theta\psi_4\right) - \left(\cos\theta\psi_3^+ + \sin\theta e^{i\varphi}\psi_4^+\right)\psi_1 -$$

$$\left. - \left(\sin\theta e^{-i\varphi}\psi_3^+ - \cos\theta\psi_4^+\right)\psi_2\right]\frac{d^3x}{r^2}. \qquad (46{,}130)$$

Учитывая рекуррентные соотношения для шаровых функций [1]):

$$\left.\begin{aligned}(l+m)\,Y_l^{m-1} &= \sin\theta e^{-i\varphi} Y_{l-1}^m + \cos\theta Y_{l+1}^{m-1},\\ (l+1-m)\,Y_l^m &= -\sin\theta e^{i\varphi} Y_{l+1}^{m-1} + \cos\theta Y_{l+1}^m,\end{aligned}\right\}\qquad (46{,}131)$$

найдем, принимая во внимание (46,117), для первого типа решения ($j=l+{}^1/_2$):

$$\psi_1^+\left(\sin\theta e^{-i\varphi}\psi_4+\cos\theta\psi_3\right) = -\left(\cos\theta\psi_3^+ + \sin\theta e^{i\varphi}\psi_4^+\right)\psi_1 =$$
$$= \frac{i\alpha}{2(l+1)}\left(N_{lm}^{(1)}\right)^2 R_{kl}R'_{kl}(l+m)^2\, Y_l^{+\,m-1}Y_l^{m-1},$$
$$\psi_2^+\left(\sin\theta e^{i\varphi}\psi_3-\cos\theta\psi_4\right) = -\left(\sin\theta e^{-i\varphi}\psi_3^+ - \cos\theta\psi_4^+\right)\psi_2 =$$
$$= \frac{i\alpha}{2(l+1)}\left(N_{lm}^{(1)}\right)^2 R_{kl}R'_{kl}(l-m+1)^2\, Y_l^{+m}Y_l^m.$$

Отсюда, учитывая еще соотношения (46,119) и (46,121), получаем:

$$\frac{\Delta\mathscr{E}_2}{h} = \frac{e^2\alpha^2}{4\pi k_0 h(l+1)}\left[\int_0^\infty r^2\frac{R_{kl}^2}{r^2}\,dr + \sqrt{1-\frac{(l+1)^2}{n^2}}\int_0^\infty r^2\frac{R_{kl}R_{k-1,\,l+1}}{r^2}\,dr\right].\qquad (46{,}132)$$

Согласно (46,44) будем иметь для среднего значения:

$$\overline{r^{-2}} = \int_0^\infty r^2\frac{R_{kl}^2}{r^2}\,dr = \frac{N_{kl}^2}{2\sqrt{A}}\int_0^\infty e^{-\rho}\rho^{2l}\left[Q_k^{2l+1}(\rho)\right]^2 d\rho.$$

Воспользовавшись для одной функции Q_k^{2l+1} замкнутой формулой (46,42), в результате интегрирования по частям (k раз) получим:

$$\overline{r^{-2}} = (-1)^k\frac{N_{kl}^2}{2\sqrt{A}}\int_0^\infty \rho^{2l+1+k}e^{-\rho}\frac{d^k}{d\rho^k}\left(\frac{1}{\rho}Q_k^{2l+1}(\rho)\right)d\rho.$$

Подставляя сюда вместо $Q_k^{2l+1}(\rho)$ разложение (46,43), видим, что при вычислении k-й производной отличным от нуля будет только

[1]) Аналогичные соотношения будут иметь место также для комплексно-сопряженных величин. Они могут быть легко получены из известных рекуррентных формул для обобщенных полиномов Лежандра:

$$\left.\begin{aligned}(l+m)P_l^{m-1}(x) &= (1-x^2)^{1/2}P_{l+1}^m(x) + (l-m+2)\,xP_{l+1}^{m-1},\\ P_l^m(x) &= xP_{l+1}^m(x) - (l-m+2)(1-x^2)^{1/2}P_{l+1}^{m-1}(x).\end{aligned}\right\}\qquad (46{,}131\text{a})$$

последний (постоянный при $j=k$) член полинома Q_k^{2l+1}:

$$\frac{d^k}{d\rho^k}\frac{1}{\rho}Q_k^{2l+1}(\rho)=\frac{(2l+k+1)!}{(2l+1)!}(-1)^k\frac{k!}{\rho^{k+1}}.$$

Отсюда, учитывая еще значение для нормировочного коэффициента из (46,46), а также (46,48), найдем известное из теории Шредингера выражение для среднего значения обратного квадрата радиуса [1]):

$$\overline{r^{-2}}=\frac{2A}{n(2l+1)!}\int\limits_0^\infty \rho^{2l}e^{-\rho}\,d\rho=\frac{1}{(l+1/2)\,n^3a_0^2}=\frac{2Rh}{n^3(2l+1)}\frac{2m_0}{\hbar^2}. \quad (46,133)$$

Аналогичным путем можно раскрыть и другой интеграл, входящий в (46,132).

Этот интеграл имеет следующее значение:

$$I=\int\limits_0^\infty r^2\frac{R_{kl}R_{k-1,\,l+1}}{r^2}\,dr=\frac{N_{kl}N_{k-1,\,l+1}}{2\sqrt{A}}\int\limits_0^\infty e^{-\rho}\rho^{2l+1}Q_{k-1}^{2l+3}(\rho)\,Q_k^{2l+1}(\rho)\,d\rho.$$

Вновь подставляя сюда вместо функции Q_k^{2l+1} замкнутое выражение (46,42), найдем:

$$I=\frac{N_{kl}N_{k-1,\,l+1}}{2\sqrt{A}}\int\limits_0^\infty Q_{k-1}^{2l+3}(\rho)\,\frac{d^k}{d\rho^k}e^{-\rho}\rho^{2l+k+1}\,d\rho=$$

$$=(-1)^k\frac{N_{kl}N_{k-1,\,l+1}}{2\sqrt{A}}\int\limits_0^\infty \rho^{2l+k+1}e^{-\rho}\frac{d^k}{d\rho^k}Q_{k-1}^{2l+3}(\rho)\,d\rho=0.$$

---

[1]) Легко вычислить

$$\overline{r^{-1}}=\int\limits_0^\infty\frac{r^2R_{kl}^2}{r}\,dr=(-1)^k\frac{N_{kl}^2}{4A}\int\limits_0^\infty \rho^{2l+1+k}e^{-\rho}\frac{d^k}{d\rho^k}\left(Q_k^{2l+1}\right)d\rho=\frac{1}{n^2a_0} \quad (46,133а)$$

и

$$\overline{r^{-3}}=\int\limits_0^\infty\frac{r^2R_{kl}^2}{r^3}\,dr=(-1)^k N_{kl}^2\int\limits_0^\infty \rho^{2l+1+k}e^{-\rho}\times$$

$$\times\frac{d^k}{d\rho^k}\left(\frac{1}{\rho^2}Q_k^{2l+1}\right)d\rho=\frac{1}{n^3l\,(l+1/2)\,(l+1)\,a_0^3}, \quad (46,133б)$$

а также найти средние значения более высоких степеней обратных радиусов $\overline{r^{-4}}$, $\overline{r^{-5}}$, $\overline{r^{-6}}$ и т. д.

Последнее выражение равно нулю точно, поскольку в него входит k-я производная полинома Q_{k-1}^{2l+3} степени $k-1$. Поэтому для сдвига уровня находим значение

$$\frac{\Delta \mathcal{E}_2}{h} = \frac{R\alpha^3}{\pi n^3 (l+1)(2l+1)} \tag{46,134}$$

при $j = l + {}^1/_2$.

Аналогично имеем следующее значение для сдвига уровня, принадлежащего второму типу решения ($j = l - {}^1/_2$):

$$\frac{\Delta \mathcal{E}_2}{h} = -\frac{R\alpha^3}{\pi n^3 l (2l+1)}. \tag{46,135}$$

Поэтому для энергии состояния n, j, l мы получаем выражение

$$\frac{\mathcal{E}_{njl}}{h} = -\frac{R}{n^2}\left[1 + \frac{\alpha^2}{n^2}\left(\frac{n}{j+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{\alpha^3}{\pi n}\left(\frac{8a}{3}\delta_{l,0} - \frac{1}{l(2l+1)}\delta_{j,l-1/2} + \frac{1}{(l+1)(2l+1)}\delta_{j,l+1/2}\right)\right]. \tag{46,136}$$

Эта формула показывает, что при учете вакуумных членов энергия оказывается зависящей не только от квантовых чисел n и j, но также и от квантового числа l. Благодаря этому уровень $2^2S_{1/2}$ сдвигается вверх относительно уровня $2^2P_{1/2}$ на величину

$$\frac{\mathcal{E}_{2\,1/2\,0} - \mathcal{E}_{2\,1/2\,1}}{h} = \frac{R\alpha^3}{3\pi}\left(\ln\frac{k_0}{\varkappa_0} - \ln 2 + \frac{11}{24} - \frac{1}{5} + \frac{1}{2}\right). \tag{46,137}$$

Таким образом, сдвиг S-уровней относительно P-уровней при $j = {}^1/_2$ складывается из трех частей: сдвига, пропорционального коэффициенту $b = \ln\frac{k_0}{\varkappa_0} - \ln 2 + \frac{11}{24}$ (по существу, связанного с флуктуациями электромагнитного поля); сдвига, пропорционального коэффициенту $-{}^1/_5$ (связанного с поляризацией электрон-позитронного вакуума); сдвига, пропорционального коэффициенту ${}^1/_2$ [обязанного взаимодействию дополнительного (полевого) момента электрона с электростатическим полем ядра].

Подставляя вместо величины $\ln\frac{k_0}{\varkappa_0}$ значение, вычисленное по формуле (44,69) $\left(\ln\frac{k_0}{\varkappa_0} = 7{,}6876\right)$, получим величину общего сдвига:

$$\nu(2^2S_{1/2}) - \nu(2^2P_{1/2}) = 1051 \text{ мггц}, \tag{46,138}$$

что находится в хорошем согласии с опытом (1057,77 *мггц*).

Заметим, что формула (46,136) не исчерпывает даже на сегодняшний день наших знаний об энергии связи электрона в атоме водорода. Более точные теоретические расчеты, проделанные Саль-

нетером [1]), в которых учитывались члены следующего приближения, дали для сдвига (46,138) более близкое к эксперименту значение 1057,19 *мггц*; проведение расчета в следующем приближении, однако, не входит в нашу задачу.

Кроме атома водорода, смещение уровней наблюдалось также в спектрах ионизованного атома гелия, лития и атомов дейтерия. Экспериментальные данные для сложных атомов также находятся в хорошем согласии с теоретическими расчетами.

Естественно ожидать, что учет вакуумных членов должен был также сказаться на ряде других эффектов. Так, в § 44 нами было показано, что вакуумные члены приводят к существованию дополнительного магнитного момента электрона, который был обнаружен экспериментально (в частности, при исследовании аномального эффекта Зеемана). Более подробно этот вопрос будет нами рассмотрен в следующем параграфе.

н) Случай свободного движения. Как известно, решение волнового уравнения свободного движения (пространственная часть) может быть записано не только в виде набора плоских волн типа:

$$\psi(\boldsymbol{k}) = e^{i\boldsymbol{kr}}, \tag{46,139}$$

но и выражено через шаровые функции. В самом деле, разложение плоской волны (46,139) в ряд по полиномам Лежандра имеет вид:

$$e^{i\boldsymbol{kr}} = \frac{1}{4\pi}\sum_{l=0}^{\infty} g_l(kr)(2l+1)P_l\left(\frac{\boldsymbol{kr}}{kr}\right), \tag{46,140}$$

где

$$g_l(\rho) = (2\pi)^{3/2}\, i^l \frac{J_{l+1/2}(\rho)}{\sqrt{\rho}}, \tag{46,141}$$

и где $J_{l+1/2}$ является функцией Бесселя полуцелого порядка, а P_l — полином Лежандра, который зависит от косинуса угла между векторами $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{r}$.

Воспользуемся далее известным разложением:

$$P_l\left(\frac{\boldsymbol{kr}}{kr}\right) = \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l} \overline{Y}_l^{+m}\left(\frac{\boldsymbol{k}}{k}\right)\overline{Y}_l^m\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right), \tag{46,142}$$

где шаровые функции $\overline{Y}_l^m$ нормированы на единицу [см. (46,70а)].

Тогда разложение (46,140) может быть преобразовано к виду

$$e^{i\boldsymbol{kr}} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} g_l(kr)\overline{Y}^{+m}\left(\frac{\boldsymbol{k}}{k}\right)\overline{Y}_l^m\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right). \tag{46,143}$$

Здесь величины l и m будут характеризовать соответственно величину орбитального момента и его проекцию на ось z.

---

[1]) E. Salpeter, Phys. Rev. 89, 92 (1953).

Выражение (46,143) можно рассматривать как пространственную часть решения скалярного уравнения, характеризующего движение бесспиновых свободных частиц.

Попробуем установить аналогичную связь между решениями свободного уравнения Дирака, представленными в виде суммы плоских и сферических волн. Свободное движение мы можем рассматривать, как частный случай движения под действием центральных сил. С этой целью воспользуемся формулами (46,97) (решение первого типа, $j=l+1/2$) и (46,106) (решение второго типа, $j=l-1/2$).

В первом случае для определения радиальных функций $R=R_1$ и $R'=b_1R_1'$ мы согласно (46,74) и (46,75) будем иметь следующие уравнения:

$$(K+k_0)R'=-\left(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{l}{r}\right)R, \tag{46,144}$$

$$(K-k_0)R=\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{l+2}{r}\right)R'. \tag{46,145}$$

Отсюда легко показать, что R и R' будут связаны с функциями $g_l(kr)$ [см. (46,141)] при помощи соотношений

$$R=g_l(kr),$$
$$R'=\frac{1}{i}g_{l+1}(kr)\sqrt{\frac{K-k_0}{K+k_0}}.$$

Тогда первый тип решения может быть представлен в следующем виде:

$$\psi^{(1)}_{l,m}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{k})=\frac{1}{\sqrt{2}}A^{(1)}_{l,m}\begin{pmatrix}\sqrt{1+\frac{k_0}{K}}\,g_l(kr)\,\Omega^{(1)}_{l,m}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)\\ \sqrt{1-\frac{k_0}{K}}\,g_{l+1}(kr)\,\Omega^{(2)}_{l+1,m}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)\end{pmatrix}, \tag{46,146}$$

где $A^{(1)}_{l,m}$ — некоторая постоянная величина, которая будет определена нами в дальнейшем, а $\Omega^{(i)}_{l,m}$ представляет собою двухрядную матрицу с одним столбцом (шаровой спинор), связанную с шаровыми функциями при помощи соотношений (46,70).

Для дальнейших вычислений шаровые спиноры [см. (46,70б)] удобно представить в виде

$$\Omega^{(1)}_{l,m}=\begin{pmatrix}\sqrt{\frac{l+m}{2l+1}}\,Y_l^{m-1}\\ -\sqrt{\frac{l-m+1}{2l+1}}\,Y_l^m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Omega^{(1),\,m_s=1/2}_{l,m}\\ \Omega^{(1),\,m_s=-1/2}_{l,m}\end{pmatrix}, \tag{46,147}$$

$$\Omega^{(2)}_{l,m}=\begin{pmatrix}\sqrt{\frac{l-m+1}{2l+1}}\,Y_l^{m-1}\\ \sqrt{\frac{l+m}{2l+1}}\,Y_l^m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Omega^{(2),\,m_s=1/2}_{l,m}\\ \Omega^{(2),\,m_s=-1/2}_{l,m}\end{pmatrix}. \tag{46,148}$$

Аналогичным путем для решения второго типа найдем:

$$\psi^{(2)}_{l,m}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} A^{(2)}_{l,m} \begin{pmatrix} \sqrt{1+\frac{k_0}{K}}\, g_l(kr)\, \Omega^{(2)}_{l,m}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) \\ \sqrt{1-\frac{k_0}{K}}\, g_{l-1}(kr)\, \Omega^{(1)}_{l-1,m}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) \end{pmatrix}. \quad (46,149)$$

общее решение может быть представлено в виде

$$\psi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{k}) = \sum_{l,m} \left(\psi^{(1)}_{l,m}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{k}) + \psi^{(2)}_{l,m}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{k})\right). \quad (46,150)$$

Для определения коэффициентов $A_{l,m}$ мы сопоставим решение уравнения Дирака в сферических координатах (46,150) с соответствующим решением в декартовых координатах. Прежде всего заметим, что в решениях (20,17) и (20,13) амплитуды $C(\boldsymbol{k}, s, \varepsilon)$ характеризуют проекцию спина на волновой вектор $\boldsymbol{k}$, направление которого в сферических координатах становится неопределенным. Для устранения этой неопределенности выберем амплитуды плоских волн таким образом, чтобы они характеризовали проекцию спина на фиксированную ось z.

Ограничиваясь состояниями с положительной энергией, соответствующие амплитуды обозначим следующим образом:

$$C\left(\pm\frac{1}{2}\right) = \underset{\substack{m_s=\pm 1/2 \\ \varepsilon=1}}{C}(\boldsymbol{k}, m_s, \varepsilon).$$

Нетрудно проверить, что для матрицы

$$b\left(\pm\frac{1}{2}\right) = \underset{\substack{m_s=\pm 1/2 \\ \varepsilon=1}}{b}(\boldsymbol{k}, m_s, \varepsilon)$$

мы будем в этом случае иметь вместо (20,13) следующие выражения [1]):

$$b\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{1+\frac{k_0}{K}} \\ 0 \\ \sqrt{1-\frac{k_0}{K}}\cos\theta \\ \sqrt{1-\frac{k_0}{K}}\sin\theta\, e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \quad (46,151a)$$

1) Д. Д. Иваненко и А. А. Соколов, Sow. Phys. 11, 590 (1937).

$$b\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{1+\frac{k_0}{K}} \\ \sqrt{1-\frac{k_0}{K}}\sin\theta e^{-i\varphi} \\ -\sqrt{1-\frac{k_0}{K}}\cos\theta \end{pmatrix}. \qquad (46,151б)$$

В самом деле, подставляя выражение

$$\psi=\frac{1}{L^{3/2}}\sum_{k,\, m_s=\pm 1/2} C(m_s)\, b(m_s)\, e^{-icKt+ikr}=\frac{1}{L^{3/2}}\sum_k \psi(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{k})\, e^{-icKt} \qquad (46,152)$$

в систему уравнений Дирака (17,18), мы легко убедимся, что оно будет им удовлетворять. Связь между амплитудами $C(s)$ и $C(m_s)$ может быть легко установлена с помощью приравнивания друг другу матриц [1])

$$\sum_{s=\pm 1} C(s)\, b(s)=\sum_{m_s=\pm 1/2} C(m_s)\, b(m_s).$$

При определении суммарной проекции спина на ось z будем иметь:

$$I_z=\int \psi^+\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\frac{\hbar}{2}\sigma_3\right)\psi\, d^3x=\sum_{m_s=\pm 1/2} \hbar m_s C^+(m_s)\, C(m_s),$$

Воспользовавшись разложением (46,143), мы можем решение (46,152) преобразовать к виду:

$$\psi(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{k})=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{l,\, m} g_l(kr)\, \overline{Y}_l^{+m}\left(\frac{\boldsymbol{k}}{k}\right)\overline{Y}_l^{m}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)\times$$

$$\times\begin{pmatrix} \sqrt{1+\frac{k_0}{K}}\, C\left(\frac{1}{2}\right) \\ \sqrt{1+\frac{k_0}{K}}\, C\left(-\frac{1}{2}\right) \\ \sqrt{1-\frac{k_0}{K}}\left(C\left(\frac{1}{2}\right)\cos\theta+C\left(-\frac{1}{2}\right)\sin\theta e^{-i\varphi}\right) \\ \sqrt{1-\frac{k_0}{K}}\left(C\left(\frac{1}{2}\right)\sin\theta e^{i\varphi}-C\left(-\frac{1}{2}\right)\cos\theta\right) \end{pmatrix}. \qquad (46,153)$$

---

[1]) Строго говоря, проекции спина как на ось $\boldsymbol{k}$, так и на ось z в единицах $\hbar$ могут иметь значение $\pm 1/2$. Однако, чтобы различить оба эти возможных случая, первую проекцию мы будем обозначать удвоеним значением ($s=\pm 2m_{sk}=\pm 1$), а вторую — без коэффициента 2 ($m_s=\pm 1/2$).

Приравнивая друг другу матричные элементы в (46,150) и (46,153), стоящие при одинаковых индексах l и m шаровой функции $\overline{Y}_l^m\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)$ (практически достаточно приравнять первые два матричных элемента), для определения коэффициентов $A_{l,m}$ получаем следующие уравнения:

$$\sqrt{\frac{l+m}{2l+1}}\,A_{l,m}^{(1)}+\sqrt{\frac{l-m-1}{2l+1}}\,A_{l,m}^{(2)}=C\left(\frac{1}{2}\right)\overline{Y}_l^{+m-1}\left(\frac{\boldsymbol{k}}{k}\right),$$

$$-\sqrt{\frac{l-m+1}{2l+1}}\,A_{l,m}^{(1)}+\sqrt{\frac{l+m}{2l+1}}\,A_{l,m}^{(2)}=C\left(-\frac{1}{2}\right)\overline{Y}_l^{+m}\left(\frac{\boldsymbol{k}}{k}\right),$$

из которых находим:

$$\left.\begin{aligned} A_{l,m}^{(1)}&=\Omega_{l,m}^{+(1)}\left(\frac{\boldsymbol{k}}{k}\right)\begin{pmatrix} C\left(\frac{1}{2}\right)\\ C\left(-\frac{1}{2}\right)\end{pmatrix},\\ A_{l,m}^{(2)}&=\Omega_{l,m}^{+(2)}\left(\frac{\boldsymbol{k}}{k}\right)\begin{pmatrix} C\left(\frac{1}{2}\right)\\ C\left(-\frac{1}{2}\right)\end{pmatrix}.\end{aligned}\right\} \qquad (46,154)$$

Используя (46,154), мы можем искомое решение (46,150) представить в окончательном виде:

$$\psi(\boldsymbol{r},\,\boldsymbol{k})=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{i=1,2}\sum_{m_j=-j}^{j}\Omega_{l,m}^{+(i)}\left(\frac{\boldsymbol{k}}{k}\right)\begin{pmatrix} C\left(\frac{1}{2}\right)\\ C\left(-\frac{1}{2}\right)\end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix}\sqrt{1+\frac{k_0}{K}}\,g_l(kr)\,\Omega_{l,m}^{(i)}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)\\ \sqrt{1-\frac{k_0}{K}}\,g_{l_i}(kr)\,\Omega_{l_i,m}^{(i)}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)\end{pmatrix}, \qquad (46,155)$$

где $l_1=l+1$, $l_2=l-1$, величина $\Omega^+\begin{pmatrix} C(^1/_2)\\ C(-^1/_2)\end{pmatrix}$ является числом а $m_j=m-{}^1/_2$.

о) Рассеяние дираковских частиц короткодействующим силовым центром с учетом затухания[1]**.** Шаровые спиноры позволяют обобщить результаты упругого рассеяния бесспиновых частиц силовым центром (см. § 31) на случай рассеяния дираковских частиц.

В этом случае удобно разбить (на что было указано в предыдущем пункте) решение свободного уравнения Дирака, представленное в виде плоских волн, не по знаку проекции спина на

---

[1]) А. А. Соколов, И. И. Гусейнов и Б. К. Керимов, ЖЭТФ 34, 110 (1958); см. также Nucl. Phys. 5, 390 (1958).

направление движения [см. (20,13)], а по знаку проекции спина на ось z [см. (46,151)].

Пренебрегая в уравнениях (31,7) и (31,8) для определения коэффициентов C и C' величинами β_1 и β_2 (как было доказано в § 31, они имеют порядок $1/L^3$, и их учет необходим лишь для доказательства условия нормировки $C^+C+\sum' C'^+C'=1$), будем иметь:

$$C'_{m_{s'}} = \frac{1}{c\hbar L^3}\frac{1-e^{ic\Gamma' t}}{\Gamma'}\sum_{l,\,i}\varepsilon_l^{(i)} H_{lk'k}^{(i)\,m_{s'}\,m_s}, \tag{46,156}$$

$$C_{m_s} = 1,$$

где значок $i=1,2$ характеризует наличие при заданном l двух типов решения, а именно, при $i=1$: $j=l+{}^1/_2$, при $i=2$: $j=l-{}^1/_2$, а $\hbar\boldsymbol{k}$, $\hbar\boldsymbol{k}'$ и $\hbar\boldsymbol{k}''$ представляют собой импульсы частиц, находящихся соответственно в начальном, конечном и промежуточном состояниях.

Основное интегральное уравнение теории затухания для определения $\varepsilon_l^{(i)}$ и $H_{lk'k}^{(i)\,m_{s'}\,m_s}$ [см. (31,14)] можно представить в этом случае в виде

$$\left(\varepsilon_l^{(i)}-1\right)H_{lk'k}^{(i)\,m_{s'}\,m_s} = \frac{kK}{8\pi^2 c\hbar i}\sum_{l',\,i',\,m_{s''}}\varepsilon_{l'}^{(i')}\oint d\Omega'' H_{lk'k''}^{(i)\,m_{s'}\,m_{s''}} H_{l'k''k}^{(i')\,m_{s''}\,m_s}, \tag{46,157}$$

где $i=1,2$.

Матричный элемент перехода $(\boldsymbol{k}''\to\boldsymbol{k}')$ равен произведению матричного элемента, характеризующего соответствующий переход бесспиновой частицы [см. (31,36)] на спиновую часть матричного элемента, т. е.

$$H_{k'k''}^{m_{s'}\,m_{s''}} = \sum_{l,\,i} H_{lk'k''}^{(i)\,m_{s'}\,m_{s''}} =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty}\frac{4\pi b_l}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l}\overline{Y}_l^{m}\left(\frac{\boldsymbol{k}'}{k'}\right)\overline{Y}_l^{+m}\left(\frac{\boldsymbol{k}''}{k''}\right) b'^{+}(m_{s'})\,b''(m_{s''}), \tag{46,158}$$

где b_l представляет собою амплитуду разложения внешнего потенциала [см. (31,37)], а спиновая часть матричного элемента, которая может быть получена с помощью формулы (46,151), равна:

$$b'^{+}(m_{s'})\,b''(m_{s''}) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1+\frac{k_0}{K}\right)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{k_0}{K}\right)\left(\cos\theta'\cos\theta'' + \right. \\ \qquad \left. +\sin\theta'\sin\theta'' e^{2im_{s'}(\varphi''-\varphi')}\right) \quad \text{при} \quad m_{s''}=m_{s'}, \\ m_{s'}\left(1-\frac{k_0}{K}\right)\left(\cos\theta'\sin\theta'' e^{-2im_{s'}\varphi''} - \right. \\ \qquad \left. -\sin\theta' e^{-2im_{s'}\varphi'}\cos\theta''\right) \quad \text{при} \quad m_{s''}=-m_{s'}. \end{cases}$$

Для того чтобы избавиться в матричном элементе от $\cos\theta'$ и $\sin\theta' e^{-i\varphi'}$, воспользуемся следующими рекуррентными соотношениями:

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta \overline{Y}_l^m &= \sqrt{\frac{(l+1-m)(l+1+m)}{(2l+1)(2l+3)}}\,\overline{Y}_{l+1}^m + \\ &\quad + \sqrt{\frac{(l+m)(l-m)}{(2l+1)(2l-1)}}\,\overline{Y}_{l-1}^m,\\ \sin\theta e^{i\varphi}\overline{Y}_l^m &= \sqrt{\frac{(l+2+m)(l+1+m)}{(2l+1)(2l+3)}}\,\overline{Y}_{l+1}^{m+1} - \\ &\quad - \sqrt{\frac{(l-m)(l-1-m)}{(2l+1)(2l-1)}}\,\overline{Y}_{l-1}^{m+1},\\ \sin\theta e^{-i\varphi}\overline{Y}_l^m &= -\sqrt{\frac{(l+1-m)(l+2-m)}{(2l+1)(2l+3)}}\,\overline{Y}_{l+1}^{m-1} + \\ &\quad + \sqrt{\frac{(l+m)(l-1+m)}{(2l+1)(2l-1)}}\,\overline{Y}_{l-1}^{m-1}.\end{aligned}\right\} \quad (46{,}159)$$

Тогда искомую компоненту матричного элемента мы можем преобразовать к виду

$$H_{lk'k''}^{(i)\,m_{s'}m_{s''}} = \frac{8\pi^2 c\hbar}{kK}\,\delta_l^{(i)} \sum_{m_j=-j}^{j} \Omega_{lm}^{(i)\,m_{s'}}\left(\frac{\boldsymbol{k}'}{k'}\right)\Omega_{lm}^{+(i)\,m_{s''}}\left(\frac{\boldsymbol{k}''}{k''}\right), \quad (46{,}160)$$

где $m_j = m - {}^1/_2$, $\Omega_{lm}^{(i)\,m_{s'}}$ — компоненты шарового спинора, определяемые из (46,147) и (46,148).

Для величин $\delta_l^{(i)}$ имеем:

$$\left.\begin{aligned}\delta_l^{(1)} &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{k_0}{K}\right)\delta_l + \frac{1}{2}\left(1-\frac{k_0}{K}\right)\delta_{l+1},\\ \delta_l^{(2)} &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{k_0}{K}\right)\delta_l + \frac{1}{2}\left(1-\frac{k_0}{K}\right)\delta_{l-1},\end{aligned}\right\} \quad (46{,}161)$$

причем δ_l определяет фазу рассеяния бесспиновой частицы, которая согласно (31,45) равна

$$\delta_l = \frac{kK}{2\pi c\hbar}\,\frac{b_l}{2l+1} = \frac{\pi K}{c\hbar}\int_0^\infty rV(r)\,J_{l+1/2}^2(kr)\,dr. \quad (46{,}162)$$

Выбирая для составляющих матричного элемента выражение (46,160), мы, с одной стороны, сможем удовлетворить (46,158), а с другой, сможем добиться необходимой в теории затухания ортогональности составляющих матричных элементов. В самом деле, с помощью (46,71) легко доказать, что

$$\sum_{m_{s''}}\oint d\Omega'' H_{lk'k''}^{(i)\,m_{s'}m_{s''}} H_{l'k''k}^{(i')\,m_{s''}m_s} = \frac{8\pi^2 c\hbar}{kK}\,\delta_l^{(i)}\delta_{ii'}\delta_{ll'} H_{lk'k}^{(i)\,m_{s'}m_s}.$$

Учитывая последнее соотношение, мы из (46,157), находим

$$\varepsilon_l^{(i)} = \frac{1}{1 + i\delta_l^{(i)}}. \tag{46,163}$$

Отсюда следует, что дифференциальное эффективное сечение равно

$$d\sigma_{m_{s'} m_s} = \frac{L^3 K}{ck} \sum_{k'} \frac{\partial}{\partial t} C'^{-}_{m_{s'}} C'_{m_{s'}} = |f_{m_{s'} m_s}(\theta', \varphi')|^2 d\Omega', \tag{46,164}$$

где амплитуда рассеяния f определяется соотношением

$$f_{m_{s'} m_s}(\theta', \varphi') = -\frac{K}{2\pi c\hbar} \sum_{l, i} \varepsilon_l^{(i)} H_{lk'k}^{(i)\, m_{s'} m_s}. \tag{46,165}$$

Не нарушая общности, мы можем начальный импульс k направить по оси z. Тогда, принимая во внимание, что

$$\overline{Y}^{+m}(\cos\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\, \delta_{m0} \quad \text{при} \quad \cos\theta \to 1,$$

приведем амплитуду рассеяния к следующему виду:

$$f_{m_{s'} m_s} = -\frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} \left(\dfrac{(l+1)\,\delta_l^{(1)}}{1 + i\delta_l^{(1)}} + \dfrac{l\delta_l^{(2)}}{1 + i\delta_l^{(2)}} \right) P_l(\cos\theta') \\ \qquad\qquad \text{при} \quad m_{s'} = m_s, \\ \left(\dfrac{\delta_l^{(1)}}{1 + i\delta_l^{(1)}} - \dfrac{\delta_l^{(2)}}{1 + i\delta_l^{(2)}} \right) 2m_{s'} P_l^1(\cos\theta')\, e^{-2im_{s'}\varphi'} \\ \qquad\qquad \text{при} \quad m_{s'} = -m_s. \end{array} \right. \tag{46,166}$$

Здесь следует учесть, что

$$\delta_l^{(i)} = -\operatorname{tg} \eta_l^{(i)},$$

и поэтому мы можем положить:

$$-\frac{\delta_l^{(i)}}{1 + i\delta_l^{(i)}} = \frac{1}{2i}\left(e^{2i\eta_l^{(i)}} - 1\right).$$

Для того чтобы получить эффективное сечение, мы должны, как обычно, взять сумму по конечным спиновым состояниям ($m_{s'}$) и усреднить по начальным. Тогда, интегрируя все выражение еще по телесному углу $d\Omega'$, найдем:

$$\sigma = \frac{1}{2} \sum_{m_{s'}, m_s} \oint d\Omega' \, |f_{m_{s'} m_s}|^2 = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{(l+1)\,\delta_l^{(1)\,2}}{1 + \delta_l^{(1)\,2}} + \frac{l\delta_l^{(2)\,2}}{1 + \delta_l^{(2)\,2}} \right] =$$

$$= \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} \left[(l+1) \sin^2 \eta_l^{(1)} + l \sin^2 \eta_l^{(2)} \right]. \tag{46,167}$$

В частности, при исследовании рассеяния дираковских частиц по теории возмущений, когда в знаменателе последнего выражения можно пренебречь $\delta_l^{(i)\,2}$ по сравнению с единицей, будем иметь:

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}\left[(2l+1)\,\delta^2 + \frac{k^2}{K^2}\left(l\delta_l\delta_{l-1} - \left(l+\frac{1}{2}\right)\delta_l^2\right)\right]. \quad (46,168)$$

Если рассеивающий потенциал является потенциалом Юкава [см. § 31, п. д)], то, подставляя для δ_l значение (31,48), мы после суммирования по l найдем:

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2}\gamma^2\left[\frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{2}\frac{k^2}{K^2}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}\right)\right],$$

где x определяется равенством (31,49).

В случае же, когда рассеивающий потенциал представляет собою δ-функцию ($V = V_0\delta(\boldsymbol{r})$), согласно (46,162) найдем:

$$\delta_l = \frac{kKV_0}{2\pi c\hbar}\delta_{l0}.$$

Из последнего равенства с учетом (46,161) следует, что отличными от нуля будут следующие фазы:

$$\delta_0^{(1)} = \frac{kV_0}{4\pi c\hbar}(K+k_0) = \delta^{(1)}, \qquad \delta_1^{(2)} = \frac{kV_0}{4\pi c\hbar}(K-k_0) = \delta^{(2)}.$$

Отсюда для эффективного сечения рассеяния частиц δ-потенциалом получим выражение

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2}\left(\frac{\delta^{(1)\,2}}{1+\delta^{(1)\,2}} + \frac{\delta^{(2)\,2}}{1+\delta^{(2)\,2}}\right), \quad (46,169)$$

точно совпадающее с выражением (31,29), найденным нами при решении соответствующей задачи в переменных $C(s)$.

§ 47. Эффект Зеемана

В 1896 г. Зееман обнаружил, что при помещении источника света в сильное магнитное поле спектральные линии испытывают расщепление на несколько компонент.

С тех пор эффект Зеемана играет особую роль при исследовании строения атома. Параллельно экспериментальному обнаружению все новых деталей зеемановского расщепления развивались теории движения электрона в атоме: начиная с классической теории Лоренца до релятивистской теории Дирака, с последующим включением вакуумных членов. Поэтому на развитии теории эффекта Зеемана мы остановимся несколько подробнее.

а) Классическая теория Лоренца. Согласно электронной теории Лоренца атом излучает свет благодаря колебаниям электрона под действием упругой силы

$$\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{r},$$

причем коэффициент упругости k связан с массой m_0 электрона и частотой колебаний ν_0 соотношением

$$k = 4\pi^2 m_0 \nu_0^2.$$

Поэтому уравнение колебания электрона при наличии постоянного магнитного поля $\boldsymbol{H}$ принимает вид (ось z выбрана по направлению поля $\boldsymbol{H}$):

$$m_0\ddot{\boldsymbol{r}} + 4\pi^2 m_0 \nu_0^2 \boldsymbol{r} = -\frac{e}{c}[\dot{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{H}],$$

или, в развернутом виде:

$$\ddot{x} + 4\pi^2\nu_0^2 x + \frac{e}{m_0 c}\dot{y}H = 0,$$

$$\ddot{y} + 4\pi^2\nu_0^2 y - \frac{e}{m_0 c}\dot{x}H = 0,$$

$$\ddot{z} + 4\pi^2\nu_0^2 z = 0.$$

Умножим второе уравнение на мнимую единицу и сложив его с первым, получим:

$$\ddot{\xi} + 4\pi^2\nu_0^2\xi - 2i\omega\dot{\xi} = 0, \qquad (47,1)$$

где $\omega/2\pi = eH/4\pi m_0 c$ — ларморова частота колебаний, а $\xi = x + iy$.

Решение уравнений (47,1) при $\omega/2\pi \ll \nu_0$ имеет вид

$$\xi = e^{i\omega t}(Ae^{2\pi i\nu_0 t} + Be^{-2\pi i\nu_0 t}). \qquad (47,2)$$

К этому решению мы должны добавить решение для координаты z:

$$z = Ce^{\pm 2\pi i\nu t}. \qquad (47,3)$$

Из последних выражений мы видим, что атом, помещенный в магнитное поле, должен излучать три частоты:

$$\nu_0 - \frac{\omega}{2\pi}, \qquad \nu_0, \qquad \nu_0 + \frac{\omega}{2\pi}.$$

Как известно из классической теории, осциллятор не излучает в направлении своего колебания. Поэтому, наблюдая свет, излученный атомом по направлению оси z (т. е. по направлению силовых линий магнитного поля), мы должны увидеть две линии (несмещенная компонента ν_0 будет отсутствовать). По остальным направлениям должны излучаться все три компоненты.

Следует заметить, что рассмотренное расщепление на три линии (нормальный эффект Зеемана) имеет место сравнительно редко. В большинстве случаев картина расщепления несколько сложнее:

число компонент оказывается больше трех, а величина смещения становится не равной, а пропорциональной o (аномальный, или сложный, эффект Зеемана).

Удовлетворительную теорию, которая позволила бы установить условия появления как нормального, так и аномального эффектов Зеемана, удалось построить только с помощью квантовой теории, учитывающей спин электрона.

б) Теория, основанная на нерелятивистской волновой механике. Покажем теперь, что из уравнения Шредингера сравнительно просто вытекает теория нормального эффекта Зеемана. Уравнение Шредингера, описывающее движение электрона заряда — e в атоме водорода, помещенном в магнитное поле, имеет вид

$$\left[\left(\nabla+\frac{ei}{c\hbar}\boldsymbol{A}\right)^2+\frac{2m_0}{\hbar^2}\left(\mathscr{E}+\frac{e^2}{r}\right)\right]\psi=0.$$

Принимая во внимание, что $\operatorname{div}\boldsymbol{A}=0$, а также отбрасывая величины, пропорциональные A^2, находим:

$$\left[\nabla^2+2\frac{ei}{c\hbar}(\boldsymbol{A}\nabla)+\frac{2m_0}{\hbar^2}\left(\mathscr{E}+\frac{e^2}{r}\right)\right]\psi=0. \qquad (47,4)$$

Для составляющих вектор-потенциала имеем (ось z направлена по $\boldsymbol{H}$)

$$A_x=-\frac{1}{2}yH, \qquad A_y=\frac{1}{2}xH, \qquad A_z=0. \qquad (47,5)$$

В самом деле, поскольку $\boldsymbol{H}=\operatorname{rot}\boldsymbol{A}$, то из (47,5) следует

$$H_x=H_y=0, \qquad H_z=H.$$

Отсюда с помощью равенства

$$(\boldsymbol{A}\nabla)=-\frac{1}{2}H\left(y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}H\frac{\partial}{\partial\varphi} \qquad (47,5а)$$

приводим уравнение Шредингера к виду

$$\left[\nabla^2-\frac{eH}{c\hbar i}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\frac{2m_0}{\hbar^2}\left(\mathscr{E}+\frac{e^2}{r}\right)\right]\psi=0. \qquad (47,6)$$

Как обычно, полагаем

$$\psi=R(r)F(\theta)e^{im\varphi}, \qquad (47,7)$$

где m является магнитным квантовым числом.

В таком случае мы имеем:

$$\left[\nabla^2+\frac{2m_0}{\hbar^2}\left(\mathscr{E}'+\frac{e^2}{r}\right)\right]\psi=0, \qquad (47,7а)$$

где

$$\mathscr{E}'=\mathscr{E}-\frac{eHh}{4\pi m_0c}m. \qquad (47,8)$$

Уравнение (47,7а) точно совпадает с уравнением (46,26). Поэтому выражения для $\mathcal{E}'$ должны совпадать с выражением (46,47). Отсюда находим:

$$\mathcal{E}_{nm} = \mathcal{E}'_n + \frac{eHh}{4\pi m_0 c} m = -\frac{Rh}{n^2} + \frac{eHh}{4\pi m_0 c} m.$$

Частоты спектральных линий, излучаемых в магнитном поле, будут равны

$$\nu = \nu_0 + \frac{eH}{4\pi m_0 c} \Delta m, \tag{47,9}$$

где частота $\nu_0 = (\mathcal{E}'_{n'} - \mathcal{E}'_n) h$ равна частоте, излучаемой атомом вне магнитного поля.

Принимая во внимание правила отбора для магнитного квантового числа m, согласно которым $\Delta m = 0, \pm 1$, находим, что в магнитном поле каждая спектральная линия расщепляется на три линии.

Таким образом, из теории Шредингера следует лишь известный в классической теории нормальный эффект Зеемана.

в) Учет спиновых эффектов. Полная теория эффекта Зеемана (как нормального, так и аномального) может быть построена на основе теории Дирака, учитывающей, с одной стороны, релятивистские поправки, а с другой — спин электрона. Это связано с тем обстоятельством, что аномальный эффект Зеемана обусловлен спиновыми свойствами атома, и поэтому вполне естественно, что ни классическая теория, ни волновая механика Шредингера не могли его удовлетворительно объяснить.

Теория Дирака позволяет, прежде всего, установить критерий появления того или другого зеемановского расщепления.

Для построения теории эффекта Зеемана будем пользоваться квадрированной формой уравнений Дирака. Согласно (17,31) имеем:

$$\left[\left(\nabla + \frac{ei}{c\hbar}\boldsymbol{A}\right)^2 + \frac{1}{c^2\hbar^2}\left(\left(E + \frac{e^2}{r}\right)^2 - m_0^2 c^4\right) + \frac{\alpha i}{r^3}(\boldsymbol{\alpha r}) - \frac{e}{c\hbar}(\boldsymbol{\sigma H})\right]\psi = 0, \tag{47,10}$$

где

$$E = \mathcal{E} + m_0 c^2.$$

Выбирая ось z по направлению постоянного магнитного поля $\boldsymbol{H}$, имеем:

$$\left\{\nabla^2 - \frac{2m_0}{\hbar^2}\left[\mathcal{E} + \frac{e^2}{r} - \frac{eh}{4\pi m_0 c}\sigma_3 H - \frac{eHh}{4\pi m_0 c}\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\alpha^2\hbar^2}{2m_0}\left(\frac{\mathcal{E}^2}{e^4} + \frac{2\mathcal{E}}{e^2 r} + \frac{1}{r^2}\right) + \frac{he^2 i}{4\pi m_0 c}\frac{(\boldsymbol{\alpha r})}{r^3}\right]\right\}\psi = 0. \tag{47,11}$$

Отсюда видно, что к оператору нерелятивистской теории атома водорода добавляются два дополнительных члена энергии. Первый член

$$U_1 = \frac{ehH}{4\pi m_0 c}\left(\sigma_3 + \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \tag{47,12}$$

приводит к зеемановскому расщеплению

$$\Delta\mathscr{E}_1 \simeq \int \psi^+ U_1 \psi\, d^3x.$$

Второй же член

$$U_2 = -\frac{a^2\hbar^2}{2m_0}\left(\frac{\mathscr{E}^2}{e^4} + \frac{2\mathscr{E}}{e^2 r} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{i\hbar e^2}{4\pi m_0 c}\frac{(\boldsymbol{\alpha r})}{r^3} \tag{47,13}$$

дает естественное расщепление спектральных линий (тонкая структура)

$$\Delta\mathscr{E}_2 \simeq \int \psi^+ U_2 \psi\, d^3x.$$

При решении уравнения (47,11) будем различать следующие два случая: 1) случай сильного магнитного поля, когда зеемановское расщепление будет много больше естественного расщепления спектральных линий ($\Delta\mathscr{E}_1 \gg \Delta\mathscr{E}_2$), и 2) случай слабого магнитного поля ($\Delta\mathscr{E}_1 \ll \Delta\mathscr{E}_2$).

г) Нормальный эффект Зеемана. В случае сильного магнитного поля энергией U_2 мы можем вообще пренебречь. Тогда, принимая во внимание выражение (17,11) для матрицы σ_3:

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ -\psi_2 \\ \psi_3 \\ -\psi_4 \end{pmatrix}, \tag{47,14}$$

приведем уравнение (47,11) к системе четырех независимых уравнений, каждое из которых соответствует определенному направлению спина.

Поскольку в нерелятивистском приближении функции ψ_3 и ψ_4 исчезают, мы можем оставить для дальнейшего рассмотрения из системы уравнений (47,11) только два уравнения с волновыми функциями ψ_1 и ψ_2, которые с учетом соотношения

$$\psi \sim e^{im\varphi}$$

принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \left\{\nabla^2 + \frac{2m_0}{\hbar^2}\left[\mathscr{E} + \frac{e^2}{r} - \frac{eH\hbar}{4\pi m_0 c}(m+1)\right]\right\}\psi_1 = 0, \\ \left\{\nabla^2 + \frac{2m_0}{\hbar^2}\left[\mathscr{E} + \frac{e^2}{r} - \frac{eH\hbar}{4\pi m_0 c}(m-1)\right]\right\}\psi_2 = 0. \end{aligned} \right\} \tag{47,15}$$

Отсюда согласно (47,8) находим для дополнительной энергии атома, помещенного в магнитное поле, значение

$$\Delta\mathscr{E}_1 = \frac{eH\hbar}{4\pi m_0 c}(m + 2m_s);$$

волновая функция ψ_1 соответствует квантовому состоянию со спином электрона, параллельным полю ($m_s = {}^1/_2$), а волновая функция ψ_2 — со спином, антипараллельным полю ($m_s = -{}^1/_2$).

Для зеемановского расщепления же находим:

$$\Delta\nu = -\frac{eH}{4\pi m_0 c}\Delta m, \tag{47,16}$$

где $\Delta m = 0$ для компонент, поляризованных по направлению магнитного поля, и $\Delta m = \pm 1$ для компонент, поляризованных перпендикулярно магнитному полю. Здесь мы приняли во внимание, что изменение спинового квантового числа m_s равно нулю ($\Delta m_s = 0$). В самом деле, согласно (47,15) состояние $m_s = 1/2$ (функция ψ_1) и состояние $m_s = -1/2$ (функция ψ_2) описываются в нашем приближении двумя независимыми уравнениями, и поэтому переход из состояния $m_s = 1/2$ в состояние $m_s = -1/2$ запрещен.

Таким образом, в сильном магнитном поле, когда имеет место соотношение $\Delta\mathscr{E}_1 \gg \Delta\mathscr{E}_2$ как для начального, так и для конечного состояний, мы должны наблюдать нормальный эффект Зеемана. Этот факт находится в согласии с экспериментальными данными (эффект Пашена — Бака). Случаи, когда соотношение $\Delta\mathscr{E}_2 \gg \Delta\mathscr{E}_1$ имеет место лишь для одного энергетического уровня, а для другого $\Delta\mathscr{E}_2 \ll \Delta\mathscr{E}_1$, или когда зеемановское расщепление и тонкая структура имеют один и тот же порядок ($\Delta\mathscr{E}_2 \sim \Delta\mathscr{E}_1$), мы здесь рассматривать не будем[1]).

д) Аномальный эффект Зеемана. Рассмотрим случай, когда расщепление уровней энергии, соответствующее тонкой структуре, превышает зеемановское ($\Delta\mathscr{E}_2 \gg \Delta\mathscr{E}_1$) как для начального, так и для конечного состояний. Тогда мы должны сначала найти решение уравнения (47,11) при $H = 0$, а затем, включая магнитное поле $\boldsymbol{H}$, рассматривать дополнительную энергию U_1 как энергию возмущения.

Решение уравнения (47,11) при $H = 0$ было получено нами в § 46, п. е). В этом случае спиновые эффекты нельзя отделить от орбитальных, причем для $j = l + 1/2$ решение имеет вид (46,117) (первый тип решения), а при $j = l - 1/2$ решение представляется формулой (46,122) (второй тип решения).

Рассматривая энергию U_1 как энергию возмущения, находим для дополнительной энергии зеемановского расщепления следующее выражение:

$$\Delta\mathscr{E}_1 = \frac{e\hbar H}{4\pi m_0 c}\int \psi^+ \left(\sigma_3 + \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\psi\, d^3x. \tag{47,17}$$

Ограничиваясь в дальнейшем нерелятивистскими волновыми функциями ψ_1 и ψ_2 и принимая во внимание соотношения, которые легко получить из равенства (46,117) для $j = l + 1/2$ (первый тип решения):

$$\left.\begin{aligned} \int \psi_1^+ \psi_1\, d^3x &= \frac{l+m}{2l+1}, \\ \int \psi_2^+ \psi_2\, d^3x &= \frac{l-m+1}{2l+1} \end{aligned}\right\} \tag{47,18}$$

[1]) См. Г. Бете, Квантовая механика простейших систем, М.—Л., 1935, стр. 172.

и из равенства (46,122) для $j=l-{}^1/_2$ (второй тип решения):

$$\left.\begin{aligned}\int \psi_1^+ \psi_1 \, d^3x &= \frac{l-m+1}{2l+1}, \\ \int \psi_2^+ \psi_2 \, d^3x &= \frac{l+m}{2l+1},\end{aligned}\right\} \tag{47,19}$$

получим в случае $j=l+{}^1/_2$:

$$\int \psi^+ \left(\sigma_3 + \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\psi \, d^3x =$$
$$= \int (m\psi_1^+\psi_1 + (m-1)\psi_2^+\psi_2)\, d^3x = \left(m - \frac{1}{2}\right)\frac{2(l+1)}{2l+1}$$

и в случае $j=l-{}^1/_2$:

$$\int \psi^+ \left(\sigma_3 + \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\psi \, d^3x = \left(m - \frac{1}{2}\right)\frac{2l}{2l+1}.$$

Отсюда согласно (47,17) дополнительная энергия атома в магнитном поле будет равна

$$\Delta\mathcal{E}_1 = \frac{ehH}{4\pi m_0 c} g m_j, \tag{47,20}$$

где магнитное квантовое число m_j принимает $2j+1$ значений, определяемых формулой (46,111а), а множитель Ланде

$$g = \frac{j+{}^1/_2}{l+{}^1/_2}. \tag{47,21}$$

Дополнительная энергия (47,20) ведет не к обычному триплету (нормальный эффект Зеемана), а дает более сложную картину расщепления (аномальный эффект Зеемана).

Ввиду того, что m_j может принимать $2j+1$ различных значений, каждый уровень при аномальном эффекте Зеемана расщепляется на $2j+1$ отдельных уровней, т. е. внешнее магнитное поле полностью снимает вырождение, имеющее место даже в релятивистском атоме водорода.

Для получения картины расщепления необходимо учесть значения для множителя Ланде g [$g=2$ (для $S_{1/2}$-состояний), $g={}^2/_3$ (для $P_{1/2}$-состояний), $g={}^4/_3$ (для $P_{3/2}$-состояний) и т. д.] и правила отбора для магнитного квантового числа m_j. В частности, при $\Delta m_j=0$ мы получаем компоненты излучения, поляризованные параллельно оси z (т. е. параллельно магнитному полю), а при $\Delta m_j=\pm 1$ находим компоненты, поляризованные перпендикулярно магнитному полю.

Формула (47,20) приводит нас к следующему значению для частоты излучения:

$$\nu = \nu_0 + \Delta\nu = \nu_0 + \frac{eH}{4\pi m_0 c}(g^0 m_j^0 - g m_j), \tag{47,22}$$

где ν_0 — частота излучения в отсутствие магнитного поля ($H=0$), g^0 и g — множители Ланде начального и конечного состояний; магнитное квантовое число m_j конечного состояния может принимать три значения:

$$m_j = m_j^0, \quad m_j^0 \pm 1.$$

Заметим, что в сильном магнитном поле, когда имеет место эффект Пашена — Бака [согласно (47,16)], мы также можем пользоваться формулой (47,22), положив в последней $g^0 = g = 1$.

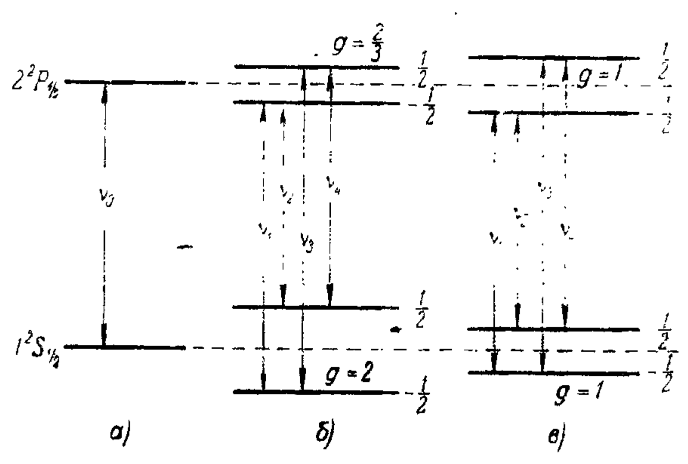


Рис. 25. Эффект Зеемана:

а) расположение уровней без поля, *б*) аномальный эффект Зеемана, *в*) нормальный эффект Зеемана.

На рис. 25 изображено расщепление спектральных уровней $1^2S_{1/2}$ и $2^2P_{1/2}$ в слабом и сильном магнитных полях, причем за единицу расщепления взята ларморова частота

$$\frac{o}{2\pi} = \frac{eH}{4\pi m_0 c}.$$

Как видно из рис. 25, в обоих случаях мы будем иметь по четыре смещенных линии. Величина смещения определяется формулой (47,22).

В случае слабого поля (аномальный эффект Зеемана; $g^0 = 2/3$, $g = 2$) мы находим:

$$\Delta\nu_1 = \nu_1 - \nu_0 = \frac{2}{3}\frac{o}{2\pi}, \quad \Delta\nu_2 = -\frac{4}{3}\frac{o}{2\pi}, \quad \Delta\nu_3 = \frac{4}{3}\frac{o}{2\pi}, \quad \Delta\nu_4 = -\frac{2}{3}\frac{o}{2\pi}.$$

В случае сильного поля, когда имеет место эффект Пашена — Бака ($g^0 = g = 1$), некоторые линии оказываются совпадающими друг с другом:

$$\Delta\nu_1 = \Delta\nu_4 = 0, \quad \Delta\nu_2 = -\frac{o}{2\pi}, \quad \Delta\nu_3 = \frac{o}{2\pi},$$

и поэтому мы должны наблюдать нормальный зеемановский триплет.

Формула (47,21) для множителя Ланде годится для атома водорода, а также для атомов, обладающих одним валентным электроном. В общем случае множитель Ланде принимает значение

$$g = 1 + \frac{J(J+1) - L(L+1) + S(S+1)}{2J(J+1)}, \tag{47,23}$$

где

$$J = |L \pm S|.$$

В частности, для элементов первой группы ($J = j$, $L = l$, $S = {}^1/_2$) формулы (47,23) и (47,21) тождественно совпадают друг с другом. Для S-состояний ($L = 0$, $J = S \neq 0$) множитель Ланде достигает максимального значения

$$g_s = 2. \tag{47,24}$$

Для атомов с двумя электронами на внешней оболочке (например, атомов гелия) наряду с триплетным состоянием $S = 1$ возможны также одиночные линии ($S = 0$, $J = L$). Для последних мы имеем $g = 1$ и поэтому должны наблюдать нормальный эффект Зеемана как в слабом, так и в сильном полях. Физически это связано с тем обстоятельством, что при отсутствии тонкой структуры эффект Пашена — Бака наступает при любых малых полях H.

Заметим, что теория эффекта Зеемана неоднократно подтверждалась опытом и сыграла большую роль в изучении строения внешней оболочки атома. За подробностями, связанными с эффектом Зеемана, отсылаем к монографиям, специально посвященным изучению атомных спектров [1]).

е) Дополнительный магнитный момент электрона. Как было показано в § 44, вакуумные члены приводят к следующему выражению для энергии взаимодействия электрона с магнитным полем [см. соотношение (44,52)]:

$$U'^A = \frac{\alpha}{2\pi} \mu_0 \rho_3 (\sigma H), \tag{47,25}$$

где $\mu_0 = eh/4\pi m_0 c$ является магнетоном Бора. Эта энергия соответствует наличию наряду с кинематическим еще и вакуумного магнитного момента (44,53) электрона и дает при исследовании аномального эффекта Зеемана дополнительный [по сравнению с (47,17)] сдвиг энергетических уровней:

$$\Delta \mathcal{E}'' = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{ehH}{4\pi m_0 c} \int \psi^+ \rho_3 \sigma_3 \psi \, d^3 x. \tag{47,26}$$

Ограничиваясь нерелятивистским приближением, мы можем положить $\psi_3 = \psi_4 = 0$, а также $\rho_3 = 1$. Тогда, учитывая равенства (47,18) и (47,19), находим:

$$\Delta \mathcal{E}'' = \pm \frac{m_j}{l + {}^1/_2} \frac{\alpha}{2\pi} \frac{ehH}{4\pi m_0 c}. \tag{47,27}$$

---

1) В. Н. Кондратьев, Структура атомов и молекул, М. Л., 1946; Е. Кондон и Г. Шортли, Теория атомных спектров, М., 1949.

Поэтому с учетом вакуумных поправок множитель Ланде становится равным

$$g = \frac{j + {}^1/_2 \pm \alpha/2\pi}{l + {}^1/_2},$$

причем знак плюс соответствует случаю $j = l + {}^1/_2$, а знак минус — случаю $j = l - {}^1/_2$. В частности, для S-состояний мы находим для множителя Ланде максимальное значение

$$g = 2\left(1 + \frac{\alpha}{2\pi}\right), \qquad (47,28)$$

из которого следует, что общий магнитный момент электрона μ_e равен

$$\mu_e = -\mu_0\left(1 + \frac{\alpha}{2\pi}\right) = -\mu_0(1 + 0,001162). \qquad 47,29)$$

На экспериментальной проверке формул (47,28) и (47,29) мы остановимся в следующем параграфе.

§ 48. Влияние ядер на атомные спектры

До сих пор мы рассматривали атомные спектры в предположении, что атомное ядро остается неподвижным (т. е. как бы обладает бесконечной массой) и представляет собою точечный заряд. Однако при более детальном рассмотрении всей проблемы мы должны учесть также движение ядра, масса которого не равна бесконечности. Как известно, учет конечности массы M ядра эквивалентен замене массы электрона m_0 на приведенную массу

$$\frac{Mm_0}{m_0 + M} \cong m_0\left(1 - \frac{m_0}{M}\right). \qquad (48,1)$$

В этом случае постоянная Ридберга становится функцией массы ядра:

$$R_M = \frac{e^4 m_0}{4\pi\hbar^3}\left(1 - \frac{m_0}{M}\right). \qquad (48,2)$$

Поэтому постоянная Ридберга для атома водорода, атома дейтерия и атома ионизованного гелия обладает несколько различными значениями. Это используется в спектральном анализе для обнаружения присутствия дейтерия или ионизованных атомов гелия.

Точно так же учет конечности размеров ядер или размазанности зарядов протона, находящегося некоторую часть времени в диссоциированном состоянии $p \to n + \pi^+$, или учет сил поляризации между электроном и нейтроном, поскольку последний подобно протону может диссоциировать на протон и отрицательный мезон, ведут

к небольшим сдвигам уровней в атоме[1]), которые уже находятся на грани современных возможностей наблюдения[2]).

Однако в связи с экспериментальным определением величины магнитного момента электрона наибольший интерес для нас представляет исследование так называемой «сверхтонкой» структуры.

а) Теория сверхтонкой структуры спектра атома водорода. Как было показано в § 46, учет релятивистских и спиновых поправок при движении электрона приводит к тонкой структуре спектральных линий, т. е. к расщеплению спектральных термов. Это расщепление для $n=2$ имеет порядок 10^4 *мггц*. «Сверхтонкая» структура представляет собою расщепление спектральных линий на величину порядка 10^2 *мггц* и связана, согласно Паули, со спином и магнитным моментом ядра.

Найдем, ограничиваясь хотя бы упрощенными рассуждениями, влияние магнитного момента протона на сдвиг уровней в атоме водорода. Впервые количественная теория этого явления была дана Ферми[3]).

Магнитный момент ядра $\boldsymbol{\mu}'=\mu'\boldsymbol{\sigma}'$ создает магнитное поле

$$\boldsymbol{A}=\operatorname{rot}\frac{\mu'\boldsymbol{\sigma}'}{r},\qquad \boldsymbol{H}=\operatorname{rot}\boldsymbol{A},\tag{48,3}$$

где $\boldsymbol{\sigma}'$ — двухрядные матрицы Паули, характеризующие направление спина ядра. Благодаря магнитному полю ядра появляется дополнительная энергия связи электрона с ядром

$$U=-(\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{H})=\mu\mu'\left(\boldsymbol{\sigma}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\frac{\boldsymbol{\sigma}'}{r}\right),\tag{48,4}$$

где $\boldsymbol{\mu}=-\mu\boldsymbol{\sigma}$ — магнитный момент электрона. Достаточным приближением для нашей теории является рассмотрение нерелятивистского случая, когда в качестве спиновых матриц $\boldsymbol{\sigma}$ электрона мы можем выбрать также двухрядные матрицы Паули.

Дальнейшее вычисление проще всего произвести, если величину $1/r$ представить в виде разложения в интеграл Фурье:

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{2\pi^2}\int\frac{e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}}{k^2}d^3k.$$

Тогда для взаимодействия (48,4) мы находим:

$$U=\frac{8\pi}{3}\mu\mu'(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}')\,\delta(\boldsymbol{r})+\frac{\mu\mu'}{2\pi^2}\int\left[\frac{(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}')}{3}-(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{k}^0)(\boldsymbol{\sigma}'\boldsymbol{k}^0)\right]e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}d^3k.\tag{48,5}$$

---

[1]) Подробная литература по этому вопросу приведена в книге Е. Кондон и Г. Шортли, Теория атомных спектров, М., 1949, стр. 398; см., также Д. Д. Иваненко и А. Ф. Цандер, ЖЭТФ **18**, 434 (1948); Д. Д. Иваненко и В. И. Родичев, ДАН **70**, 80 (1950).

[2]) Так, например, О. Бор [A. Bohr, Phys. Rev. 73, 1109 (1948)] показал, что при построении теории «сверхтонкой» структуры атома дейтерия следует учитывать размазанность магнитного момента его ядра.

[3]) E. Fermi, Zs. f. Phys. **60**, 320 (1930).

При выводе последнего соотношения мы приняли во внимание, что

$$\frac{1}{8\pi^3}\int e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}\,d^3k = \delta(\boldsymbol{r}). \qquad (48,6)$$

В нерелятивистском случае мы можем волновую функцию представить в виде

$$\psi(s, s', \boldsymbol{r}) = b(s, s')\,\psi(\boldsymbol{r}), \qquad (48,7)$$

где $b(s, s')$ — функция, зависящая от взаимной ориентации спина электрона (s) и протона (s'), а $\psi(\boldsymbol{r})$ — волновая функция, характеризующая, как обычно, движение электрона.

В нашем приближении мы можем считать протон неподвижным. Тогда для дополнительной энергии находим:

$$\Delta E = \int \psi^+ U\psi\,d^3x = \frac{8\pi}{3}\mu\mu'\,|\psi(0)|^2\,b^+(s, s')(\boldsymbol{\sigma\sigma}')\,b(s, s') +$$
$$+\frac{\mu\mu'}{2\pi^2}\int b^+(s, s')\left[\frac{1}{3}(\boldsymbol{\sigma\sigma}') - (\boldsymbol{\sigma k}^0)(\boldsymbol{\sigma}'\boldsymbol{k}^0)\right] b(s, s')\,d^3k \,\times$$
$$\times \int |\psi(\boldsymbol{r})|^2\,e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}\,d^3x. \qquad (48,8)$$

Легко показать, что для S-состояний последний член правой части равенства обращается в нуль. В самом деле, в этом случае величина $|\psi(\boldsymbol{r})|^2$ не зависит от углов θ и φ, благодаря чему интеграл

$$I(\boldsymbol{k}) = \int |\psi(r)|^2\,e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}\,d^3x \qquad (48,9)$$

является функцией лишь абсолютного значения (k) вектора $\boldsymbol{k}$:

$$I(\boldsymbol{k}) = I(k),$$

откуда в силу тождества

$$\int f(k)(\boldsymbol{\sigma k}^0)(\boldsymbol{\sigma}'\boldsymbol{k}^0)\,d^3k = \frac{1}{3}\int f(k)(\boldsymbol{\sigma\sigma}')\,d^3k \qquad (48,10)$$

мы приходим к выводу, что второй член правой части равенства (48,8) обращается в нуль. Величина $|\psi(0)|^2$ для S-состояний может быть найдена по формуле (46,128а). Напротив, для состояний P, D и т. д. первый член правой части равенства (48,8) исчезает в силу соотношения $|\psi(0)|^2 = 0$. Зато второй член благодаря отсутствию сферической симметрии величины $|\psi(\boldsymbol{r})|^2$ будет отличен от нуля.

Остановимся более подробно на расщеплении S-уровней, для которых дополнительная энергия равна

$$\Delta E = \frac{8\pi}{3}\mu\mu'\,|\psi(0)|^2\,b^+(s, s')(\boldsymbol{\sigma\sigma}')\,b(s, s'). \qquad (48,11)$$

Для этого мы должны прежде всего связать функцию $b(s, s')$ со спиновыми функциями электрона $b(s)$ и протона $b'(s')$.

Под величинами s и s' мы будем понимать проекции спина (в единицах $\hbar$) на ось z. Величины s и s' могут принимать значения $\pm {}^1/_2$. Поэтому функции $b(s)$ и $b'(s')$ образуют двухрядные матрицы:

$$b(s)=\begin{Vmatrix} b\left(\frac{1}{2}\right) \\ b\left(-\frac{1}{2}\right) \end{Vmatrix}, \quad b'(s')=\begin{Vmatrix} b'\left(\frac{1}{2}\right) \\ b'\left(-\frac{1}{2}\right) \end{Vmatrix}, \tag{48,12}$$

причем на амплитуду $b(s)$ действует матрица σ:

$$\sigma_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2=\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{48,13}$$

а на $b'(s')$ — матрица σ'.

Закон действия матриц σ_n на амплитуды $b(s)$ может быть найден на основе правил умножения матриц:

$$\sigma_1 \begin{Vmatrix} b\left(\frac{1}{2}\right) \\ b\left(-\frac{1}{2}\right) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} b\left(-\frac{1}{2}\right) \\ b\left(\frac{1}{2}\right) \end{Vmatrix},$$

т. е.

$$\sigma_1 b\left(\frac{1}{2}\right)=b\left(-\frac{1}{2}\right), \quad \sigma_1 b\left(-\frac{1}{2}\right)=b\left(\frac{1}{2}\right) \tag{48,14}$$

и т. д.

Из амплитуд b и b', как известно, мы можем составить три симметричные комбинации (ортосостояние):

$$\left.\begin{aligned} b^s\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) &= b\left(\frac{1}{2}\right) b'\left(\frac{1}{2}\right), \\ b^s\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) &= b\left(-\frac{1}{2}\right) b'\left(-\frac{1}{2}\right), \\ b^s\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right) &= \\ = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[b\left(\frac{1}{2}\right) b'&\left(-\frac{1}{2}\right) + b\left(-\frac{1}{2}\right) b'\left(\frac{1}{2}\right)\Big], \end{aligned}\right\} \tag{48,15}$$

и одну антисимметричную (парасостояние):

$$b^a=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[b\left(\frac{1}{2}\right) b'\left(-\frac{1}{2}\right) - b\left(-\frac{1}{2}\right) b'\left(\frac{1}{2}\right)\right]. \tag{48,16}$$

Дальнейшие вычисления мы произведем в предположении, что произведение комплексно-сопряженных амплитуд одного и того же аргумента s равно единице:

$$b^+\left(\frac{1}{2}\right) b\left(\frac{1}{2}\right)=b^+\left(-\frac{1}{2}\right) b\left(-\frac{1}{2}\right)=1 \text{ и т. д.,} \tag{48,17}$$

а от различных аргументов — нулю:

$$b^{+}\left(\frac{1}{2}\right)b\left(-\frac{1}{2}\right)=0. \tag{48,18}$$

Это обусловлено тем обстоятельством, что пребывание электрона (или протона) в состоянии $s={}^1/_2$ не связано в нашем приближении какой-либо функциональной зависимостью с его пребыванием в состоянии $s=-{}^1/_2$.

Кроме того, нормировочные коэффициенты выбраны таким образом, чтобы квадрат модуля спиновых амплитуд обращался в единицу, т. е.

$$b^{+s}b^{s}=b^{+a}b^{a}=1. \tag{48,19}$$

Найдем физический смысл решений (48,15) и (48,16). С этой целью введем оператор проекции спина в (единицах $\hbar$) на ось z:

$$s_z=\frac{1}{2}(\sigma_3+\sigma_3') \tag{48,20}$$

и оператор квадрата спина:

$$s_x^2+s_y^2+s_z^2=\frac{1}{2}(3+(\sigma\sigma')). \tag{48,21}$$

С помощью формул (48,14) легко показать, что

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2}(\sigma_3+\sigma_3')\,b^s\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)&=1\cdot b^s\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right),\\ \frac{1}{2}(3+(\sigma\sigma'))\,b^s\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)=2b^s\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)&=\\ &=s(s+1)\,b^s\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right),\end{aligned}\right\} \tag{48,22}$$

т. е. первое решение соответствует случаю, когда общий спин частиц равен единице ($s=1$) и направлен по оси z.

Для остальных симметричных комбинаций мы находим:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2}(\sigma_3+\sigma_3')\,b^s\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)&=(-1)\,b^s\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right),\\ \frac{1}{2}(3+(\sigma\sigma'))\,b^s\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)&=2b^s\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right),\end{aligned}\right\} \tag{48,23}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2}(\sigma_3+\sigma_3')\,b^s\left(\pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{2}\right)&=0,\\ \frac{1}{2}(3+(\sigma\sigma'))\,b^s\left(\pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{2}\right)&=2b^s\left(\pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{2}\right),\end{aligned}\right\} \tag{48,24}$$

т. е. как вторая, так и третья комбинации соответствуют спину, равному единице ($s=1$), причем во втором случае спин обеих частиц направлен по оси $-z$, а в третьем — перпендикулярно к оси z.

Наконец, для антисимметричной комбинации (48,16) мы находим:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2}(\sigma_3+\sigma_3')\,b^a&=0,\\ \frac{1}{2}(3+(\sigma\sigma'))b^a&=0,\end{aligned}\right\}\qquad(48,25)$$

т. е. спины обеих частиц имеют противоположные направления, и поэтому общий спин системы равен нулю ($s=0$).

Исходя из последних формул, легко показать, что для симметричного решения ($s=1$)

$$(\sigma\sigma')\,b^s=b^s,\qquad(48,26)$$

а для антисимметричного решения ($s=0$)

$$(\sigma\sigma')\,b^a=-3b^a.\qquad(48,27)$$

Отсюда, принимая во внимание еще соотношение (48,19), находим для сдвига уровней энергии (48,11) значение

$$\Delta\mathscr{E}_{1,\,-3}=\frac{8\pi}{3}\mu\mu'\,|\psi(0)|^2\,(1,\ -3),$$

причем множитель 1 относится к случаю, когда спины протона и электрона параллельны друг другу ($s=1$), а множитель -3, когда они антипараллельны ($s=0$).

Таким образом, величина расщепления выражается формулой

$$\nu=\frac{\Delta\mathscr{E}_1-\Delta\mathscr{E}_{-3}}{h}=\frac{4}{3}\,\frac{\mu\mu'}{\hbar}\,|\psi(0)|^2\cdot 4,\qquad(48,28)$$

которая обобщается следующим образом на случай произвольного значения спина I ядра:

$$\nu_I=\frac{4}{3}\,\frac{\mu\mu'}{\hbar}\,|\psi(0)|^2\,\frac{2I+1}{I}.\qquad(48,28a)$$

В нашем случае $I={}^1/_2$, и поэтому множитель $(2I+1)/I$ равен 4. При $n=2$ расщепление S-терма составляет примерно 175 *мггц*.

б) Определение дополнительного магнитного момента электрона. С развитием резонансного метода исследования спектров (радиоспектроскопии) появились новые возможности исследования сверхтонкой структуры, в частности экспериментальной проверки формулы (48,28).

С одной стороны, Тауб и Куш [1]) методом определения отношений резонансных частот спинов [2]) электронов и протонов в сильном

---

[1]) См., например, статью Бете и Лонгмайра в сборнике «Сдвиг уровней атомных электронов», стр. 78.

[2]) Под резонансной частотой спина понимается такая частота, при которой $h\nu$ равно разности энергий частицы в магнитном поле для случаев, когда спин направлен по полю и против него.

магнитном поле с большой степенью точности измерили отношение магнитных моментов протона μ' и электрона μ:

$$\gamma = \frac{\mu'}{\mu} = (1{,}51927 \pm 0{,}00010) \cdot 10^{-8}, \qquad (48{,}29)$$

а, с другой стороны, Неф и Нельсон измерили расщепление S-терма. сверхтонкой структуры основного состояния атома водорода ($n = 1$) Соответствующая частота ν оказалась при этом равной

$$\nu = 1420{,}410 \pm 0{,}006 \text{ мггц}. \qquad (48{,}30)$$

Для основного состояния атома водорода ($n = 1$, $l = 1/2$) формула (28,28) принимает вид

$$\nu = \frac{16}{3}\gamma R\alpha^2 \frac{\mu^2}{\mu_0^2}, \qquad (48{,}31)$$

где вместо $|\psi(0)|^2$ мы подставили значение (46,128а), а $\mu_0 = e\hbar/2m_0c$ — магнетон Бора.

Если в выражении (48,31) магнитный момент электронов положим равным (по абсолютному значению) магнетону Бора ($\mu = \mu_0$), то для соответствующей частоты мы найдем следующее значение:

$$\nu = 1416{,}97 \pm 0{,}52, \qquad (48{,}32)$$

причем возможные ошибки в последнем расчете по теоретической формуле связаны с неточностью в определении постоянных α, m_0 и т. д.

Сопоставляя значение частот ν, найденных из опыта [формула (48,30)] и на основе теории [формула (48,32)], мы видим, что измеренная величина оказалась примерно на 0,24% больше вычисленной.

Учет релятивистских поправок или учет поправки на эффект приведенной массы не может дать увеличения частоты (48,32) до требуемого значения (48,30). Поэтому для объяснения аномалии расщепления сверхтонкой структуры остается предположить[1]), что магнитный момент электрона не равен магнетону Бора, как это следует из одноэлектронной теории Дирака, а несколько больше его:

$$\mu = -\mu_0(1 + \delta). \qquad (48{,}33)$$

Подставляя сюда вместо δ значение из выражения для дополнительного магнитного момента электрона, обусловленного вакуумными членами, мы найдем, что $\delta = \alpha/2\pi = 0{,}001162$. Это дает для ν значение, близко совпадающее с экспериментальным.

Одна из первых попыток учесть с точностью до членов порядка α^2 значение для магнитного момента привела к следующему значению для коэффициента δ [2]): $\delta = \alpha/2\pi - 2{,}973\alpha^2/\pi^2 = 0{,}001144$.

---

[1]) E. Breit, Phys. Rev. 72, 984 (1947).

[2]) R. Karplus and N. Kroll, Phys. Rev. 77, 536 (1950).

Однако более поздние расчеты показали, что коэффициент 2,973 должен быть заменен значением порядка единицы[1]). Это, по-видимому, не противоречит последним экспериментальным данным[2]).

§ 49. Столкновение двух релятивистских частиц

а) Постановка задачи. Одной из центральных проблем современной теории элементарных частиц является проблема взаимодействия двух и более релятивистских частиц.

Как известно, при решении простейшей задачи, связанной с движением двух частиц (электронов или позитронов), мы можем ограничиться кулоновским взаимодействием между ними:

$$U = \frac{e''e'}{R} \tag{49,1}$$

(для одноименно заряженных частиц $e''e' = e^2$, а для разноименных $e''e' = -e^2$).

Как было показано в § 25, закон Кулона может быть получен в результате исключения из системы волновых (вторично не квантованных) уравнений заряженных частиц продольной составляющей (псевдофотоны) вторично квантованного электромагнитного поля.

В следующем приближении, учитывая еще возможный виртуальный обмен квантами поперечного электромагнитного поля (т. е. фотонами) между заряженными частицами, мы получаем обобщенную брейтовскую поправку к взаимодействию двух дираковских электронов [см. (26,33)][3]):

$$U_{\text{Брейт}} = -e''e' \frac{(\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\alpha}'')\,R^2 + (\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{R})\,(\boldsymbol{\alpha}''\boldsymbol{R})}{2R^3}, \tag{49,2}$$

где $\boldsymbol{\alpha}'$ и $\boldsymbol{\alpha}''$ — матрицы скорости частиц, а $\boldsymbol{R}$ — радиус-вектор, соединяющий оба заряда.

---

[1]) A. Pettermann, Nucl. Phys. **3**, 689 (1957).

[2]) P. Franken and S. Liebes, Phys. Rev. **104**, 1197 (1956).

[3]) Точнее, под формулой Брейта понимают дополнительное к кулоновскому взаимодействие двух частиц с учетом релятивистских членов порядка $(v/c)^2$ [см. (26,32)].

Обобщенная же на дираковские частицы брейтовская поправка (49,2), которая будет получена нами ниже, наряду с известным выражением для формулы Брейта (26,32) будет содержать спиновое взаимодействие частиц, имеющее тот же порядок, что и релятивистские члены (более подробно см. § 50).

Формула Брейта не содержит постоянной Планка $\hbar$ и поэтому может быть получена и в классической теории, если учесть запаздывающее взаимодействие двух зарядов. В квантовой теории запаздывающее взаимодействие будет учтено автоматически, если мы предположим, что в начальный и конечный момент времени фотоны отсутствуют ($q_\mu^+ q_\mu' = 0$).

Вывод формулы Брейта связан с учетом эффекта второго порядка (одна частица испускает фотон, другая его поглощает). Можно найти следующий член взаимодействия, соответствующий испусканию одной частицей двух фотонов с последующим их поглощением второй частицей (эффект четвертого порядка) и т. д.

Однако закон взаимодействия (49,2) не носит релятивистски инвариантной формулировки, и им мы можем пользоваться при исследовании лишь сравнительно медленных движений (например, движения электронов в атомах гелия, лития и т. д.), когда можно ограничиться величинами порядка $(v/c)^2$. При движении быстрых электронов ($v \sim c$) разложение по величине $(v/c)^2$ теряет смысл. В этом случае необходимо пользоваться формулой Мёллера, которая также учитывает запаздывающее действие, но представляет собою инвариантное четырехмерное выражение, являющееся результатом разложения по степеням постоянной тонкой структуры $\alpha = e^2/c\hbar$.

В формуле Мёллера [1]) необменная энергия взаимодействия между двумя отрицательными зарядами отличается от необменной энергии взаимодействия положительного и отрицательного зарядов лишь знаком.

При исследовании взаимодействия двух электронов мы должны учесть еще и обменные силы, связанные с неразличимостью электронов. На первый взгляд может показаться, что обменный эффект между электроном и позитроном должен вообще отсутствовать. Однако, как показал Баба [2]), своеобразные обменные эффекты должны проявляться и в этом случае.

В самом деле, рассмотрим рассеяние электрона на позитроне. Допустим, что до рассеяния электрон занимал квантовое состояние a, а позитрон — квантовое состояние b. В результате же рассеяния электрон перешел в состояние a', а позитрон — в b'. Этот процесс может идти двояким способом. Первый способ — обычный: в результате рассеяния электрон из состояния a переходит в состояние a', а позитрон из состояния b переходит в состояние b'. Однако согласно дырочной теории возможен и другой способ перехода, а именно, аннигиляция электрона (a) и позитрона (b) с последующим образованием новой пары электрон-позитрон (a' и b').

б) Столкновение между двумя свободными электронами. Формула Мёллера. В дальнейшем мы, используя теорию электрон-позитронного вакуума, получим с точностью до членов порядка α не только выражение для обычной необменной энергии взаимодействия, но и формулы для обменной энергии, а также для аннигиляционной силы Баба (при взаимодействии электрон-позитрон).

Рассмотрим для примера упругое рассеяние двух электронов, которые до столкновения находились в состояниях a и b, а после

---

[1]) Формула Мёллера будет нами получена ниже в этом параграфе.

[2]) H. Bhabha, Proc. Roy. Soc. **A152**, 559 (1935).

столкновения перешли в состояния a' и b'. Выберем систему координат, в которой центр инерции системы покоится. Обозначая величины в системе центра инерции электрон—электрон со звездочкой, мы будем иметь

$$K_a^* = K_b^* = K^*, \quad \boldsymbol{k}_a^* = -\boldsymbol{k}_b^* = \boldsymbol{k}^*. \tag{49,3}$$

С помощью (43,12) и (43,28) для коэффициента, определяющего вероятность рассеяния, мы получим следующее выражение:

$$\overline{C}_{a'} = C_{a'} + \sum_{n_1, n_2} v_{a'n_1} v'_{n_1 n_2} C_{n_2} + \sum_{n_1, n_2, n_3} [v_{a'n_1}, v'_{n_2 n_3}]_- C_{n_2 n_3} C_{n_1}. \tag{49,4}$$

Мы здесь написали лишь члены нулевого и второго порядка, соответствующие отсутствию фотонов. Член $C_n^{(1)}$, определяемый формулой (43,15), мы опускаем, поскольку он описывает эффект появления реального фотона, который мы здесь не будем рассматривать.

В формуле (49,4) оставим только такие члены, которые наряду с переходом одного электрона из состояния a в состояние a' одновременно описывают переход другого электрона из состояния b в состояние b'. Они могут быть получены из третьего члена правой части (49,4), если величину $C_{n_2 n_3} C_{n_1}$ представить в виде

$$C_{n_2 n_3} C_{n_1} = \frac{1}{2} (C_{n_2}^+ C_{n_3} C_{n_1} - C_{n_3} C_{n_2}^+ C_{n_1}) =$$

$$= \frac{1}{2} (C_{b'}^+ C_b C_a + C_{b'}^+ C_a C_b - C_a C_{b'}^+ C_b - C_b C_{b'}^+ C_a). \tag{49,5}$$

Учитывая, что

$$C_a C_b = -C_b C_a,$$

для соответствующего коэффициента $\overline{C}_{a'}$ мы будем иметь [1]):

$$\overline{C}_{a'} = ([v_{a'a} v'_{b'b}]_- - [v_{a'b} v'_{b'a}]_-) C_{b'}^+ C_b C_a. \tag{49,6}$$

Аналогичным путем находим для сопряженного коэффициента [см. (43,44) и (43,45)]:

$$\overline{C}_{a'}^+ = ([v'_{bb'} v_{aa'}]_- - [v'_{ab'} v_{ba'}]_-) C_a^+ C_b^+ C_{b'}. \tag{49,7}$$

---

[1]) Величину $C_{a'}$ [см. (49,4)] мы можем вообще положить равной нулю так как в начальный момент времени электрон находился в состоянии a ($a \neq a'$), т. е. до рассеяния вероятность нахождения в состоянии a' равна нулю. Кроме того, мы опустили члены, определяющие взаимодействия реальных электронов с электрон-позитронным вакуумом. Эти вопросы были рассмотрены в § 43, п. г) и в § 44. На проблеме рассеяния реального электрона на реальном электроне они во втором приближении не скажутся. Для того чтобы учесть влияние вакуумных членов на проблему рассеяния, необходимо взять члены четвертого порядка.

Эффективное сечение рассеяния мы можем вычислить по формуле

$$\sigma = \frac{1}{N}\sum_{a'}{}' \frac{\partial}{\partial t}\bar{C}^+_{a'}\bar{C}_{a'} = \frac{K^*L^3}{2k^*c}\frac{\partial}{\partial t}\times$$

$$\times\left\{\sum_{a'}{}'\int_{-\infty}^{t}dt'\int_{-\infty}^{t'}dt''\left([w_{bb'}(t''),\ w_{aa'}(t')]_- -\right.\right.$$

$$\left. - [w_{ab'}(t'')\,w_{ba'}(t')]_-\right)\int_{-\infty}^{t}dt'\int_{-\infty}^{t'}dt''\left([w_{a'a}(t'),\ w_{b'b}(t'')]_- -\right.$$

$$\left.\left. - [w_{a'b}(t')\,w_{b'a}(t'')]_-\right)\right\}, \qquad (49,8)$$

где

$$N = \frac{|v^*_a| + |v^*_b|}{L^3} = \frac{2k^*c}{K^*L^3}$$

— число частиц (в нашем случае две), падающих в единицу времени на единицу поверхности, расположенную перпендикулярно к направлению их движения, а $|v^*_a|$, — $|v^*_b|$ — скорости движения частиц относительно центра инерции.

При получении (49,8) мы учли соотношения вторичного квантования:

$$C^+_aC_a = 1 - C_aC^+_a = 1,\ C^+_bC_b = 1 - C_bC^+_b = 1,\ C_{b'}C^+_{b'} = 1 - C^+_{b'}C_{b'} = 1 \qquad (49,9)$$

соответствующие наличию в начальный момент электронов в состояниях a и b, и отсутствию в начальный момент частиц в состояниях a' и b'.

Вычислим матричные элементы, входящие в выражение (49,8). В основу вычислений положим формулу (43,2), согласно которой [1]):

$$w_{aa'}(t') = \frac{ie}{\hbar}\int\psi^+_a(\mathbf{r}')\,\alpha_{\mu'}\Phi_{\mu'}(\mathbf{r}',\ t')\,\psi_{a'}(\mathbf{r}')\,e^{-ict'(K^*_{a'}-K^*_a)}\,d^3x'. \qquad (49,9а)$$

Принимая во внимание перестановочные соотношения (42,21), мы легко можем показать, что

$$I_{a'ab'b} = \int_{-\infty}^{t'}dt''\,[w_{a'a}(t')\,w_{b'b}(t'')]_- =$$

$$= -\frac{i}{\hbar}\int d^3x'd^3x''\psi^+_{a'}(\mathbf{r}')\,\psi^+_{b'}(\mathbf{r}'')\,U_{bb'}(\mathbf{r}'-\mathbf{r}'')\times$$

$$\times\psi_a(\mathbf{r}')\,\psi_b(\mathbf{r}'')\,e^{-ict'(K^*_a+K^*_b-K^*_{a'}-K^*_{b'})}, \qquad (49,10)$$

---

[1]) Ради простоты спиновые значки ρ у волновых функций ψ писать не будем.

где для энергии взаимодействия двух электронов $U_{bb'}$ автоматически находим формулу Мёллера[1]):

$$U_{\text{необм}}(\mathbf{r}'-\mathbf{r}'') = -\frac{e^2}{2\pi^2}\int d^3\varkappa \frac{e^{i\varkappa(\mathbf{r}'-\mathbf{r}'')}\alpha'_\mu \alpha''_\mu}{\varkappa^2-(K^*_{b'}-K^*_b)^2} = \\ = -\frac{4\pi e^2}{L^3}\sum_{\varkappa}\frac{e^{i\varkappa(\mathbf{r}'-\mathbf{r}'')}}{\varkappa^2-(K^*_{b'}-K^*_b)}\alpha'_\mu \alpha''_\mu, \quad (49,11)$$

причем матрицы Дирака α'_μ действуют на волновые функции, зависящие от $\mathbf{r}'$, а α''_μ — на волновые функции, зависящие от $\mathbf{r}''$.

Вычислим матричный элемент (49,10) для столкновения двух свободных электронов, когда начальное и конечное состояния мы можем описывать плоскими волнами:

$$\psi^+_{a',b'} = \frac{1}{L^{3/2}} b^+_{a',b'} e^{-ik^*_{a',b'}\mathbf{r}}, \quad \psi_{a,b} = \frac{1}{L^{3/2}} b_{a,b} e^{ik^*_{a,b}\mathbf{r}},$$

где коэффициенты $b_{a,b}$ характеризуют спиновое состояние [см., например, (20,7)]. Тогда (49,10) мы можем представить в виде

$$I_{a'ab'b} = \frac{4\pi i e^2}{\hbar L^9}\sum_{\varkappa}\frac{\int d^3x' e^{ir'(k^*_a-k^*_{a'}+\varkappa)}\int d^3x'' e^{ir''(k^*_b-k^*_{b'}-\varkappa)}}{\varkappa^2-(K^*_{b'}-K^*_b)^2}\times \\ \times b^+_{a'}\alpha_\mu b_a b^+_{b'}\alpha_\mu b_b e^{-ict'(K^*_a+K^*_b-K^*_{a'}-K^*_{b'})} \quad (49,12)$$

---

[1]) Обобщение формулы Брейта на дираковские частицы может быть получено как некоторое приближение формулы Мёллера, а именно, при сравнительно малых скоростях движения электронов. В этом случае

$$\frac{1}{\varkappa^2-(K^*_{b'}-K^*_b)^2} \cong \frac{1}{\varkappa^2}\left(1-\frac{(K^*_{a'}-K^*_a)(K^*_{b'}-K^*_b)}{\varkappa^2}\right).$$

Здесь мы учли, что наличие экспоненциального множителя в (49,10) должно автоматически привести к закону сохранения энергии:

$$K^*_{a'}-K^*_a = -(K^*_{b'}-K^*_b).$$

Далее, используя соотношение (43,51), мы можем энергию взаимодействия в (49,11) представить в виде

$$U_{bb'} = \frac{e^2}{2\pi^2}\int\frac{d^3\varkappa}{\varkappa^2}e^{i\varkappa\mathbf{R}}\left(1-(\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\alpha}'')+\frac{(\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\varkappa})(\boldsymbol{\alpha}''\boldsymbol{\varkappa})}{\varkappa^2}\right), \quad (49,11a)$$

где $\mathbf{R}=\mathbf{r}'-\mathbf{r}''$. Раскрывая последний интеграл [см. (26,28) — (26,32)], мы найдем, что последнее соотношение представляет собою сумму кулоновского и обобщенного на дираковские частицы брейтовского взаимодействий. Более точное исследование релятивистского движения двух связанных частиц можно произвести с помощью уравнения Бете — Сальпетера [Phys. Rev. **84**, 1232 (1951)].

Принимая во внимание, что

$$\int d^3x' e^{ir'(k_a^* - k_{a'}^* - \varkappa)} = L^3 \delta_{k_a^* - k_{a'}^*, \varkappa},$$

находим следующие значения для импульсов рассеянных частиц:

$$\boldsymbol{k}_{a'}^* = \boldsymbol{k}_a^* + \boldsymbol{\varkappa} = \boldsymbol{k}^* + \boldsymbol{\varkappa} = \boldsymbol{k}'^*,$$
$$\boldsymbol{k}_{b'}^* = \boldsymbol{k}_b^* - \boldsymbol{\varkappa} = -\boldsymbol{k}^* - \boldsymbol{\varkappa} = -\boldsymbol{k}'^*,$$

т. е., как и следовало ожидать, после рассеяния электроны будут иметь равные, но противоположно направленные импульсы. Отсюда следует

$$\boldsymbol{\varkappa} = \boldsymbol{k}'^* - \boldsymbol{k}^*, \quad K_{b'}^* = K_{a'}^* = K'^*.$$

Поэтому (49,12) принимает вид

$$I_{a'ab'b} = \frac{4\pi i e^2}{\hbar L^3} \frac{1}{2k^{*2}(1-\cos\theta^*) - (K'^* - K^*)^2} S_{a'ab'b} e^{-2ict'(K^* - K'^*)}, \quad (49,12a)$$

где функция, зависящая от спиновых состояний частиц, может быть представлена в виде

$$S_{a'ab'b} = b_{a'}^+ \alpha_\mu b_a b_{b'}^+ \alpha_\mu b_b, \quad \text{а} \quad \cos\theta^* = \frac{(\boldsymbol{k}^* \boldsymbol{k}'^*)}{k^{*2}}. \quad (49,13)$$

Чтобы найти выражение для другого матричного элемента в выражении (49,8), обязанного обменному взаимодействию[1]), мы должны в (49,12) и (49,13) состояния a и b поменять местами, т. е.

$$I_{a'bb'a} = \int_{-\infty}^{t'} dt'' [w_{a'b}(t'), w_{b'a}(t'')]_- = \frac{4\pi i e^2}{\hbar L^3} \frac{1}{2k^{*2}(1+\cos\theta^*) - (K^* - K'^*)^2} \times$$
$$\times S_{a'bb'a} e^{-2ict'(K^* - K'^*)}, \quad (49,14)$$

где

$$S_{a'bb'a} = b_{a'}^+ \alpha_\mu b_b b_{b'}^+ \alpha_\mu b_a. \quad (49,15)$$

Подставляя эти значения матричных элементов в (49,8) и принимая во внимание (43,22), мы найдем для эффективного сечения рассеяния электрона на электроне следующее выражение:

$$\sigma = \frac{2K^*}{k^* c} \frac{\pi^2 e^4}{\hbar^2 k^{*4}} \int \frac{d^3k'^*}{8\pi^3} \frac{2\pi}{c} \delta(2K^* - 2K'^*) F, \quad (49,16)$$

где

$$F = \left(\frac{S_{a'ab'b}^+}{1-\cos\theta^*} - \frac{S_{a'bb'a}^+}{1+\cos\theta^*} \right) \left(\frac{S_{a'ab'b}}{1-\cos\theta^*} - \frac{S_{a'bb'a}}{1+\cos\theta^*} \right). \quad (49,17)$$

---

[1]) Заметим, что формула Мёллера (49,11) остается в силе и для обменного взаимодействия. Разумеется, в этом случае в (49,11) вместо начальной энергии K_b частицы b необходимо подставить энергию K_a частицы a.

Отсюда для дифференциального эффективного сечения рассеяния после интегрирования (49,16) по k' и углу φ получим:

$$d\sigma = \frac{\pi\alpha^2 K^{*2}}{2k^{*4}} F \sin\theta^* d\theta^*. \qquad (49,18)$$

Вычислим прежде всего квадрат выражения (49,13):

$$S^+_{a'ab'b} S_{a'ab'b} = b^+_a \alpha_{\mu'} b_{a'} b^+_b \alpha_{\mu'} b_{b'} b^+_{a'} \alpha_\mu b_a b^+_{b'} \alpha_\mu b_b. \qquad (49,19)$$

Суммирование по значкам μ' и μ мы произведем следующим образом. Положим

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{\mu'} &= B'_{\rho'} \alpha_{\rho'}, \\ \alpha_\mu &= B_\rho \alpha_\rho \end{aligned}\right\} \qquad (49,20)$$

и раскроем матричные элементы независимо друг от друга. В конечном же результате положим:

$$B'_\rho B'_{\rho'} = B_\rho B_{\rho'} = \delta_{\rho\rho'}, \quad B_\rho B'_{\rho'} = 0. \qquad (49,21)$$

Выражение (49,19) есть произведение двух не зависящих от электронных квантованных амплитуд величин, одна из которых равна:

$$S^+_{a'a} S_{a'a} = b^+_a B'_{\rho'} \alpha_{\rho'} b_{a'} b^+_{a'} B_\rho \alpha_\rho b_a. \qquad (49,22)$$

При вычислении второго же матричного элемента мы должны a' и a заменить соответственно на b' и b.

Используя формулу (21,21) и учитывая, что в конечном состоянии (a') могут быть два электрона, найдем:

$$S^+_{a'a} S_{a'a} = \frac{1}{8K^{*2}} \operatorname{Sp} \left[B'_{\rho'} \alpha_{\rho'} \left(K^* + (\boldsymbol{\alpha k'^*}) + \rho_3 k_0\right) \times \right.$$
$$\left. \times B_\rho \alpha_\rho (K^* + (\boldsymbol{\alpha k^*}) + \rho_3 k_0)\right] = \frac{1}{2K^{*2}} \left\{- B_4 B'_4 \left(K^{*2} + \right.\right.$$
$$+ (\boldsymbol{k^* k'^*}) + k_0^2\big) + i' \left(B'_4 B_n + B_4 B'_n\right)\left(k'^*_n + k^*_n\right) K^* +$$
$$\left.\left. + B_n B'_{n'} \left[\left(k^{*2} - (\boldsymbol{k^* k'^*})\right) \delta_{nn'} + k^*_n k'^*_{n'} + k'^*_n k^*_{n'}\right]\right\}. \qquad (49,23)$$

Здесь мы приняли во внимание, что $\alpha_4 = i'$.

Для второго выражения $S^+_{b'b} S_{b'b}$ мы также можем воспользоваться формулой (49,23), если в ней заменить векторы $\boldsymbol{k}^*$ и $\boldsymbol{k}'^*$ на векторы противоположного направления, т. е. на $-\boldsymbol{k}^*$ и $-\boldsymbol{k}'^*$. Это эквивалентно замене в (49,23) величины i' на $-i'$. Тогда будем иметь:

$$S^2_{\text{необм}} = S^+_{a'ab'b} S_{a'ab'b} = S^+_{a'a} S_{a'a} S^+_{b'b} S_{b'b} =$$
$$= \frac{1}{K^{*4}} \left[(K^{*2} + k^{*2})^2 - 2K^{*2} k^{*2} (1 - x^*) + \frac{1}{2} k^{*4} (1 - x^*)^2\right], \qquad (49,24)$$

где $x^* = \cos\theta^*$. Этот член, по существу, определяет обычное (необменное) рассеяние.

Найдем дифференциальное эффективное сечение, соответствующее этому взаимодействию. Для этого перейдем к лабораторной системе координат, в которой один из электронов (пусть b) покоится. Скорость другого электрона в этом случае будет равна $v = c\beta$, а его энергия

$$E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = c\hbar k_0\gamma,$$

где

$$\gamma = \frac{E}{m_0c^2} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Тогда[1]):

$$K^* = \frac{k_0\sqrt{\gamma+1}}{\sqrt{2}}, \qquad k^* = \frac{k_0\sqrt{\gamma-1}}{\sqrt{2}}, \tag{49,25}$$

$$x^* = \cos\theta^* = \frac{2-(\gamma+3)\sin^2\theta}{2+(\gamma-1)\sin^2\theta}, \tag{49,25a}$$

где θ — угол рассеяния в лабораторной системе координат.

---

[1]) Выражения (49,25) и (49,25а) могут быть получены следующим образом. Вводя скорость движения центра инерции $v_c = \beta_c c$ относительно лабораторной системы, мы будем иметь для импульсов падающих частиц:

$$k_b^* = -\frac{\beta_c k_0}{\sqrt{1-\beta_c^2}}, \quad k_a^* = \frac{k-\beta_c K}{\sqrt{1-\beta_c^2}}, \quad k = \beta K = \beta k_0\gamma.$$

Из условия, что $k_b^* + k_a^* = 0$, найдем:

$$\beta_c = \frac{\beta\gamma}{1+\gamma} = \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}.$$

Отсюда мы легко можем получить формулу (49,25) для определения $k^* = -k_b^*$ и $K^* = k^*/\beta_c$.

Чтобы установить связь между углами рассеяния в системе центра инерции (θ^*) и в лабораторной системе (θ), мы должны воспользоваться соотношением между импульсами рассеянных частиц:

$$\left.\begin{aligned} k'\cos\theta &= \frac{k'^*\cos\theta^* + \beta_c K'^*}{\sqrt{1-\beta_c^2}}, \\ K' &= \frac{K'^* + k'^*\beta_c\cos\theta^*}{\sqrt{1-\beta_c^2}}, \quad k'\sin\theta = k'^*\sin\theta^*. \end{aligned}\right\} \tag{49,25б}$$

Отсюда находим:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{1-\beta_c^2}\sqrt{1-\cos^2\theta^*}}{\cos\theta^* + \beta_c\dfrac{K'^*}{k'^*}}.$$

Подставляя эти значения в (49,24), мы найдем следующее выражение для дифференциального эффективного сечения рассеяния электрон — электрон (см. (49,18)) с учетом лишь необменного взаимодействия:

$$d\sigma_{\text{необм}} = 4\pi r_0^2 \frac{1}{(\gamma-1)^2(\gamma+1)}\left[\frac{\gamma^2}{(1-x^*)^2} - \frac{(\gamma^2-1)}{2(1-x^*)} + \frac{1}{8}(\gamma-1)^2\right] \sin\theta^*\, d\theta^*. \tag{49,26}$$

Аналогично матричный элемент, характеризующий обменную часть рассеяния, равен:

$$S^2_{\text{обм}} = S^+_{a'bb'a} S_{a'bb'a}. \tag{49,27}$$

Если при рассеянии с учетом обычных необменных сил электроны из состояний a и b переходят соответственно в состояния a' и b', то обменный эффект будет сводиться к тому, что электроны из состояний a и b переходят соответственно в состояния b' и a', т. е. угол θ^* должен быть заменен на $\pi - \theta^*$.

Поэтому для вычисления $S^2_{\text{обм}}$ мы можем воспользоваться формулой (49,24), если в последней x^* заменить на $-x^*$:

$$S^2_{\text{обм}} = \frac{1}{K^{*4}}\left[(K^{*2} + k^{*2})^2 - 2K^{*2}k^{*2}(1 + x^*) + \frac{1}{2} k^{*4}(1+x^*)^2\right]. \tag{49,28}$$

Наконец, как видно из формулы (49,17), эффективное сечение будет содержать еще интерференционную часть, пропорциональную произведению необменных членов на обменные:

$$S^2_{\text{интерф}} = S^+_{a'ab'b} S_{a'bb'a} + S^+_{a'bb'a} S_{a'ab'b} = 2S^+_{a'ab'b} S_{a'bb'a}. \tag{49,29}$$

Здесь квадрат матричного элемента, соответствующего интерференционной части, равен:

$$S^2_{\text{интерф}} = 2S^+_{a'ab'b} S_{a'bb'a} = 2b^+_a B'_{\rho'}\alpha_{\rho'} b_{a'} b^+_{a'} B_\rho \alpha_\rho b_b b^+_b B'_{\rho'}\alpha_{\rho'} b_{b'} b^+_{b'} B_\rho \alpha_\rho b_a. \tag{49,30}$$

Далее, принимая во внимание, что в системе центра инерции

$$\frac{\beta_c K'^*}{k'^*} = \beta_c \frac{K^*}{k^*} = 1, \quad \sqrt{1-\beta_c^2} = \sqrt{\frac{2}{\gamma+1}},$$

будем иметь:

$$\sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}\frac{\theta^*}{2},$$

откуда с помощью формулы

$$\cos\theta^* = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\theta^*}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\theta^*}{2}}$$

легко докажем справедливость соотношения (49,25а).

Усредняя по начальным спиновым состояниям и беря сумму по конечным, мы можем выражение (49,30) преобразовать к виду

$$S^2_{\text{интерф}} = \frac{1}{32}\operatorname{Sp}\left[B'_{\rho'}\alpha_{\rho'}\frac{K^* + (\alpha k'^*) + \rho_3 k_0}{K^*}B_\rho\alpha_\rho \times \right.$$

$$\left. \times \frac{K^* - (\alpha k^*) + \rho_3 k_0}{K^*}B'_{\rho'}\alpha_{\rho'}\frac{K^* - (\alpha k'^*) + \rho_3 k_0}{K^*}B_\rho\alpha_\rho\frac{K^* + (\alpha k^*) + \rho_3 k_0}{K^*}\right]. \quad (49,31)$$

Вычисляя последний Spur с учетом (49,21), найдем:

$$S^2_{\text{интерф}} = \frac{(K^{*2} + k^{*2})(k_0^2 - 2k^{*2})}{K^{*4}}. \quad (49,32)$$

Таким образом, общее дифференциальное эффективное сечение для рассеяния электрона на электроне

$$d\sigma_M = \pi r_0^2 \frac{\gamma^2}{(\gamma-1)^2(\gamma+1)}\left\{\left[\frac{1}{\sin^2\frac{\theta^*}{2}} + \frac{1}{\cos^2\frac{\theta^*}{2}}\right]^2 + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{(\gamma-1)^2}{\gamma^2}\left(1 + \frac{1}{\sin^2\frac{\theta^*}{2}\cos^2\frac{\theta^*}{2}}\right) - \frac{3}{\sin^2\frac{\theta^*}{2}\cos^2\frac{\theta^*}{2}}\right]\right\}\sin\theta^*\,d\theta^*. \quad (49,33)$$

Последняя формула была получена Мёллером[1]).

Заметим, что первый член правой части (49,33), стоящий в квадратных скобках, соответствует рассеянию бесспиновых электронов $(d\sigma_{\text{М-С}})$ и может быть получен, если воспользоваться релятивистским уравнением Клейна — Гордона. Второй член в квадратных скобках обусловлен, таким образом, наличием спина.

Формула Мёллера выведена в борновском приближении и поэтому имеет место для достаточно больших скоростей, когда

$$\frac{e^2}{\hbar v} \ll 1. \quad (49,34)$$

В следующем приближении следовало бы также учесть потери энергии на излучение, поскольку при рассеянии электроны движутся с ускорением. Заметим, что если взаимодействующие частицы обладают, как в нашем случае, одинаковыми массами и зарядами, то дипольное излучение будет отсутствовать [см. также § 50, п. в)].

В случае малых скоростей Моттом[2]) была получена следующая формула для рассеяния двух электронов:

$$d\sigma = \frac{2\pi e^2}{m_0^2 v^4}\left\{\frac{1}{\cos^4\frac{\theta^*}{2}} + \frac{1}{\sin^4\frac{\theta^*}{2}} + \begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}\frac{\cos\left(\frac{2e^2}{\hbar v}\ln\operatorname{tg}\frac{\theta^*}{2}\right)}{\cos^2\frac{\theta^*}{2}\sin^2\frac{\theta^*}{2}}\right\}\sin\theta^*\,d\theta^*, \quad (49,35)$$

---

[1]) C. Möller, Ann. d. Phys. 14, 531 (1932).

[2]) N. Mott, Proc. Roy. Soc. A126, 259 (1930); см. также Н. Бор, Прохождение атомных частиц через вещество, стр. 16, ИЛ, 1950.

причем верхний (2) или нижний (—1) множитель мы должны брать в зависимости от того, рассматриваются ли частицы со спином 0 или $^1/_2$. Эта формула представляет собою нерелятивистское приближение ($\gamma \to 1$) выражения (49,33), но для не очень малых значений v, когда можно положить

$$\cos\left(\frac{2e^2}{\hbar v}\ln \operatorname{tg}\frac{\theta^*}{2}\right) = 1. \qquad (49,36)$$

в) Столкновение позитрона с электроном. Обменная сила Баба. При рассмотрении рассеяния позитронов на позитронах можно перейти к позитронным волновым функциям [см. (42,67)] и вести расчет, приписывая позитронам положительную энергию. Кроме того, мы можем оставить для описания позитронов волновые функции электронов и рассматривать позитрон как отсутствие электрона на уровне отрицательной энергии или воспользоваться развиваемой здесь симметричной теорией. Во всех случаях мы должны получить одинаковый результат, а именно формулу Мёллера.

При столкновении позитрона с атомом, мы можем опять-таки позитрон рассматривать как вакантное состояние с отрицательной энергией, в которое может перейти атомный электрон. Высвобождающаяся при этом энергия, превышающая $2m_0c^2$, может быть либо излучена (т. е. пара превращается в γ-кванты), либо передана второму электрону, который, получив большую кинетическую энергию, покинет атом. Этот процесс будет представлять собою по существу эффект Оже. Вероятность его сравнительно мала (в свинце эффект Оже дает примерно один на 10^4 позитронов). Более подробное рассмотрение этого вопроса можно найти в [1]).

Здесь мы хотим рассмотреть более подробно столкновение позитрона со свободным электроном. В этом случае позитрону мы можем приписать отрицательную энергию:

$$K_b^* = -|K_b^*| = -K_a^* = -K^*, \qquad (49,37)$$

$$K_{b'}^* = -|K_{b'}^*| = -K_{a'}^* = -K'^* \qquad (49,38)$$

и заменить в соответствующих уравнениях § 49, п. а) и б) основные функции на сопряженные и наоборот.

Поэтому в основу теории мы можем вновь положить формулу (49,6), поменяв местами начальное b и конечное b' состояния. Тогда эта формула примет вид:

$$\overline{C}_{a'} = \left(-\left[v_{a'a}v'_{bb'}\right]_- + \left[v_{a'b'}v'_{ba}\right]_-\right) C_{b'}C_b^+C_a. \qquad (49,38а)$$

---

[1]) H. Massey and R. Burhop, Proc. Roy. Soc. A167, 53 (1938).

Отсюда получаем для эффективного сечения [см. также (49,8)]:

$$\sigma = \frac{1}{N}\frac{\partial}{\partial t}\sum_{a'}{}' \overline{C}_{a'}^{+}\overline{C}_{a'} = \frac{K^* L^3}{2k^* c}\frac{\partial}{\partial t}\Biggl\{\sum_{a'}{}' \int_{-\infty}^{t} dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' \times$$

$$\times(-[w_{b'b}(t''),\ w_{aa'}(t')]_- + [w_{ab}(t''),\ w_{b'a'}(t')]_-)\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{t} dt' \int_{-\infty}^{t'} dt''(-[w_{a'a}(t'),\ w_{bb'}(t'')]_- + [w_{a'b'}(t')\, w_{ba}(t'')]_-)\Biggr\}, \quad (49,39)$$

где значение $w_{nn'}(t')$ определяется равенством (49,9а).

В данной задаче необменное взаимодействие будет определяться выражением [см. также (49,10)]

$$I_{a'abb'} = -\int_{-\infty}^{t'} dt''\,[w_{a'a}(t'),\ w_{bb'}(t'')]_- = -\frac{i}{\hbar}\int d^3x' d^3x'' \psi_{a'}^{+}(\mathbf{r}')\times$$

$$\times\psi_b^{+}(\mathbf{r}'')\,U_{\text{необм}}(\mathbf{r}'-\mathbf{r}'')\,\psi_a(\mathbf{r}')\,\psi_{b'}(\mathbf{r}'')\,e^{-ict'\left(K_a^*+K_{b'}^*-K_{a'}^*-K_b^*\right)}, \quad (49,40)$$

где

$$U_{\text{необм}}(\mathbf{r}'-\mathbf{r}'') = \frac{e^2}{2\pi^2}\int d^3\varkappa\,\frac{e^{i\varkappa(\mathbf{r}'-\mathbf{r}'')}\alpha'_\mu\alpha''_\mu}{\varkappa^2-\left(K_b^*-K_{b'}^*\right)^2}. \quad (49,41)$$

Выражение (49,41) отличается от выражения (49,11) только знаком. Это связано с тем, что, меняя местами в формуле (49,6) состояния b' и b, мы поменяли также местами амплитуды C_b^{+} и $C_{b'}$, благодаря чему изменился знак взаимодействия. Физически этот результат является совершенно тривиальным: между электроном и позитроном действуют силы притяжения, а между двумя электронами — силы отталкивания.

Принимая во внимание соотношения (49,37) и (49,38) и то, что в конечном результате должно иметь место $K^* = K'^*$, мы находим следующее выражение для необменного взаимодействия электрон — позитрон:

$$U_{\text{необм}} = \frac{e^2}{2\pi^2}\int d^3\varkappa\,\frac{e^{i\varkappa(\mathbf{r}'-\mathbf{r}'')}\alpha'_\mu\alpha''_\mu}{\varkappa^2}. \quad (49,42)$$

Вычислим теперь обменное взаимодействие между электроном и позитроном, на которое, как мы уже указывали, впервые обратил внимание Баба. Для этого запишем значение матричного элемента:

$$I_{a'b'ba} = \int_{-\infty}^{t'} dt''\,[w_{a'b'}(t'),\ w_{ba}(t'')]_- = \frac{i}{\hbar}\int d^3x'\,d^3x''\,\psi_{a'}^{+}(\mathbf{r}')\,\psi_b^{+}(\mathbf{r}'')\times$$

$$\times U_{\text{обм}}(\mathbf{r}'-\mathbf{r}'')\,\psi_{b'}(\mathbf{r}')\psi_a(\mathbf{r}'')\,e^{-ict'\left(K_a^*+K_{b'}^*-K_{a'}^*-K_b^*\right)}, \quad (49,43)$$

где

$$U_{\text{обм}}(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}'')=-\frac{e^2}{2\pi^2}\int d^3\varkappa\,\frac{e^{i\varkappa(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}'')}\alpha'_\mu\alpha''_\mu}{\varkappa^2-(K_b^*-K_a^*)^2}. \tag{49,44}$$

Здесь $K_a^*=-K^*$, $K_b^*=K^*$, и поэтому обменное взаимодействие между электроном и позитроном будет отличаться от соответствующей формулы для обменного взаимодействия электрона с электроном (напомним, что для последнего имеет место также формула Мёллера).

В данном случае в подынтегральном выражении для обменного взаимодействия появится другой знаменатель $((K_b^*-K_a^*)^2=4K^{*2})$:

$$U_{\text{обмен}}=-\frac{e^2}{2\pi^2}\int d^3\varkappa\,\frac{e^{i\varkappa(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}'')}\alpha'_\mu\alpha''_\mu}{\varkappa^2-4K^{*2}}, \tag{49,45}$$

где $\boldsymbol{\varkappa}=\boldsymbol{k}_a^*+\boldsymbol{k}_b^*$, а $\boldsymbol{k}_a^*$ и $\boldsymbol{k}_b^*$ — начальные импульсы электрона и позитрона.

Волновые функции электронов и позитронов мы можем в рассматриваемой задаче представить в виде[1]):

$$\left.\begin{aligned}\psi_a&=\frac{1}{L^{3/2}}b_a e^{i\boldsymbol{k}_a^*\boldsymbol{r}}, & \psi_{a'}^+&=\frac{1}{L^{3/2}}b_{a'}^+e^{-i\boldsymbol{k}_{a'}^*\boldsymbol{r}},\\ \psi_b^+&=\frac{1}{L^{3/2}}b_b^+e^{i\boldsymbol{k}_b^*\boldsymbol{r}}, & \psi_{b'}&=\frac{1}{L^{3/2}}b_{b'}e^{-i\boldsymbol{k}_{b'}^*\boldsymbol{r}},\end{aligned}\right\} \tag{49,46}$$

причем в системе центра инерции $\boldsymbol{k}_a^*=-\boldsymbol{k}_b^*=\boldsymbol{k}^*$, $\boldsymbol{k}_{a'}^*=-\boldsymbol{k}_{b'}^*=\boldsymbol{k}'^*$.

Подставляя эти значения волновых функций в (49,40), найдем [см. (49,12)]:

$$I_{a'abb'}=-\frac{4\pi e^2 l}{\hbar L^3}\,\frac{1}{2k^{*2}(1-\cos\theta^*)}\,S_{a'abb'}e^{-2ict'(K^*-K'^*)}, \tag{49,47}$$

где спиновая часть функции

$$S_{a'abb'}=b_{a'}^+\alpha_\mu b_a b_b^+\alpha_\mu b_{b'}. \tag{49,48}$$

Для обменной части взаимодействия позитрон — электрон будем иметь:

$$I_{a'b'ba}=\frac{4\pi e^2 l}{\hbar L^3}\,\frac{1}{4K^{*2}}\,S_{a'b'ba}e^{-2ict'(K^*-K'^*)}, \tag{49,49}$$

где

$$S_{a'b'ba}=b_{a'}^+\alpha_\mu b_{b'}b_b^+\alpha_\mu b_a. \tag{49,50}$$

Кроме того, мы учли, что в результате интегрирования по d^3x' и d^3x'' вектор $\boldsymbol{\varkappa}$ в формуле (49,45) становится равным $\boldsymbol{\varkappa}=\boldsymbol{k}_{a'}^*+\boldsymbol{k}_{b'}^*=\boldsymbol{k}_a^*+\boldsymbol{k}_b^*$, т. е. в системе центра инерции он обращается в нуль.

---

[1]) Заметим, что согласно (23,30) и (23,24) импульс электрона определяется волновым числом основной функции, а импульс позитрона — волновым числом комплексно-сопряженной функции.

Отсюда для дифференциального эффективного сечения рассеяния позитрона на электроне мы находим [см. также (49,18)]:

$$d\sigma = \frac{\pi a^2 K^{*2}}{2k^{*4}} F \sin\theta^* \, d\theta^*, \tag{49,51}$$

где

$$F = \left(\frac{S^+_{a'abb'}}{1-\cos\theta^*} + \frac{k^{*2} S^+_{a'b'ba}}{2K^{*2}}\right)\left(\frac{S_{a'abb'}}{1-\cos\theta^*} + \frac{k^{*2} S_{a'b'ba}}{2K^{*2}}\right). \tag{49,52}$$

Найдем квадрат матричного элемента, соответствующего необменному взаимодействию:

$$\begin{aligned} S^2_{\text{необм}} = S^+_{a'abb'} S_{a'abb'} = \frac{1}{64K^{*4}} \operatorname{Sp}\left[B'_{\rho'}\alpha_{\rho'}\left(K^* + (\boldsymbol{\alpha k'}^*) + \rho_3 k_0\right) \times\right. \\ \times B_\rho \alpha_\rho (K^* + (\boldsymbol{\alpha k}^*) + \rho_3 k_0)] \times \\ \times \operatorname{Sp}\left[B'_{\rho'}\alpha_{\rho'}\left(K^* - (\boldsymbol{\alpha k}^*) - \rho_3 k_0\right) B_\rho \alpha_\rho (K^* - (\boldsymbol{\alpha k'}^*) - \rho_3 k_0)\right] = \\ = \frac{1}{K^{*4}}\left[\left(K^{*2} + k^{*2}\right)^2 - 2K^{*2}k^{*2}(1 - x^*) + \frac{k^{*4}}{2}(1 - x^*)^2\right], \end{aligned} \tag{49,53}$$

т. е., как и следовало ожидать, необменная часть рассеяния электрон — позитрон точно совпадает с необменной частью рассеяния электрон — электрон [см. (49,24)].

Далее, находим квадрат матричного элемента, соответствующего обменному взаимодействию:

$$\begin{aligned} S^2_{\text{обм}} = S^+_{a'b'ba} S_{a'b'ba} = \frac{1}{64K^{*4}} \operatorname{Sp}\left[B'_{\rho'}\alpha_{\rho'}\left(K^* + (\boldsymbol{\alpha k'}^*) + \rho_3 k_0\right) \times\right. \\ + B_\rho \alpha_\rho \left(K^* - (\boldsymbol{\alpha k'}^*) - \rho_3 k_0\right)] \times \\ \times \operatorname{Sp}\left[B'_{\rho'}\alpha_{\rho'}(K^* - (\boldsymbol{\alpha k}^*) - \rho_3 k_0) B_\rho \alpha_\rho (K^* + (\boldsymbol{\alpha k}^*) + \rho_3 k_0)\right] = \\ = \frac{1}{K^{*4}}\left[2K^{*4} + k_0^4 - 2k^{*4}(1 - x^*) + k^{*4}(1 - x^*)^2\right]. \end{aligned} \tag{49,54}$$

Наконец, интерференционная часть квадрата матричного элемента равна

$$\begin{aligned} S^2_{\text{интерф}} = 2S^+_{a'abb'} S_{a'b'ba} = \frac{1}{32K^{*4}} \operatorname{Sp}\left[B'_{\rho'}\alpha_{\rho'}\left(K^* + (\boldsymbol{\alpha k'}^*) + \rho_3 k_0\right) \times\right. \\ \times B_\rho \alpha_\rho \left(K^* - (\boldsymbol{\alpha k'}^*) - \rho_3 k_0\right) \times \\ \times B'_{\rho'}\alpha_{\rho'}(K^* - (\boldsymbol{\alpha k}^*) - \rho_3 k_0) B_\rho \alpha_\rho (K^* + (\boldsymbol{\alpha k}^*) + \rho_3 k_0)]. \end{aligned} \tag{49,55}$$

Отсюда

$$S^2_{\text{интерф}} = -\frac{1}{K^{*4}}\left(4K^{*4} - k_0^4 + k^{*4}(1 - x^*)^2 - 4k^{*2}K^{*2}(1 - x^*)\right). \tag{49,56}$$

Подставляя (49,53), (49,54) и (49,56) в (49,51), мы найдем для дифференциального эффективного сечения, характеризующего рассеяние позитронов на электронах, формулу Баба[1]):

$$d\sigma_{\text{Б}} = 4\pi r_0^2 \frac{1}{(\gamma-1)^2(\gamma+1)} \left\{ \left[\frac{\gamma^2}{(1-x^*)^2} - \frac{\gamma^2-1}{2(1-x^*)} + \frac{1}{8}(\gamma-1)^2 \right] + \right.$$
$$+ \left[-\frac{(\gamma-1)((\gamma+1)^2-1)}{2(\gamma+1)(1-x^*)} + \frac{1}{8}(\gamma-1)^2\left(5+\frac{2}{(\gamma+1)^2}\right) - \frac{\gamma(\gamma-1)^3}{4(\gamma+1)^2} \times \right.$$
$$\left.\left. \times (1-x^*) + \frac{(\gamma-1)^4}{16(\gamma+1)^2}(1-x^*)^2 \right] \right\} \sin\theta^*\, d\theta^*. \qquad (49,57)$$

Первый член в квадратных скобках в правой части (49,58) соответствует рассеянию вследствие необменного взаимодействия, а второй член в квадратных скобках связан с обменными силами Баба, включающими также и интерференционную часть эффективного сечения. Эта вторая часть рассеяния связана с возможной виртуальной аннигиляцией электрона и позитрона, и поэтому ее называют аннигиляционной частью $\sigma_{\text{А}}$ эффективного сечения позитрон-электронного рассеяния.

Заметим, что аннигиляционная часть рассеяния в нерелятивистском приближении $\gamma \to 1$ исчезает. Кстати, следует указать, что при $\gamma \to 1$ полезно воспользоваться для преобразования множителя перед фигурными скобками в (49,58) соотношением

$$\gamma - 1 = \frac{\gamma^2\beta^2}{\gamma+1}, \qquad (49,58)$$

из которого видно, что при $v \to 0$ эффективное сечение стремится к бесконечности. В связи с этим напомним, что полученные формулы являются непригодными для малых скоростей $v \to 0$, поскольку они получены в борновском приближении, когда должно выполняться условие

$$\frac{e^2}{\hbar v} \ll 1.$$

г) Экспериментальная проверка формул Мёллера и Баба. Формула Мёллера проверялась неоднократно с помощью фотографирования треков β-частиц в камере Вильсона [см., например, [2])]. Особое внимание при этом было обращено на роль спиновых членов. Точно так же были поставлены прецизионные экспериментальные исследования[3]) с помощью камеры Вильсона по обнаружению аннигиляционных сил Баба при рассеянии позитронов на электронах.

Несмотря на то, что опыты с камерой Вильсона в той или иной степени подтвердили формулы Мёллера и Баба, точность исследований была не очень высокой, поскольку было трудно отобрать необходимое число треков при наиболее благоприятных энергиях и

---

1) H. Bhabha, Proc. Roy. Soc. A154, 195 (1936).
2) F. Champion, Proc. Roy. Soc. A137, 688 (1932).
3) Ho Zah-Wei, C. R. 226, 1083 (1948).

углах рассеяния, когда влияние спиновых членов (для рассеяния электрон — электрон) и аннигиляционных членов (при рассеянии электрон — позитрон) становилось наиболее заметным.

Количественное подтверждение формулы Мёллера и Баба получили сравнительно недавно, когда для измерения дифференциального эффективного сечения была использована группа счетчиков.

Наиболее убедительные результаты были получены Ашкином и др. [1]) [см. также [2, 3])] в 1954 г. при изучении рассеяния электронов и позитронов (возникающих от радиактивных источников) на электронах.

В этих исследованиях эффективное сечение определялось как функция энергии падающей частицы γ и величины

$$\varepsilon = \frac{E - E'}{E - m_0c^2}. \tag{49,59}$$

Последняя величина характеризует относительную потерю кинетической энергии падающей частицы в результате рассеяния в лабораторной системе и является однозначной функцией угла рассеяния в системе центра инерции (θ^*): в самом деле, с помощью формулы (49,25б) легко получить:

$$E - E' = c\hbar (K - K') = c\hbar \frac{k_0}{2} (\gamma - 1)(1 - \cos\theta^*);$$

учитывая, что

$$E - m_0c^2 = c\hbar (K - k_0) = c\hbar k_0 (\gamma - 1),$$

найдем:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(1 - \cos\theta^*) = \frac{1}{2}(1 - x^*), \tag{49,60}$$

а

$$d\varepsilon = \frac{1}{2} \sin\theta^* \, d\theta^*. \tag{40,61}$$

Поэтому, как в формуле Мёллера (49,33), так и в формуле Баба (49,57) мы вместо x^* и $\sin\theta^* \, d\theta^*$ можем подставить соответствующие значения ε и $d\varepsilon$.

При экспериментальных исследованиях (например, при рассеянии позитрона и электрона) выгодно подобрать такие значения для величин ε и γ, при которых различие в рассеянии без учета аннигиляционных членов ($\sigma_{Б-А}$) и с их учетом ($\sigma_Б$) было бы наибольшим.

Это имеет место при $\gamma = \infty$ и $\varepsilon = 1$ (угол рассеяния в системе центра инерции $\theta^* = 180°$). В этом случае согласно (49,57) будем иметь:

$$d\sigma_Б = 2 \frac{\pi r_0^2}{\gamma} d\varepsilon, \tag{49,62}$$

$$d\sigma_{Б-А} = \frac{\pi r_0^2}{\gamma} d\varepsilon, \tag{49,63}$$

---

1) A. Ashkin, L. Page and W. Woodward, Phys. Rev. 94, 357 (1954).
2) A. Ashkin and W. Woodward, Phys. Rev. 87, 236 (1952).
3) H. Howe and K. McKenzie, Phys. Rev. 90, 678 (1953).

т. е. отношение

$$\frac{d\sigma_{Б}}{d\sigma_{Б-А}}=2 \qquad (49,64)$$

достигает абсолютного максимума.

Однако получить позитроны с очень большими энергиями в лабораторной системе трудно, не говоря о том, что при $\gamma\to\infty$ оба эффективных сечения $d\sigma_{Б}$ и $d\sigma_{Б-А}$ стремятся к нулю. Другой сравнительно размытый максимум ($d\sigma_{Б}/d\sigma_{Б-А}\cong 1{,}4$) соответствует значениям $\varepsilon=0{,}5$ и $\gamma=2{,}4$. При этих же значениях ε и γ ($\theta^*=270°$, $E\cong 1{,}4$ *Мэв*) становятся наиболее заметными и спиновые эффекты

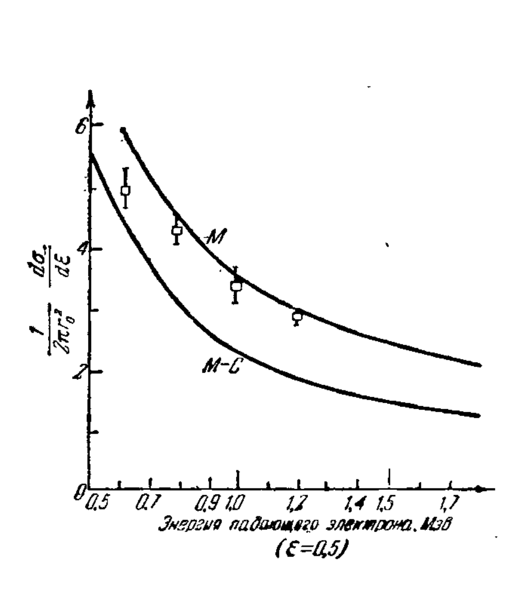


Рис. 26. Рассеяние электроиа на электроие.

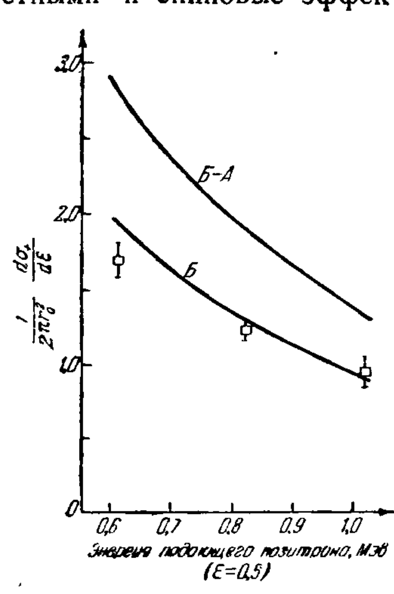


Рис. 27. Рассеяиие позитроиа на электроне.

в формуле Мёллера (49,33). При $\varepsilon=0{,}5$ и были поставлены указанные опыты Ашкина и др. С помощью счетчиков можно было отобрать частицы при заданном значении ε, когда в условиях эксперимента влияние спиновых и аннигиляционных членов будет наибольшим.

В этих работах были измерены дифференциальные сечения рассеяния электронов с энергиями 0,6—1,2 *Мэв* и позитронов с энергиями 0,6—1 *Мэв* на электронах. Монохроматические пучки электронов и позитронов выделялись с помощью магнитного спектрометра из непрерывных β-спектров источников Sr^{90} — Y^{90} и Co^{56}. Рассеянные в фольге электроны и позитроны регистрировались с помощью специальных тонкостных счетчиков Гейгера — Мюллера. Результаты изображены на рис. 26, 27, 28, на которых по оси ординат

отложена величина $d\sigma/2\pi r_0^2\,d\varepsilon$, пропорциональная эффективному сечению, а по оси абсцисс — энергия падающих позитронов или электронов в *Мэв*.

Графики M и M — C (см. рис. 26) представляют собою теоретические кривые, вычисленные по формуле Мёллера со спиновыми эффектами (M) и без них (M — C) [см. (49,33)]. Квадратиками изображены экспериментальные точки.

На рис. 27 показаны кривые, соответствующие формуле Баба (Б); (Б — А) вычислена по этой формуле без учета аннигиляционных членов [см. (49,57)]. Видно, что экспериментальные точки ложатся вблизи кривой Баба. Так же как и в предыдущем случае, наибольшее расхождение между теоретическими и экспериментальными кривыми наблюдается в области малых энергий, причем это отклонение идет не в сторону кривой (Б — А).

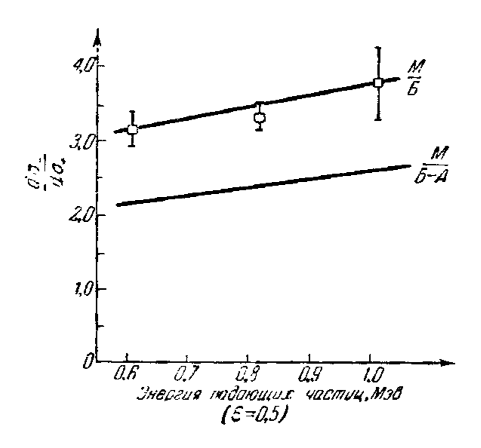


Рис. 28. Сравнение рассеяния электрона на электроне и позитрона на электроне.

Наконец, на рис. 28 теоретические кривые представляют собою отношение эффективных сечений Мёллера и Баба в общем случае (M)/(Б), и без аннигиляционных членов (M)/(Б — А). Экспериментальные точки целиком ложатся на первую кривую. Таким образом, существование аннигиляционных сил Баба между электроном и позитроном можно считать экспериментально доказанным. Кстати, заметим, что во многих экспериментах значительно проще определять отношение сечений для рассеяния электронов и позитронов на электронах (рис. 28), чем находить абсолютные значения эффективных сечений (рис. 26 и 27). Из приведенных графиков видно, что экспериментальные значения эффективных сечений для электрон-электронного и позитрон-электронного рассеяний хорошо согласуются с теоретическими значениями, вычисленными по формуле Мёллера с учетом спиновых эффектов и по формуле Баба с учетом аннигиляционных членов.

Как мы уже указывали (см. § 36), при изучении рассеяния быстрых электронов ($E \sim 500$ *Мэв*) на протонах было установлено отклонение от формулы Резерфорда. Эти эксперименты говорят либо о структуре протона, либо об отклонениях при больших энергиях (т. е. на малых расстояниях) от закона Кулона. Экспериментальное изучение рассеяния более быстрых электронов на электронах, возможно, также позволит получить данные о структуре электрона.

§ 50. Приближенная [включающая члены порядка $(v/c)^2$] релятивистская теория электрона

а) Второе приближение уравнения Дирака. В § 17, п. в) мы показали, что первое приближение уравнения Дирака переходит в уравнение Паули, которое учитывает члены порядка v/c. В настоящем параграфе мы найдем второе приближение уравнения Дирака [включающее члены порядка $(v/c)^2$], с помощью которого можно учесть как релятивистские, так и спиновые эффекты.

На первый взгляд может показаться излишним искать указанное приближение, поскольку во многих случаях (например, в проблеме атома водорода) уравнение Дирака может быть решено точно. Однако приближенное решение проблемы позволяет разделить влияние релятивистских и спиновых эффектов, а также установить некоторые общие формулы для этих взаимодействий, которые в указанном приближении могут быть использованы для построения теории движения двух и более релятивистских частиц.

Уравнение Дирака при наличии потенциальной энергии U, являющейся функцией лишь пространственных координат, можно с помощью матриц Паули σ' записать в виде

$$\left(\mathcal{E}-U\right)\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}=c\,(\sigma'\mathbf{p})\begin{pmatrix}\psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix}, \tag{50,1}$$

$$(2m_0c^2+\mathcal{E}-U)\begin{pmatrix}\psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix}=c\,(\sigma'\mathbf{p})\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}. \tag{50,2}$$

Здесь $\mathcal{E}=E-m_0c^2$, и поэтому отношение $(\mathcal{E}-U)/2m_0c^2$ будет иметь порядок $(v/c)^2$.

Из уравнения (50,2) с точностью до членов порядка $(v/c)^2$ находим:

$$\begin{pmatrix}\psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix}=\left(1-\frac{\mathcal{E}-U}{2m_0c^2}\right)\frac{(\sigma'\mathbf{p})}{2m_0c}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}. \tag{50,3}$$

Подставляя это значение в уравнение (50,1), будем иметь матричное уравнение для двух функций:

$$(\mathcal{E}-U)\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}=\left[\frac{(\sigma'\mathbf{p})(\sigma'\mathbf{p})}{2m_0}-\frac{(\sigma'\mathbf{p})(\mathcal{E}-U)(\sigma'\mathbf{p})}{4m_0^2c^2}\right]\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}. \tag{50,4}$$

Для дальнейших преобразований воспользуемся формулой

$$(\sigma'\boldsymbol{a})(\sigma'\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{ab})+i(\sigma'[\boldsymbol{ab}]), \tag{50,5}$$

а также введем операторы $\mathbf{p}'=(\hbar/i)\nabla$, $\pi=(1/i)\nabla$, действующие соответственно только на функции $\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}$ и U, т. е.

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{p}'f(\boldsymbol{r})\varphi&=f(\boldsymbol{r})\frac{\hbar}{i}(\nabla\varphi),\\ \pi f(\boldsymbol{r})\varphi&=\varphi(\pi f(\boldsymbol{r})).\end{aligned}\right\} \tag{50,5a}$$

Тогда уравнение (50,4) можно записать в виде

$$(\mathcal{E}-U)\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}=\left\{\frac{\mathbf{p}^2}{2m_0}-\frac{\mathbf{p}'^2}{2m_0}\frac{(\mathcal{E}-U)}{2m_0c^2}-\frac{\hbar}{2m_0}(\pi\mathbf{p}')\frac{(\mathcal{E}-U)}{2m_0c^2}-\right.$$
$$\left.-\frac{\hbar i}{2m_0}(\sigma'[\pi\mathbf{p}'])\frac{\mathcal{E}-U}{2m_0c^2}\right\}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}. \qquad (50,6)$$

В приближенном уравнении (50,6) мы должны сделать переход к новым функциям φ_1 и φ_2, нормированным на единицу:

$$\int(\varphi_1^+\varphi_2^+)\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}d^3x=1. \qquad (50,7)$$

Для этого мы положим:

$$\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}=N\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix},\quad (\psi_1^+\psi_2^+)=(\varphi_1^+\varphi_2^+)N, \qquad (50,8)$$

где N — нормировочный коэффициент. Тогда в нашем приближении функции ψ_3 и ψ_4 будут связаны с функциями φ_1 и φ_2 соотношением:

$$\begin{pmatrix}\psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix}=N\frac{(\sigma'\mathbf{p})}{2m_0c}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}. \qquad (50,9)$$

Подставляя (50,8) и (50,9) в уравнение для нормирования волновых функций Дирака:

$$\int(\psi_1^+\psi_1+\psi_2^+\psi_2+\psi_3^+\psi_3+\psi_4^+\psi_4)\,d^3x=1,$$

мы найдем:

$$\int(\varphi_1^+\varphi_2^+)N^2\left(1+\frac{\mathbf{p}^2}{4m_0^2c^2}\right)\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}d^3x=1.$$

Отсюда получаем выражение для нормировочного коэффициента N:

$$N=1-\frac{\mathbf{p}^2}{8m_0^2c^2},$$

т. е.

$$\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}=\left(1-\frac{\mathbf{p}^2}{8m_0^2c^2}\right)\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}. \qquad (50,10)$$

Подставляя (50,10) в уравнения (50,6) и отбрасывая величины порядка малости выше второго, будем иметь:

$$\left(\mathcal{E}-U-\frac{\mathbf{p}^2}{2m_0}\right)\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}=$$
$$=\left(-\frac{\mathbf{p}^4}{8m_0^3c^2}-\frac{\hbar^2}{8m_0^2c^2}(\pi)^2U+\frac{\hbar i}{4m_0^2c^2}(\sigma'[\pi\mathbf{p}'])U\right)\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}. \qquad (50,11)$$

В последней формуле малые члены порядка $(v/c)^2$ перенесены в правую часть. Поэтому последнюю мы можем рассматривать как дополни-

тельное взаимодействие, характеризующее релятивистские и спиновые эффекты. При выводе формулы (50.11) мы учли также следующее операторное соотношение:

$$\mathrm{p}^4 = 2m_0\,\mathrm{p}^2(\mathscr{E} - U) = 2m_0\,\mathrm{p}'^2(\mathscr{E} - U) - \\ - 4m_0\hbar(\mathrm{p}'\pi)U - 2m_0\hbar^2(\pi)^2 U. \quad (50,12)$$

Как видно из формулы (50,11), в нулевом приближении функции φ_1 и φ_2 являются независимыми и подчиняются уравнению

$$\left(\mathscr{E}_0 - U - \frac{\mathrm{p}^2}{2m_0}\right)\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix} = 0. \quad (50,13)$$

Однако при движении под действием центральных сил ($U = U(r)$) между φ_1 и φ_2 может быть установлена связь с помощью законов сохранения для момента количества движения:

$$\mathrm{J}^2\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix} = \left(\mathbf{M} + \frac{1}{2}\hbar\sigma'\right)^2\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix} = \hbar^2 j(j+1)\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}, \quad (50,14)$$

$$\mathrm{J}_z\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix} = \left(\mathrm{M}_z + \frac{1}{2}\hbar\sigma_3'\right)\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix} = \hbar m_j\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}, \quad (50,15)$$

где $\mathbf{M} = \hbar\boldsymbol{l} = [\boldsymbol{r}\mathbf{p}]$ является оператором орбитального момента количества движения, а $^1/_2\hbar\sigma'$ — матрицей спина электрона.

б) Проблема Кеплера. В случае кулоновского потенциала $U = -e^2/r$, т. е. для атома водорода решение системы уравнений (50,13) и (50,14) следует искать в виде

$$\varphi_1 = C_1 Y_l^{m-1} R_{kl} \quad \text{и} \quad \varphi_2 = C_2 Y_l^m R_{kl}. \quad (50,16)$$

Тогда, принимая во внимание, что

$$\mathrm{M}^2\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix} = \hbar^2 l(l+1)\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}, \quad (50,17)$$

будем согласно (50,14) иметь:

$$\frac{1}{\hbar}(\sigma'\mathbf{M})\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix} = (\sigma'\boldsymbol{l})\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix} = \left[j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}\right]\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}. \quad (50,18)$$

Учитывая далее соотношения:

$$\mathrm{M}_z Y_l^m R = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi} Y_l^m R = m\hbar Y_l^m R$$

и

$$(\mathrm{M}_x \pm i\mathrm{M}_y)\, Y_l^m R = -\hbar(l \mp m)\, Y_l^{m\pm 1} R$$

[см. (46,110г)], из (50,18) получаем следующие уравнения для определения величины j и соотношения между коэффициентами C_1 и C_2:

$$\left.\begin{aligned}(q - m + 1)C_1 &= -(l + m)C_2,\\ (q + m)C_2 &= -(l - m + 1)C_1,\end{aligned}\right\} \quad (50,19)$$

где

$$q = j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}. \tag{50,20}$$

Отсюда находим два значения q, соответствующие двум типам решения [см. § 46, п. е)]:

$$1)\ q = l, \quad j = l + \frac{1}{2}, \quad C_2 = -\frac{l-m+1}{l+m} C_1, \tag{50,20a}$$

$$2)\ q = -(l+1), \quad j = l - {}^1/_2, \quad C_2 = C_1. \tag{50,20б}$$

Значение коэффициента C_1 может быть определено из условия нормировки (50,7).

Таким образом, для решения первого типа, когда орбитальный и спиновый моменты параллельны ($j = l + {}^1/_2$, $l = 0, 1, 2, \ldots$), имеем:

$$\varphi^{(1)} = \frac{R_{kl}}{\sqrt{4\pi(l+m)!\,(l-m+1)!}} \begin{pmatrix} (l+m)\,Y_l^{m-1} \\ -(l-m+1)\,Y_l^m \end{pmatrix} = R_{kl}\Omega^{(1)}_{l,m}. \tag{50,21}$$

Точно так же для решения второго типа, когда спин и орбитальный момент антипараллельны ($j = l - {}^1/_2$, $l = 1, 2, 3 \ldots$):

$$\varphi^{(2)} = \frac{R_{kl}}{\sqrt{4\pi(l-m)!\,(l+m-1)!}} \begin{pmatrix} Y_l^{m-1} \\ Y_l^m \end{pmatrix} = R_{kl}\Omega^{(2)}_{l,m}, \tag{50,22}$$

где $\Omega^{(i)}_{l,m}$ является шаровым спинором [см. (46,70)].

Выражения (50,21) и (50,22) представляют собою укороченные решения (т. е. решения, в которых отброшены функции ψ_3 и ψ_4), найденные в указанном приближении теории Дирака [см. (46,117) и (46,122)].

Подставляя эти решения для функции φ в (50,15), мы найдем, что проекция J_z полного момента количества движения является интегралом движения, причем квантовое число m_j равно:

$$m_j = m - {}^1/_2.$$

Для решения первого типа ($j = l + {}^1/_2$), как видно из (50,21), m может меняться в пределах от $-l$ (множитель $l+m$ при несуществующей для этого значения m функции Y_l^{m-1} обращается в нуль) до $l+1$ (множитель $l-m+1$ при несуществующей для этого значения m функции Y_l^m также обращается в нуль), т. е.

$$-j \leqslant m_j \leqslant j. \tag{50,23}$$

Точно так же для решения второго типа ($j = l - {}^1/_2$) из (50,22) следует, что m может меняться в пределах от $-l+1$ до l. Таким образом, для обоих типов решения пределы изменения m_j определяются формулой (50,23), что было уже установлено при точном решении проблемы по теории Дирака [см. (46,111а)].

Заметим, что в данном приближении так же, как и в общем случае, сохраняется только полный момент количества движения, поскольку операторы J^2 и J_z являются интегралами движения. Квадрат орбитального момента M^2 в данном приближении также сохраняется, однако его проекция на ось z уже не является интегралом движения, и поэтому вектор **M** не может иметь собственных значений.

Хотя в решениях (50,21) и (50,22) отсутствуют функции ψ_3 и ψ_4, мы можем определить тонкую структуру атома водорода с учетом релятивистских и спиновых эффектов. Из (50,11) следует, что для кулоновского поля $U = -e^2/r$ энергия, характеризующая тонкую структуру уровней, будет равна:

$$\mathcal{E}' = \int (\varphi_1^+ \varphi_2^+) \left[-\frac{\mathbf{p}^4}{8m_0^3c^2} + 2\mu_0^2\pi\delta(\boldsymbol{r}) + \frac{\mu_0^2}{r^3}(\boldsymbol{\sigma}'\boldsymbol{l}) \right] \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} d^3x, \quad (50,24)$$

где $\mu_0 = e\hbar/2m_0c$ — магнетон Бора. При выводе последней формулы мы приняли во внимание, что

$$\boldsymbol{\pi}^2 U = \nabla^2 \frac{e^2}{r} = -4\pi e^2 \delta(\boldsymbol{r}),$$

$$[\boldsymbol{\pi}\mathbf{p}'] U = \frac{e^2}{ir^3}[\boldsymbol{r}\mathbf{p}] = -i\frac{e^2\hbar\boldsymbol{l}}{r^3}.$$

Первый член дополнительного взаимодействия

$$U_1 = -\frac{\mathbf{p}^4}{8m_0^3c^2} \quad (50,25)$$

определяет релятивистскую поправку на быстроту движения электрона.

Последний (третий) член описывает спин-орбитальное взаимодействие:

$$U_3 = \frac{\hbar^2}{2m_0^2c^2}\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}(\boldsymbol{s}\boldsymbol{l}) = \frac{2\mu_0^2}{r^3}(\boldsymbol{s}\boldsymbol{l}), \quad (50,26)$$

где $\boldsymbol{s} = {}^1/_2\boldsymbol{\sigma}$ — спиновый (в единицах $\hbar$) момент частицы. Он отличен от нуля для всех состояний, кроме $l = 0$. Однако только для s-состояния будет отличен от нуля второй член взаимодействия:

$$U_2 = 2\mu_0^2\pi\delta(\boldsymbol{r}), \quad (50,27)$$

который определяет так называемое «контактное» взаимодействие. Как нетрудно видеть, соответствующая энергия будет пропорциональна $|\psi(0)|^2$, и поэтому для всех состояний с $l \neq 0$ она обращается в нуль.

Таким образом, влияние спина учитывается взаимодействием U_3, когда $l \neq 0$, или взаимодействием U_2, когда $l = 0$.

Заметим, что спиновое взаимодействие мы можем также учесть, преобразуя среднее значение $\overline{U}$ кулоновской энергии для точного уравнения Дирака ($U = -e^2/r$):

$$\overline{U} = \int \psi^+ U \psi \, d^3x, \tag{50,28}$$

при помощи формул (50,9) и (50,10) к волновым функциям φ:

$$\overline{U} = \int (\varphi_1^+ \varphi_2^+) \left[\left(1 - \frac{p^2}{8m_0^2c^2}\right) U \left(1 - \frac{p^2}{8m_0^2c^2}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{(\sigma' p) U (\sigma' p)}{4m_0^2c^2} \right] \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} d^3x. \tag{50,29}$$

Раскрывая последнее выражение, мы находим:

$$\overline{U} = \int (\varphi_1^+ \varphi_2^+) \left[1 - \frac{\hbar^2 (\pi)^2}{8m_0^2c^2} + \frac{i\hbar}{4m_0^2c^2} (\sigma' [\pi p']) \right] U \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} d^3x. \tag{50,30}$$

Первый член в квадратных скобках представляет собою кулоновское взаимодействие для нового приближенного уравнения, а второй и третий члены — дополнительное взаимодействие, связанное со спином частицы.

Заметим, что аналогичным способом легко также найти дополнительную кинетическую энергию ΔT (второй член в скобках правой части равенства (50,31)), если воспользоваться преобразованием, имеющим место для ее среднего значения:

$$\overline{T} = \int \psi^+ [c(\alpha p) + m_0c^2(\rho_3 - 1)] \psi \, d^3x =$$
$$= \int (\varphi_1^+ \varphi_2^+) \left(\frac{p^2}{2m_0} - \frac{p^4}{8m_0^3c^2} \right) \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} d^3x. \tag{50,31}$$

Вычислим теперь энергию, соответствующую дополнительному релятивистскому взаимодействию U_1:

$$\mathscr{E}_1 = \int (\varphi_1^+ \varphi_2^+) \left(- \frac{p^4}{8m_0^3c^2} \right) \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} d^3x.$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{p^2}{2m_0} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \left(\mathscr{E}_0 + \frac{e^2}{r} \right) \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad (\varphi_1^+ \varphi_2^+) \frac{p^2}{2m_0} = (\varphi_1^+ \varphi_2^+) \left(\mathscr{E}_0 + \frac{e^2}{r} \right),$$

получаем:

$$\mathscr{E}_1 = -\frac{1}{2m_0c^2} \left[\mathscr{E}_0^2 + 2\mathscr{E}_0 e^2 \int_0^\infty \frac{1}{r} R_{kl}^2 r^2 \, dr + e^4 \int_0^\infty \frac{1}{r^2} R_{kl}^2 r^2 \, dr \right]. \tag{50,32}$$

Отсюда, учитывая формулы (46,133) и (46,133а), для средних значений $\overline{r^{-1}}$ и $\overline{r^{-2}}$, а также для значения $\mathcal{E}_0 = -Rh/n^2$ находим:

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{Rh\alpha^2}{n^4}\left(\frac{n}{l+{}^1/_2} - \frac{3}{4}\right), \tag{50,33}$$

где $R = e^4 m_0/4\pi\hbar^3$ — постоянная Ридберга.

Выражение (50,33) точно равно дополнительному сдвигу уровней, найденному для релятивистских, но бесспиновых частиц при отбрасывании членов порядка α^4 [см. (46,56)].

Найдем теперь сдвиг уровней, обязанный спиновым эффектам.

Получим прежде всего выражение энергии $\mathcal{E}_3$, обязанное взаимодействию U_3:

$$\mathcal{E}_3 = 2\mu_0^2 \int \left(\varphi_1^+ \varphi_2^+\right) \frac{(\mathbf{s}\mathbf{l})}{r^3} \begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix} d^3x, \tag{50,34}$$

или, принимая во внимание соотношение (50,18), которое известно также из векторной модели:

$$2(\mathbf{s}\mathbf{l}) = j(j+1) - l(l+1) - {}^3/_4,$$

будем иметь:

$$\mathcal{E}_3 = \mu_0^2 q \int_0^\infty \frac{1}{r^3} R_{kl}^2 r^2\, dr. \tag{50,35}$$

Здесь

$$q = j(j+1) - l(l+1) - {}^3/_4 = \begin{cases} l & \text{при} \quad j = l + {}^1/_2 \\ -(l+1) & \text{при} \quad j = l - {}^1/_2. \end{cases} \tag{50,36}$$

Подставляя сюда среднее значение $\overline{r^{-3}}$ из (46,133б), получаем:

$$\mathcal{E}_3 = \frac{\alpha^2 Rhq}{2n^3 l\,(l+{}^1/_2)(l+1)}(1-\delta_{l0}). \tag{50,37}$$

Формула (50,37) дает сдвиг уровня для всех состояний с $l \neq 0$. При $l = 0$ энергию $\mathcal{E}_3$ следует положить равной нулю, так как $\overline{lr^{-3}} = 0$ при $l \to 0$, что мы учитываем с помощью множителя $(1 - \delta_{l0})$. Соответствующее же значение энергии $\mathcal{E}_2$ при $l = 0$ может быть найдено с помощью «контактного» взаимодействия U_2:

$$\mathcal{E}_2 = \int (\varphi_1^+ \varphi_2^+)\, 2\pi\mu_0^2 \delta(\mathbf{r}) \begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix} d^3x = 2\pi\mu_0^2\, |\psi(0)|^2 = \frac{\alpha^2 Rh}{n^3}\delta_{l0}, \tag{50,38}$$

где

$$|\psi(0)|^2 = \frac{\delta_{l0}}{n^3 a_0^3} \tag{50,39}$$

представляет собою квадрат волновой функции Шредингера в начале координат (т. е. при «непосредственном соприкосновении» электрона с ядром). Эта величина, как мы уже указывали, отлична от нуля лишь для s-состояния.

Интересно отметить, что формула (50,38) совпадает с предельной формулой (50,37) $\left(\mathscr{E}_2 = \lim\limits_{l \to 0} \mathscr{E}_3\right)$, если при этом переходе отбросить коэффициент δ_{l0}. Однако это совпадение носит лишь случайный характер.

Общая поправка к энергии, связанная с релятивистскими и спиновыми эффектами, равна:

$$\mathscr{E}' = \mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 + \mathscr{E}_3 = -\frac{Rh\alpha^2}{n^4}\left(\frac{n}{l+{}^1/_2} - \frac{3}{4} - \frac{qn}{2l(l+{}^1/_2)(l+1)} \times \right.$$
$$\left. \times (1-\delta_{l0}) - n\delta_{l0}\right) = -\frac{Rh\alpha^2}{n^4}\left(\frac{n}{j+{}^1/_2} - \frac{3}{4}\right). \qquad (50,40)$$

Она совпадает с поправкой, полученной для энергетических уровней по теории Дирака с точностью до членов порядка α^2 [см. (46,127)].

Хотя, как и следовало ожидать, рассматриваемая приближенная теория не дала новых результатов, она позволила выяснить физический смысл отдельных членов. Кроме того, эту приближенную теорию можно использовать для решения более сложных задач (например, проблемы движения двух частиц), которые не могут быть решены по точной теории Дирака.

Интересно отметить, что дополнительное взаимодействие, связанное с релятивистскими и спиновыми эффектами ($U_1 + U_3$), было введено Дарвином еще до появления уравнения Дирака. Однако он пропустил «контактное» взаимодействие U_2 и потому не смог строго получить формулу тонкой структуры при $l = 0$.

в) Электрическое дипольное, магнитное дипольное и электрическое квадрупольное изучения. В § 27 мы нашли, что вероятность спонтанного излучения дираковских частиц при переходе с уровня b на уровень a определяется выражением

$$A_{ba} = \frac{e^2\varkappa_{ba}}{2\pi\hbar}\int\left([\boldsymbol{\varkappa}^0\boldsymbol{\alpha}_{ab}^+][\boldsymbol{\varkappa}^0\boldsymbol{\alpha}_{ab}]\right)d\Omega, \qquad (50,41)$$

причем матричный элемент

$$\boldsymbol{\alpha}_{ab} = \int \psi_a^+ \boldsymbol{\alpha} e^{-i\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{r}} \psi_b d^3x. \qquad (50,42)$$

Подставляя сюда дираковские функции, мы можем определить правила отбора и найти интенсивность излучения, так сказать, в суммарном виде, т. е. не разделяя излучение на дипольную, квадрупольную и т. д. части.

Попробуем выделить в интенсивности излучения электрическую дипольную, магнитную дипольную и электрическую квадрупольную части. Для этого сделаем переход к приближенным уравнениям, рассматриваемым в начале этого параграфа. Матричный элемент (50,42) можно представить в виде

$$\psi^+\boldsymbol{\alpha} f(r)\psi = (\psi_3^+\psi_4^+)\,\boldsymbol{\sigma}' f(r)\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} + (\psi_1^+\psi_2^+)\,\boldsymbol{\sigma}' f(r)\begin{pmatrix}\psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix}.$$

Отбрасывая величины третьего порядка малости, мы можем в данном случае положить:

$$\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix} = \frac{(\boldsymbol{\sigma}'\mathbf{p})}{2m_0c}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}.$$

Воспользовавшись, далее, соотношениями:

$$(\mathbf{p}\boldsymbol{\sigma}')\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{p} + i[\boldsymbol{\sigma}'\mathbf{p}],$$
$$\boldsymbol{\sigma}'(\mathbf{p}\boldsymbol{\sigma}') = \mathbf{p} - i[\boldsymbol{\sigma}'\mathbf{p}],$$

мы найдем:

$$\psi^+\boldsymbol{\alpha} f(r)\psi = \frac{1}{m_0c}\varphi^+\left(\mathbf{p}' + \frac{1}{2}\hbar\boldsymbol{\pi} + \frac{i\hbar}{2}[\boldsymbol{\sigma}'\boldsymbol{\pi}]\right)f(r)\varphi, \qquad (50,43)$$

где операторы $\mathbf{p}'$ и $\boldsymbol{\pi}$ определены равенством (50,5а), а $\varphi = \begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}$.

В случае, когда длина волны $\lambda/2\pi$ излучаемого света много больше размеров атома ($\sim 10^{-8}$ *см*), мы можем при вычислении матричного элемента экспоненциальный множитель разложить в ряд

$$e^{-i\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{r}} = 1 - i(\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{r}) + \ldots \qquad (50,44)$$

При вычислении электрического дипольного излучения в этом разложении следует ограничиться лишь первым членом. Взяв в (50,44) два первых члена, мы сможем вычислить также электрическое квадрупольное и магнитное дипольное излучения. Подставляя в (50,43) вместо $f(\mathbf{r})$ значение (50,44), получим для матричного элемента (50,42):

$$\boldsymbol{\alpha}_{ab} = \frac{1}{m_0c}\left[\mathbf{p}_{ab} - i((\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{r})\mathbf{p})_{ab} + \frac{i\hbar}{2}[\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{\sigma}']_{ab}\right], \qquad (50,44а)$$

где

$$\mathbf{p}_{ab} = \int \varphi_a^+\mathbf{p}\varphi_b d^3x.$$

Для дальнейших вычислений воспользуемся следующим тождеством:

$$-\frac{(E_b - E_a)}{c\hbar}(f(\mathbf{r}))_{ab} = \frac{1}{c\hbar}(\mathrm{H}f(\mathbf{r}) - f(\mathbf{r})\mathrm{H})_{ab} =$$
$$= \frac{1}{m_0c\hbar}\left(\mathbf{p}f(\mathbf{r})\mathbf{p} + \frac{1}{2}\mathbf{p}^2 f(\mathbf{r})\right)_{ab}, \qquad (50,45)$$

которое легко получить, если принять во внимание, что в нерелятивистском приближении волновая функция удовлетворяет уравнению

$$(E_b - \mathrm{H})\varphi_b = 0,$$

где

$$\mathrm{H} = \frac{\mathrm{p}^2}{2m_0} + U(\boldsymbol{r}). \tag{50,46}$$

Полагая в формуле (50,45) функцию f соответственно равной $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{\varkappa r})$, будем иметь:

$$(\mathrm{p})_{ab} = -im_0\varkappa c(\boldsymbol{r})_{ab}, \tag{50,46а}$$

$$((\boldsymbol{\varkappa r})\mathrm{p})_{ab} = -im_0\varkappa c(\boldsymbol{r}(\boldsymbol{\varkappa r}))_{ab} - (\boldsymbol{r}(\boldsymbol{\varkappa}\mathrm{p}))_{ab}. \tag{50,46б}$$

Отсюда легко вывести следующее равенство:

$$e\boldsymbol{\alpha}_{ab} = -i\varkappa e\boldsymbol{r}_{ab} - \frac{e\varkappa}{2}(\boldsymbol{r}(\boldsymbol{\varkappa r}))_{ab} - i([\boldsymbol{\varkappa\mu}])_{ab}, \tag{50,47}$$

причем оператор $\boldsymbol{\mu}$ магнитного момента атома (включая спиновый магнитный момент электрона) равен

$$\boldsymbol{\mu} = -\frac{e}{2m_0c}[\boldsymbol{r}\mathrm{p}] - \mu_0\boldsymbol{\sigma}'.$$

Подставляя (50,47) в (50,41) и проводя интегрирование по сферическим углам с помощью соотношений:

$$\left.\begin{aligned}
&\oint d\Omega = 4\pi,\\
&\oint (\boldsymbol{\varkappa}^0\boldsymbol{A})\,d\Omega = 0,\\
&\oint (\boldsymbol{\varkappa}^0\boldsymbol{A})(\boldsymbol{\varkappa}^0\boldsymbol{B})\,d\Omega = \frac{4\pi}{3}(\boldsymbol{AB}),\\
&\oint (\boldsymbol{\varkappa}^0\boldsymbol{A})(\boldsymbol{\varkappa}^0\boldsymbol{B})(\boldsymbol{\varkappa}^0\boldsymbol{C})(\boldsymbol{\varkappa}^0\boldsymbol{D})\,d\Omega =\\
&\qquad = \frac{4\pi}{15}[(\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{CD}) + (\boldsymbol{AC})(\boldsymbol{BD}) + (\boldsymbol{AD})(\boldsymbol{BC})],
\end{aligned}\right\} \tag{50,48}$$

получаем выражение для вероятности спонтанного излучения в рассматриваемом приближении:

$$A_{ba} = \frac{64\pi^4\nu^3}{3c^3h}\Big[(d_n)^{+}_{ab}(d_n)_{ab} + (\mu_n)_{ab}(\mu_n)^{+}_{ab} + \\ + \frac{1}{30}\frac{\pi^2\nu^2}{c^2}(D_{nn'})^{+}_{ab}(D_{nn'})_{ab}\Big], \tag{50,49}$$

где

$$(\boldsymbol{d})_{ab} = -e(\boldsymbol{r})_{ab}, \quad (\boldsymbol{\mu})_{ab} = -\left(\frac{e}{2m_0c}[\boldsymbol{r}\mathrm{p}] + \mu_0\boldsymbol{\sigma}'\right)_{ab} \tag{50,50}$$

представляют собою соответственно дипольный электрический и дипольный магнитный моменты системы, а

$$(D_{nn'})_{ab} = -e(3r_n r_{n'} - r^2\delta_{nn'})_{ab} \qquad (50,51)$$

есть ее квадрупольный момент. Если частица не обладает спиновым магнитным моментом, то величину μ_0 следует положить равной нулю.

Таким образом, полное излучение состоит из трех независимых частей: электрического дипольного, магнитного дипольного и электрического квадрупольного излучений.

При переходе к классическому случаю ($h \to 0$) мы должны матричные элементы (50,50) и (50,51) положить равными $(\boldsymbol{d})_{ab} = -e\boldsymbol{r}$ и т. д., поскольку остальная часть формулы не зависит от постоянной Планка h.

Оценим относительные порядки интенсивностей излучений:

$$|(\boldsymbol{d})_{ab}|^2 \sim (er_0)^2 \sim 10^{-35}\,\text{CGS},$$

$$|(\boldsymbol{\mu}_{ab})|^2 \sim \left(\frac{e\hbar}{2m_0c}\right)^2 \sim 10^{-40}\,\text{CGS},$$

$$\frac{\nu^2}{c^2}|(D)_{ab}|^2 \sim (er_0)^2\left(\frac{r_0}{\lambda}\right)^2 \sim 10^{-42}\,\text{CGS}$$

(при $\lambda \sim 5000$ Å).

Таким образом, вероятность перехода, связанная с магнитным дипольным или электрическим квадрупольным излучениями, будет малой величиной по сравнению с вероятностью перехода, связанной с электрическим дипольным излучением.

Поэтому электрическое квадрупольное или магнитное дипольное излучения будут иметь существенное значение только в том случае, когда матричный элемент $(\boldsymbol{d})_{ab}$ дипольного электрического момента равен нулю.

Используя при вычислении матричных элементов (50,50) и (50,51) нерелятивистские волновые функции $\varphi^{(1)}$ и $\varphi^{(2)}$ обоих типов решения (50,21) и (50,22), а также рекуррентные соотношения для шаровых функций:

$$\left.\begin{aligned} (2l+1)\cos\theta\, Y_l^m &= Y_{l+1}^m + (l-m)(l+m)\, Y_{l-1}^m, \\ (2l+1)\, e^{\pm i\varphi}\sin\theta\, Y_l^m &= \pm Y_{l+1}^{m\pm 1} \mp (l\mp m)(l\mp m-1)\, Y_{l-1}^{m\pm 1}, \end{aligned}\right\} \qquad (50,52)$$

мы легко сможем определить правила отбора для дипольных и квадрупольных переходов в атоме водорода.

В частности, в атоме водорода при электрическом дипольном излучении правила отбора для орбитального l, внутреннего j и магнитного m квантовых чисел гласят (см. более подробно § 46):

$$\Delta l = \pm 1, \quad \Delta j = 0, \quad \pm 1, \quad \Delta m = 0, \quad \pm 1; \qquad (50,53)$$

для электрического квадрупольного излучения мы имеем:

$$\Delta l = 0, \quad \pm 2; \quad \Delta j = 0 \, (j \neq 1/2), \quad \pm 1, \quad \pm 2;$$
$$\Delta m = 0, \quad \pm 1, \quad \pm 2. \qquad (50,54)$$

В случае же магнитного дипольного излучения имеем:

$$\Delta l = 0, \quad \Delta j = 0, \quad \pm 1, \quad \Delta m = \pm 1, \quad \Delta n = 0. \qquad (50,55)$$

Если атом находится в метастабильном состоянии, т. е. в состоянии, из которого возможен переход на основной уровень только путем квадрупольного излучения, то время жизни такого возбужденного атома увеличивается примерно в $(\lambda/2\pi r_0)^2$ раз по сравнению с временем жизни возбужденного атома, находящегося в состоянии с разрешенным дипольным переходом.

Так, например, время жизни возбужденного атома водорода имеет вообще порядок 10^{-8} *сек*, а время жизни метастабильного атома водорода увеличивается примерно до 10^{-2} *сек*. Более подробно этот вопрос был разобран в § 46.

Заметим, что дипольное излучение отсутствует в системе, состоящей из частиц, которые обладают одинаковым отношением заряда к массе. Действительно, электрический дипольный момент такой системы будет пропорционален координате центра тяжести и поэтому должен оставаться постоянной величиной. Это условие имеет место, например, для гравитационного излучения, поскольку гравитационный заряд (точнее, гравитационная масса) пропорционален инертной массе m_0. Поэтому гравитационное излучение может происходить лишь квадрупольным путем [1]).

Квадрупольное излучение имеет большое значение в физике атомного ядра, поскольку заряженные частицы последнего (протоны) обладают одинаковым зарядом и массой.

г) Спектр атома позитрония. Как известно, при столкновении электрона с позитроном может произойти не только процесс аннигиляции (т. е. превращение электрона и позитрона в два γ-кванта), но также образование метастабильной системы атомного типа (позитроний).

Такая система будет неустойчивой и может аннигилировать либо на два (парапозитроний), либо на три (ортопозитроний) γ-кванта. Вопросы двух- и трехфотонной аннигиляции позитрония были подробно рассмотрены в § 40, п. г) в связи с развитием общей теории, связанной с аннигиляцией электронов и позитронов.

Оказывается, что время жизни позитрония, в особенности в ортосостоянии, распадающемся на три фотона, достигает сравнительно большого значения (10^{-7} *сек*). Поэтому можно экспериментально

---

[1]) См. «Классическая теория поля», стр 446.

наблюдать многие явления, связанные с изучением энергетических уровней этого наилегчайшего атома.

Изучение атома позитрония имеет большое значение и для развития общей теории элементарных частиц, поскольку он представляет собою простейшую систему, в которой могут проявляться релятивистские законы движения двух частиц. К сожалению, строгой релятивистской теории движения двух частиц еще не построено. Поэтому для описания атома позитрония мы используем приближенную релятивистскую теорию, включающую члены порядка $(v/c)^2$.

Для этой цели найдем прежде всего нерелятивистское приближение, в котором движение частиц в атоме позитрония можно описать уравнением

$$\left(\mathcal{E}-\frac{\mathbf{p}_a^2}{2m_0}-\frac{\mathbf{p}_b^2}{2m_0}+\frac{e^2}{|\boldsymbol{r}_a-\boldsymbol{r}_b|}\right)\varphi(\boldsymbol{r}_a,\ \boldsymbol{r}_b)=0, \qquad (50,56)$$

где $\mathbf{p}_a=\frac{\hbar}{i}\nabla_a$ и $\boldsymbol{r}_a$ — импульс и координата электрона, а $\mathbf{p}_b=\frac{\hbar}{i}\nabla_b$ и $\boldsymbol{r}_b$ — импульс и координата позитрона.

Введем относительную координату:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_a-\boldsymbol{r}_b$$

и координату центра инерции, которая при равенстве масс электрона и позитрона будет равна

$$\boldsymbol{r}_c=\frac{\boldsymbol{r}_a+\boldsymbol{r}_b}{2}.$$

В системе координат, где центр инерции покоится:

$$\boldsymbol{r}_c=0,\ \boldsymbol{r}_a=-\boldsymbol{r}_b=\frac{\boldsymbol{r}}{2},\quad \mathbf{p}_a=-\mathbf{p}_b=\mathbf{p}=\frac{\hbar}{i}\nabla, \qquad (50,57)$$

нерелятивистское уравнение для атома позитрония (50,46) принимает вид:

$$\left(\mathcal{E}-\frac{p^2}{m_0}+\frac{e^2}{r}\right)\varphi(\boldsymbol{r})=0.$$

Учитывая, что парасостояние является синглетным, а ортосостояние — триплетным, мы должны получить для заданного значения $\mathcal{E}$ и орбитального момента $\hbar l$ четыре значения волновой функции φ, которые запишем в виде матрицы:

$$\varphi=\begin{pmatrix}\varphi_{11} & \varphi_{12}\\ \varphi_{21} & \varphi_{22}\end{pmatrix}. \qquad (50,57a)$$

Соотношения между различными компонентами волновых функций могут быть установлены так же, как и в приближенной теории атома водорода, с помощью введения закона сохранения для полного

момента количества движения[1]) [см. (50,14) и (50,15)]:

$$J^2\varphi = \left(\mathbf{M} + \frac{\hbar}{2}\sigma_a + \frac{\hbar}{2}\sigma_b\right)^2 \varphi = \hbar^2 j(j+1)\varphi, \qquad (50,58)$$

$$J_z\varphi = \left(M_z + \frac{\hbar}{2}\sigma_{a3} + \frac{\hbar}{2}\sigma_{b3}\right)\varphi = \hbar m\varphi, \qquad (50,58а)$$

где $\mathbf{M} = [\mathbf{rp}]$ — оператор момента количества движения, а магнитное квантовое число m меняется в пределах от $-j$ до $+j$. Действие матриц σ_a и σ_b на волновую функцию φ требует некоторых пояснений. Матрицы σ_a и σ_b представляют собою совокупность двухрядных матриц Паули σ', причем матрицы σ_a действуют на первые значки волновой функции ($\sigma_{a1}\varphi_{11} = \varphi_{21}$ и т. д.), а матрицы σ_b — на вторые значки ($\sigma_{b1}\varphi_{11} = \varphi_{12}$ и т. д.). Это означает, что, согласно правилу умножения матриц:

$$\sigma_a\varphi = \sigma'\varphi, \quad \sigma_b\varphi = \varphi\sigma'^{T}, \qquad (50,59)$$

где σ'^{T} — транспонированные матрицы Паули, а волновая функция φ задана выражением (50,57а). Равенство (50,59) определяет различный характер действия матриц спина σ_a и σ_b, относящихся соответственно к электрону и позитрону.

Решение для различных компонент волновых функций будем искать в виде

$$\varphi^{(\mu)} = R_{kl}\Omega^{(\mu)}_{l,m}, \qquad (50,60)$$

где R_{kl} представляет собою радиальную функцию нерелятивистской проблемы Кеплера (см. (46,44)), если в последней массу электрона заменить приведенной массой ($m_0 \to m_0/2$).

Тогда для энергии атома позитрония мы найдем в нерелятивистском приближении следующее значение:

$$\mathscr{E}_n = -\frac{R\hbar}{2n^2}, \qquad (50,61)$$

где постоянная Ридберга, как обычно, равна:

$$R = \frac{e^4 m_0}{4\pi\hbar^3} = \frac{e^2}{4\pi\hbar a_0}.$$

Угловую часть $\Omega^{(\mu)}_{l,m}$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) мы можем рассматривать как шаровой «четырехвектор» (не путать с шаровым спинором $\Omega^{(i)}_{l,m}$, $i = 1, 2$!).

---

[1]) Точнее, сохраняются квадрат полного момента и его проекция на ось z.

Решение для этого «четырехвектора» мы будем искать в виде

$$\Omega_{l,m}^{(\mu)}=\begin{pmatrix} a_{11}^{(\mu)}Y_l^{m-1}, & a_{12}^{(\mu)}Y_l^m \\ a_{21}^{(\mu)}Y_l^m, & a_{22}^{(\mu)}Y_l^{m+1}\end{pmatrix}, \tag{50,62}$$

где значение шаровой функции $Y_l^{m'}$ определяется равенством (46,31). Для того чтобы найти коэффициенты $a_{11}^{(\mu)}$ и т. д., мы должны подставить (50,62) в уравнения (50,58). Тогда, принимая во внимание равенство

$$M_z Y_l^{m'}=\hbar m' Y_l^{m'}, \tag{50,63}$$

мы легко убедимся, что уравнение (50,58а) будет удовлетворено при любых значениях коэффициентов $a_{11}^{(\mu)}$ и т. д. Уравнение же (50,58) накладывает на эти коэффициенты следующие условия:

$$\left(M^2+\frac{3}{2}\hbar^2\right)a_{11}Y_l^{m-1}+\hbar(M_x-iM_y)(a_{12}+a_{21})Y_l^m+2\hbar M_z a_{11}Y_l^{m-1}+$$
$$+\frac{\hbar^2}{2}\left[(a_{22}-a_{22})Y_l^{m+1}+a_{11}Y_l^{m-1}\right]=j(j+1)\hbar^2 a_{11}Y_l^{m-1} \tag{50,63а}$$

и т. д. (всего четыре условия).

В дальнейшем следует принять во внимание соотношения:

$$M^2Y_l^m=\hbar^2 l(l+1)Y_l^m, \tag{50,64}$$

$$(M_x\mp iM_y)Y_l^m=-\hbar(l\pm m)Y_l^{m\mp1}, \tag{50,64а}$$

а также (50,63). Соотношение (50,64), по существу, выражает сохранение (в нерелятивистском приближении) квадрата орбитального момента, но не его проекции на ось z. Более того, из (50,58а) видно, что $m_j=m$, и поэтому в (50,62) матричные элементы, пропорциональные Y_l^{m-1}, Y_l^m, Y_l^{m+1}, описывают состояния, спин которых направлен соответственно по ($s_z=m_j-(m-1)=1$), перпендикулярно ($s_z=m_j-m=0$) и против ($s_z=m_j-(m+1)=-1$) оси z.

Поскольку в первом (нерелятивистском) приближении сохраняются по отдельности и квадрат общего момента j и квадрат орбитального момента l, должен сохраняться и квадрат спинового момента:

$$\left(\frac{\hbar}{2}\sigma_a+\frac{\hbar}{2}\sigma_b\right)^2\Omega_{l,m}^{(\mu)}=\hbar^2 s(s+1)\Omega_{l,m}^{(\mu)}. \tag{50,64б}$$

В зависимости от различных значений s и j мы будем иметь четыре значения индекса μ, определяющие различные составляющие шарового «четырехвектора», которые мы выразим через ортонормированные шаровые функции $\overline{Y}_l^m$ [см. (46,70а)]. Случаю $\mu=0$ пусть соот-

ветствуют $s=0$ и $j=l$. Тогда мы будем иметь парасостояние [спин электрона антипараллелен спину позитрона[1])]:

$$\Omega_{l,\,m}^{(0)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\overline{Y}_l^m. \qquad (50{,}65а)$$

Случаи $\mu=1,\ 2,\ 3$ пусть соответствуют $s=1$, т. е. ортосостоянию (спин электрона параллелен спину позитрона). При $j=l+1$ $(\mu=1)$ спин позитрония параллелен орбитальному моменту:

$$\Omega_{l,\,m}^{(1)}=\frac{1}{\sqrt{2(2l+1)(l+1)}}\times$$
$$\times\begin{pmatrix}-\sqrt{(l+m)(l+m+1)}\,\overline{Y}_l^{m-1}, & \sqrt{(l+m+1)(l-m+1)}\,\overline{Y}_l^m\\ \sqrt{(l+m+1)(l-m+1)}\,\overline{Y}_l^m, & -\sqrt{(l-m+1)(l-m)}\,\overline{Y}_l^{m+1}\end{pmatrix}. \qquad (50{,}65б)$$

При $j=l$ $(\mu=2)$ спин позитрония перпендикулярен орбитальному моменту:

$$\Omega_{l,\,m}^{(2)}=\frac{1}{\sqrt{2l(l+1)}}\begin{pmatrix}\sqrt{(l-m+1)(l+m)}\,\overline{Y}_l^{m-1}, & m\overline{Y}_l^m\\ m\overline{Y}_l^m, & -\sqrt{(l-m)(l+m+1)}\,\overline{Y}_l^{m+1}\end{pmatrix}. \qquad (50{,}65в)$$

При $j=l-1$ $(\mu=3)$ спин позитрония антипараллелен орбитальному моменту:

$$\Omega_{l,\,m}^{(3)}=\frac{1}{\sqrt{2l(2l+1)}}\begin{pmatrix}\sqrt{(l-m+1)(l-m)}\,\overline{Y}_l^{m-1}, & \sqrt{(l+m)(l-m)}\,\overline{Y}_l^m\\ \sqrt{(l+m)(l-m)}\,\overline{Y}_l^m, & \sqrt{(l+m)(l+m+1)}\,\overline{Y}_l^{m+1}\end{pmatrix}. \qquad (50{,}65г)$$

Легко показать, что составляющие шарового «четырехвектора» удовлетворяют условию ортонормированности:

$$\oint\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,\mathrm{Sp}\,\Omega_{l',m'}^{+(\mu')}\Omega_{l,\,m}^{(\mu)}=\delta_{ll'}\delta_{mm'}\delta_{\mu\mu'}. \qquad (50{,}66)$$

В последней формуле Sp от произведения матриц $\varphi^+\varphi$ означает

$$\mathrm{Sp}\,\varphi^+\varphi=\varphi_{11}^+\varphi_{11}+\varphi_{12}^+\varphi_{12}+\varphi_{21}^+\varphi_{21}+\varphi_{22}^+\varphi_{22}, \qquad (50{,}67)$$

---

[1]) Коэффициенты, стоящие в матричных элементах при шаровых функциях $\overline{Y}_l^m$, по существу, являются коэффициентами ряда Клебша—Жордана. Так называемые шаровые трехмерные векторы связаны с $\Omega_{l,\,m}^{(\mu)}$ соотношением

$$\left.\begin{aligned}\Omega_{l,\,m}^{(2)}&=\Omega_{l,\,m}^{(z)},\\ \Omega_{l,\,m}^{(1,\,3)}&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Omega_{l,\,m}^{(x)}\pm i\Omega_{l,\,m}^{(y)}\right)\end{aligned}\right\} \qquad (50{,}65)$$

см. В. Сорокин, ЖЭТФ 18, 228 (1948)].

поскольку матрицы φ и φ^+ имеют вид:

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{pmatrix}, \quad \varphi^+ = \begin{pmatrix} \varphi_{11}^+ & \varphi_{21}^+ \\ \varphi_{12}^+ & \varphi_{22}^+ \end{pmatrix}. \qquad (50,68)$$

Определив составляющие шарового «четырехвектора», мы будем знать волновые функции атома позитрония в нерелятивистском приближении [см. (50,60)].

Найдем матричный элемент, характеризующий интенсивность излучения при дипольных переходах из состояния n', l', j' в состояние n, l, j:

$$\bar{r} = \int \mathrm{Sp}\, \varphi'^+ r \varphi \, d^3x. \qquad (50,69)$$

Подставляя сюда различные решения для волновых функций, характеризующие пара- и ортосостояния и учитывая рекуррентные соотношения (46,159), мы найдем для дипольного излучения правила отбора, аналогичные правилам отбора в атоме водорода:

$$\Delta l = \pm 1, \ \Delta j = 0, \ \pm 1, \ \Delta m = 0, \ \pm 1, \ \Delta s = 0. \qquad (50,70)$$

Квадрупольное излучение в атоме позитрония вообще отсутствует

Из правил отбора следует, что дипольные переходы между орто- и парасостояниями невозможны.

Парапозитроний, находящийся в наинизшем энергетическом состоянии 1^1S_0, должен аннигилировать на два фотона со временем жизни $\tau_2 = 2/ck_0\alpha^5 \cong 1{,}25 \cdot 10^{-10}$ *сек* [см. (40,68)], а ортопозитроний — на три фотона со временем жизни

$$\tau_3 = \frac{9}{2} \frac{\pi}{\pi^2 - 9} \frac{1}{ck_0\alpha^6} \cong 1{,}4 \cdot 10^{-7} \text{ сек}$$

[см. (40,69)], т. е. время жизни для ортопозитрония ($n = 1$) будет примерно в 1120 раз больше времени жизни парапозитрония ($n = 1$). Для ортопозитрония, находящегося в состоянии 2^3P_j, трехфотонная аннигиляция запрещена ($|\varphi(0)|^2 = 0$). Однако для этих состояний имеется большая вероятность перехода в наинизшее ортосостояние ($2^3P_j \rightarrow 1^3S_1$) с последующей трехфотонной аннигиляцией. Интересно отметить, что ортосостояние 2^3S_1 должно быть метастабильным, поскольку дипольные переходы $2^3S_1 \rightarrow 1^3S_1$ запрещены ($\Delta l = 0$). Время жизни $\tau_{\text{мета}}$ для трехфотонной аннигиляции позитрония, находящегося на этом метастабильном уровне, примерно в восемь раз ($n^3 = 8$) превышает время жизни τ_3 ортопозитрония, находящегося в наинизшем состоянии 1^3S_1:

$$\tau_{\text{мета}} \cong n^3 \frac{9}{2} \frac{\pi}{\pi^2 - 9} \frac{1}{ck_0\alpha^6} \approx 1{,}12 \cdot 10^{-6} \text{ сек}. \qquad (50,71)$$

д) Тонкая и сверхтонкая структура уровней атома позитрония. Как известно, тонкая структура уровней в атоме водорода связана с релятивистскими и спиновыми эффектами для электрона. Сверхтонкая же структура связана с магнитным моментом ядра и приводит к эффектам, примерно в 1000 с лишним раз меньшим по сравнению с тонкой структурой, поскольку масса ядра водорода в 1800 раз больше массы электрона и поэтому магнитный момент ядра во столько же раз меньше магнитного момента электрона.

В атоме позитрония магнитный момент ядра (т. е. позитрона) равен по абсолютному значению магнитному моменту электрона. Благодаря этому эффекты, связанные с тонкой и сверхтонкой структурой, должны иметь один и тот же порядок.

Как было показано в § 49, п. в), взаимодействие между электроном и позитроном складывается из необменной (49,41) и обменной (49,45) частей. Необменная часть взаимодействия дается формулой Мёллера для необменного взаимодействия двух электронов, взятой с обратным знаком. Поэтому в приближении, когда учитываются члены порядка $(v/c)^2$, она может быть преобразована к взаимодействию вида (49,11a):

$$U_{\text{необм}} = -\frac{e^2}{2\pi^2}\int \frac{1}{\varkappa^2} e^{i\varkappa r}\left[1-(\boldsymbol{\alpha}_a\boldsymbol{\alpha}_b) + \frac{(\boldsymbol{\alpha}_a\varkappa)(\boldsymbol{\alpha}_b\varkappa)}{\varkappa^2}\right] d^3\varkappa = -\frac{e^2}{r} + e^2([\boldsymbol{\alpha}_a\nabla]\,[\boldsymbol{\alpha}_b\nabla])\frac{r}{2}. \tag{50,72}$$

Оставляя в обменной части взаимодействия (49,45) [взаимодействие Баба] лишь основной член, мы в данном приближении можем преобразовать ее к виду

$$U_{\text{обм}} = -\frac{e^2}{8\pi^2 k_0^2}\int e^{i\varkappa r}\left(1-(\boldsymbol{\alpha}_a\boldsymbol{\alpha}_b)\right) d^3\varkappa \tag{50,73}$$

или к виду

$$U_{\text{обм}} = -e^2\pi\frac{\hbar^2}{m_0^2c^2}\left[1-(\boldsymbol{\alpha}_a\boldsymbol{\alpha}_b)\right]\delta(\boldsymbol{r}), \tag{50,74}$$

соответствующему «контактному» взаимодействию.

Для дальнейшего исследования с точностью до членов порядка $(v/c)^2$ введем двухрядные матрицы для волновых функций электрона:

$$\varphi_a = \begin{pmatrix}\varphi_{a1}\\ \varphi_{a2}\end{pmatrix} \tag{50,75}$$

и позитрона

$$\varphi_b = \begin{pmatrix}\varphi_{b1}\\ \varphi_{b2}\end{pmatrix}. \tag{50,76}$$

Электронная волновая функция φ связана с φ_a соотношениями (50,9) и (50,10):

$$\left.\begin{aligned} \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} &= \left(1-\frac{\mathbf{p}_a^2}{8m_0^2c^2}\right)\begin{pmatrix}\varphi_{a1}\\ \varphi_{a2}\end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix}\psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix} &= \frac{(\sigma'_a\mathbf{p}_a)}{2m_0c}\begin{pmatrix}\varphi_{a1}\\ \varphi_{a2}\end{pmatrix}. \end{aligned}\right\} \qquad (50,77)$$

Приближенная позитронная волновая функция φ_b будет связана с системой штрихованных волновых функций ψ' [см. (42,60)], в которых частицы положительных энергий сопоставляются с позитронами:

$$\left.\begin{aligned} \begin{pmatrix}\tilde\psi_1\\ \tilde\psi_2\end{pmatrix}_{E>0} &= \begin{pmatrix}\psi_4^+\\ -\psi_3^+\end{pmatrix}_{E<0} = \left(1-\frac{\mathbf{p}_b^2}{8m_0^2c^2}\right)\begin{pmatrix}\varphi_{b1}\\ \varphi_{b2}\end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix}\tilde\psi_3\\ \tilde\psi_4\end{pmatrix}_{E>0} &= \begin{pmatrix}-\psi_2^+\\ \psi_1^+\end{pmatrix}_{E<0} = \frac{(\sigma'_b\mathbf{p}_b)}{2m_0c}\begin{pmatrix}\varphi_{b1}\\ \varphi_{b2}\end{pmatrix}. \end{aligned}\right\} \qquad (50,78)$$

Для дальнейших вычислений также полезно воспользоваться формулой

$$\left(\psi_n^+\alpha_\mu\psi_{n'}\right)_{E<0} = \left(\tilde\psi_{n'}^+\alpha_\mu\tilde\psi_n\right)_{E>0}, \qquad (50,78а)$$

которую легко получить, используя соотношения (42,64) и (42,68).

Волновые функции $\varphi_{\mu\mu'}$ [см. (50,57а)] связаны с волновыми функциями φ_a и φ_b соотношением

$$\varphi_{\mu\mu'} = \varphi_{a\mu}\varphi_{b\mu'}.$$

Тогда дополнительное взаимодействие, учитывающее релятивистские и спиновые эффекты, будет состоять из следующих частей. Взаимодействие U_1 [см. (50,25)]:

$$U_1 = -\frac{1}{8m_0^3c^2}\left(\mathbf{p}_a^4+\mathbf{p}_b^4\right) = -\frac{1}{4m_0^3c^2}\,\mathbf{p}^4, \qquad (50,79)$$

представляет собою релятивистскую поправку, обусловленную быстротой движения как электрона, так и позитрона.

Далее, в результате преобразования кулоновской энергии притяжения при переходе от дираковских волновых функций ψ к нерелятивистским φ с помощью формулы (50,30) мы будем иметь:

$$\psi^+\left(-\frac{e^2}{r}\right)\psi = \varphi^+\left(-\frac{e^2}{r}+U_a\right)\varphi, \qquad (50,80)$$

где

$$U_a = 4\pi\mu_0^2\delta(\boldsymbol{r}) + \frac{e}{2m_0c}\mu_0\frac{1}{r^3}\{(\boldsymbol{\sigma}_a[\boldsymbol{r}\mathbf{p}_a]) - (\boldsymbol{\sigma}_b[\boldsymbol{r}\mathbf{p}_b])\}. \qquad (50,81)$$

При преобразовании обобщенной брейтовской части взаимодействия

$$\psi^+ e^2\left([\boldsymbol{\alpha}_a\nabla][\boldsymbol{\alpha}_b\nabla]\frac{r}{2}\right)\psi = \varphi^+ U_b\varphi \qquad (50,82)$$

мы воспользуемся формулами:

$$\left.\begin{aligned} \psi^+[\boldsymbol{\alpha}_a\nabla]U\psi &= \frac{1}{m_0c}\varphi^+\left\{[\mathbf{p}_a\nabla] - \frac{\hbar}{2}(\boldsymbol{\sigma}_a\nabla^2 - \nabla(\boldsymbol{\sigma}_a\nabla))\right\}U\varphi, \\ \psi^+[\boldsymbol{\alpha}_b\nabla]U\psi &= \frac{1}{m_0c}\varphi^+\left\{[\mathbf{p}_b\nabla] + \frac{\hbar}{2}(\boldsymbol{\sigma}_b\nabla^2 - \nabla(\boldsymbol{\sigma}_b\nabla))\right\}U\varphi, \end{aligned}\right\} \qquad (50,83)$$

которые следуют из равенства (50,43), а также соотношением

$$\nabla_n\nabla_{n'}\frac{1}{r} = -\frac{4\pi}{3}\delta(\boldsymbol{r})\delta_{nn'} - \frac{1}{r^5}(\delta_{nn'}r^2 - 3x_nx_{n'}). \qquad (50,84)$$

Учитывая, что в данном случае оператор $\nabla = i\boldsymbol{\pi}$ не действует на функции ψ и φ, найдем:

$$\begin{aligned} U_b = {} & \frac{e^2}{2m_0^2c^2}\left\{\frac{1}{r}(\mathbf{p}_a\mathbf{p}_b) + \frac{x_nx_{n'}\mathrm{p}_{an}\mathrm{p}_{bn'}}{r^3}\right\} + \\ & + \frac{e}{m_0c}\mu_0\frac{1}{r^3}(\boldsymbol{\sigma}_b[\boldsymbol{r}\mathbf{p}_a] - \boldsymbol{\sigma}_a[\boldsymbol{r}\mathbf{p}_b]) + \\ & + \mu_0^2\left\{\frac{8\pi}{3}(\boldsymbol{\sigma}_a\boldsymbol{\sigma}_b)\delta(\boldsymbol{r}) - \frac{(\sigma_a\sigma_b)r^2 - 3(\sigma_a\boldsymbol{r})(\sigma_b\boldsymbol{r})}{r^5}\right\}. \end{aligned} \qquad (50,85)$$

Суммарное же взаимодействие $U_a + U_b$ будет содержать три части ($\mathbf{p}_a = -\mathbf{p}_b = \mathbf{p}$):

$$U_a + U_b = U_2 + U_3 + U_4,$$

где

$$U_2 = -\frac{e^2}{2m_0^2c^2}\left\{\frac{1}{r}\mathrm{p}^2 + \frac{x_nx_{n'}\mathrm{p}_n\mathrm{p}_{n'}}{r^3}\right\} \qquad (50,86)$$

представляет собою орбитальное взаимодействие, обусловленное брейтовской (классической) частью взаимодействия. Часть

$$U_3 = 4\pi\mu_0^2\delta(\boldsymbol{r}) + \frac{3}{r^3}\mu_0^2\left((\boldsymbol{\sigma}_a + \boldsymbol{\sigma}_b)\boldsymbol{l}\right); \qquad (50,87)$$

здесь $\hbar\boldsymbol{l} = [\boldsymbol{r}\mathbf{p}]$ представляет собою спин-орбитальное взаимодействие с учетом «контактного» члена, пропорционального $\delta(\boldsymbol{r})$.

Наконец, часть

$$U_4 = \mu_0^2\left\{\frac{8\pi}{3}(\boldsymbol{\sigma}_a\boldsymbol{\sigma}_b)\delta(\boldsymbol{r}) + S_{ab}\frac{1}{r^3}\right\}, \qquad (50,88)$$

где

$$S_{ab} = 3(\sigma_a r^0)(\sigma_b r^0) - (\sigma_a \sigma_b),$$

обязана спин-спиновому взаимодействию [1]).

Особо остановимся на исследовании обменного взаимодействия Баба (50,74). В этом случае мы будем иметь произведение волновой функции электрона ($E > 0$) на волновую функцию позитрона ($E < 0$), и поэтому основным членом будет выражение, пропорциональное $(\alpha_a \alpha_b)$, а членом, пропорциональным единичной матрице, мы можем вообще пренебречь. Это взаимодействие будет пропорционально выражению

$$\overline{U}_5 = \frac{\pi e^2 \hbar^2}{m_0 c^2} \delta(r) \psi^+_{E>0} \alpha \psi_{E<0} \psi^+_{E<0} \alpha \psi_{E>0}. \qquad (50,90)$$

Для состояний с отрицательной энергией ($E < 0$) сделаем переход к позитронным волновым функциям с помощью (42,64) и (42,68)

$$\overline{U}_5 = \frac{\pi e^2 \hbar^2 \delta(r)}{m_0^2 c^2} \psi^+_{E>0} \alpha i \alpha_2 \rho_3 \widetilde{\psi}^{T+}_{E>0} \widetilde{\psi}^{T}_{E>0} i\alpha_2 \rho_3 \alpha \psi_{E>0}, \qquad (50,91)$$

---

[1]) Аналогичным путем легко получить следующее выражение для взаимодействия двух электронов (a и a'):

$$U_{эл} = \left[\frac{e^2}{r} + \frac{1}{2m_0}(p_a^2 + p_{a'}^2) - \frac{1}{8m_0^3 c^2}(p_a^4 + p_{a'}^4)\right] -$$
$$- \frac{e^2}{2m_0 c^2}\left[\frac{1}{r}(\mathbf{p}_a \mathbf{p}_{a'}) + \frac{1}{r^3}(r\mathbf{p}'_a)(r\mathbf{p}_{a'})\right] + \mu_0^2\left[-4\pi\delta(r) -\right.$$
$$\left. - \frac{1}{r^3}(\sigma_a l_a) + \frac{1}{r^3}(\sigma_{a'} l_{a'}) - 2\frac{1}{r^3}(l_a \sigma_{a'}) + 2\frac{1}{r^3}(l_{a'}\sigma_a)\right] +$$
$$+ \mu_0^2\left[-\frac{8\pi}{3}(\sigma_a \sigma_{a'})\delta(r) + \frac{1}{r^3}(\sigma_a \sigma_{a'}) - \frac{3}{r^5}(\sigma_a r)(\sigma_{a'} r)\right]. \qquad (50,89)$$

Первый член (в первых квадратных скобках) представляет обычное кулоновское отталкивание и кинетическую энергию с учетом членов $(v/c)^2$, второй член — брейтовское (классическое) взаимодействие, третий член — спин-орбитальное взаимодействие и, наконец, четвертый — спин-спиновое взаимодействие. Здесь $l_a \hbar = [r\mathbf{p}_a]$ и $l_{a'}\hbar = [r\mathbf{p}_{a'}]$ — орбитальные моменты первого и второго электрона.

Если бы электроны не обладали спинами, то во взаимодействии (50,89) остались бы только два первых члена (кулоновская плюс кинетическая энергия и чисто брейтовский).

Формула (50,89) с успехом используется для построения теории тонкой структуры атома гелия с двумя орбитальными электронами. Особенно хорошо результаты совпадают с экспериментом, если учесть «контактные» члены, пропорциональные $\delta(r)$ [см. А. И. Андреев, Вестн. МГУ **3**, № 5, 65 (1954) и T. Y. Wu and G. E. Tauler, Phys. Rev. **100**, 1767 (1955)]. Эти «контактные» члены обусловливают влияние области вблизи $r \to 0$. При вычислениях можно не обращать внимания на кажущуюся расходимость некоторых интегралов. Для того чтобы избежать появления расходимостей, необходимо сперва выполнить интегрирование по углам.

а затем — к двухрядным волновым функциям (50,78) и (50,78а), ограничиваясь в последних основным членом. Тогда будем иметь:

$$\overline{U}_5 = \pi \frac{e^2\hbar^2}{m_0^2c^2}\delta(r) \sum_{\mu=0,1,3} (\varphi_{a1}^+\varphi_{a2}^+)\sigma'_\mu \begin{pmatrix}\varphi_{b1}^+ \\ \varphi_{b2}^+\end{pmatrix} (\varphi_{b1}\varphi_{b2})\sigma'_\mu \begin{pmatrix}\varphi_{a1} \\ \varphi_{a2}\end{pmatrix}, \quad (50,92)$$

где σ'_μ являются двухрядными матрицами, равными 1 ($\mu = 0$), σ'_1 ($\mu = 1$) и σ'_3 ($\mu = 3$).

Здесь следует обратить внимание на следующее обстоятельство: хотя (50,92) представляет собою типичное обменное взаимодействие, однако, как было показано в [1]), оно может быть преобразовано (только в данном приближении) к виду, соответствующему необменной энергии:

$$\overline{U}_5 = (\varphi_{a1}^+\varphi_{a2}^+)(\varphi_{b1}^+\varphi_{b2}^+) U_5 \begin{pmatrix}\varphi_{a1} \\ \varphi_{a2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_{b1} \\ \varphi_{b2}\end{pmatrix}, \quad (50,93)$$

где соответствующее необменное взаимодействие равно

$$U_5 = \pi \frac{e^2\hbar^2}{m_0^2c^2} \frac{3 + (\sigma_a\sigma_b)}{2}\delta(r), \quad (50,94)$$

а матрицы σ_a и σ_b действуют соответственно на электронные и позитронные волновые функции. В правильности перехода от равенства (50,92) к равенству (50,93) легко убедиться путем непосредственного вычисления обоих выражений. Таким образом, в атоме позитрония релятивистское спиновое дополнительное взаимодействие, имеющее относительно основного порядок $(v/c)^2$, складывается из пяти частей $(U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5)$ фактически необменного взаимодействия.

Соответствующую дополнительную энергию, характеризующую тонкую и сверхтонкую структуру уровней атома позитрония, можно определить с помощью формулы

$$\Delta\mathscr{E}_i = \int \mathrm{Sp}\, \varphi^+ U_i \varphi\, d^3x, \quad (50,95)$$

где $i = 1, 2, 3, 4, 5$, а вместо φ следует подставить решение (50,64б) или (50,65 а, б, в, г).

Тогда для релятивистских поправок на быстроту движения [$\Delta\mathscr{E}_1$, см. (50,79)] и на брейтовское взаимодействие [$\Delta\mathscr{E}_2$ см. (50,86)] будем иметь:

$$\Delta\mathscr{E}_1 = -\frac{Rh}{2n^2}\frac{\alpha^2}{4n^2}\left(\frac{n}{l+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4}\right), \quad (50,96)$$

$$\Delta\mathscr{E}_2 = -\frac{Rh}{2n^2}\frac{\alpha^2}{4n^2}\left(\frac{3n}{l+\frac{1}{2}} - 2\right) + \frac{Rh\alpha^2}{4n^3}\delta_{l0}. \quad (50,97)$$

---

[1]) Pirenne, Arch. Sci. Phys. et Nat. **29**, 207 (1947); см. также Л. Ландау и В. Б. Берестецкий, ЖЭТФ **19**, 673 (1949).

Энергия $\Delta\mathcal{E}_1+\Delta\mathcal{E}_2$ не зависит от спинов электрона и позитрона, и поэтому соответствующий сдвиг уровней имел бы место также для атомных образований из бесспиновых частиц.

Дополнительные энергии, соответствующие спин-орбитальному взаимодействию [$\Delta\mathcal{E}_3$, см. (50,87)] и спин-спиновому взаимодействию [$\Delta\mathcal{E}_4$, см. (50,88)], будут соответственно равны:

$$\Delta\mathcal{E}_3=\frac{Rh}{2n^2}\frac{\alpha^2}{n}\left(+\frac{1}{2}\delta_{l0}\frac{3}{8}\frac{j(j+1)-l(l+1)-s(s+1)}{l\left(l+\frac{1}{2}\right)(l+1)}(1-\delta_{l0})\right), \quad (50,98)$$

$$\Delta\mathcal{E}_4=\frac{Rh}{2n^2}\frac{\alpha^2}{n}\frac{2s(s+1)-3}{3}\delta_{l0}+$$
$$+\frac{Rh}{2n^2}\frac{\alpha^2}{n}\frac{s(s+1)}{16l(l+1)\left(l+\frac{1}{2}\right)}(1-\delta_{l0})\begin{cases}2; & j=l,\\ -\dfrac{l+1}{l-\frac{1}{2}}; & j=l-1,\\ -\dfrac{l}{l+\frac{3}{2}}; & j=l+1.\end{cases} \quad (50,99)$$

Наконец, энергия $\Delta\mathcal{E}_5$ [см. (50,94)], обусловленная специфическим обменным взаимодействием электрона и позитрона (взаимодействием Баба), будет равна:

$$\Delta\mathcal{E}_5=\frac{Rh}{2n^2}\frac{\alpha^2}{2n}s(s+1)\delta_{l0}. \quad (50,100)$$

Энергетический спектр атома позитрония в общем виде может быть представлен формулой[1])

$$\mathcal{E}=-\frac{Rh}{2n^2}+\Delta\mathcal{E}^{0,1}, \quad (50,101)$$

$$\Delta\mathcal{E}^{0,1}=\Delta\mathcal{E}_1+\Delta\mathcal{E}_2+\Delta\mathcal{E}_3+\Delta\mathcal{E}_4+\Delta\mathcal{E}_5=\frac{Rh}{2n^2}\frac{11\alpha^2}{16n^2}+\frac{Rh}{2n^2}\frac{4\alpha^2}{n}\varepsilon^{0,1}, \quad (50,102)$$

причем ε^0 относится к парапозитронию:

$$\varepsilon^0=-\frac{1}{4\left(l+\frac{1}{2}\right)}, \quad (50,103)$$

---

[1]) А. А. Соколов и В. Н. Цытович, ЖЭТФ **24**, 253 (1953). В более ранних работах, посвященных этому вопросу [см. В. Б. Берестецкий, ЖЭТФ **19**, 1130 (1949); R. Ferrell, Phys. Rev. **84**, 858 (1951)], содержится ряд неточностей, которые привели к тому, что в окончательных формулах некоторые численные коэффициенты оказались неправильными.

а ε^1 — к ортопозитронию:

$$\varepsilon^1 = \varepsilon^0 + \frac{7}{12}\delta_{l0} + \frac{(1-\delta_{l0})}{8\left(l+\frac{1}{2}\right)} \begin{cases} -\dfrac{1}{l(l+1)}; & j=l, \\ -\dfrac{3l-1}{l(2l-1)}; & j=l-1, \\ \dfrac{3l+4}{(l+1)(2l+3)}; & j=l+1. \end{cases} \quad (50,104)$$

В наинизшем энергетическом состоянии ($n=1$) уровень, соответствующий парапозитронию ($j=0$), согласно последним формулам равен:

$$\mathscr{E}^0 = -\frac{Rh}{2} - \frac{21}{32} Rh\alpha^2.$$

В этом случае возможно лишь одно состояние ортопозитрония ($j=l+1=1$), энергия которого равна

$$\mathscr{E}^1 = \mathscr{E}^0 + \frac{7}{6} Rh\alpha^2. \quad (50,105)$$

Таким образом, разность энергетических уровней ортосостояния ($\mathscr{E}^1$) и парасостояния ($\mathscr{E}^0$) в этом случае равна:

$$\Delta\nu = \frac{\Delta\mathscr{E}'}{h} = \frac{\mathscr{E}^1 - \mathscr{E}^0}{h} = \frac{7}{6} R\alpha^2 = 2,044 \cdot 10^5 \text{ мггц}. \quad (50,106)$$

Это расщепление складывается из расщеплений от спин-спинового взаимодействия (50,99)

$$\Delta\mathscr{E}'_4 = \frac{2}{3} Rh\alpha^2 \quad (50,107)$$

и от обменного взаимодействия Баба (50,100)

$$\Delta\mathscr{E}'_5 = \frac{1}{2} Rh\alpha^2. \quad (50,108)$$

Разность уровней между наинизшими состояниями орто- и парапозитрония была обнаружена экспериментально.

Одними из первых опытов, посвященных измерению этого расщепления $\Delta\mathscr{E}'$ (50,106), были опыты Дёйча и Дулита [1]). Они исследовали влияние магнитного поля на время жизни ортопозитрония, который, как мы уже указывали, распадается трехфотонным путем.

Оказалось, что если ортопозитроний поместить в магнитное поле H, то он частично превращается в парапозитроний, с последующей практически мгновенной двухфотонной аннигиляцией. Доля атомов ортопозитрония, превращающихся в парапозитроний, определяется выражением

$$w = \left(\frac{2\mu_0 H}{\Delta\mathscr{E}'}\right)^2, \quad (50,109)$$

[1]) M. Deutsh and E. Dulit, Phys. Rev. 84, 601 (1951).

где $\Delta\mathscr{E}'$ может быть найдено по формуле (50,106). Определяя экспериментально величину w и зная значения μ_0 и H, авторы нашли значения $\Delta\mathscr{E}'$, весьма близкие к теоретическому. Во всяком случае, эти опыты доказали существование обменных сил Баба в атоме позитрония.

Более поздние опыты по определению тонкой структуры атома позитрония [1]) дали для $\Delta\nu$ значение

$$\Delta\nu_{\text{эксп}} = (2{,}032 \pm 0{,}003) \cdot 10^5 \textit{ мггц}, \qquad (50{,}110)$$

несколько меньшее теоретического.

Однако, как показали Карплус и Клейн [2]), если учесть радиационные поправки, то формула (50,106) для указанного сдвига уровней несколько уточняется:

$$\Delta\nu_{\text{теор}} = \frac{\Delta\mathscr{E}'}{h} = \alpha^2 R\left[\frac{7}{6} - \frac{\alpha}{\pi}\left(\frac{16}{9} + \ln 2\right)\right] = 2{,}0337 \cdot 10^5 \textit{ мггц},$$

и находится в хорошем согласии с результатами экспериментов Дёйча и Брауна [1]).

Наконец, Фултону и Мартину [3]) удалось определить радиационные поправки к уровням $n = 2$ с учетом членов порядка α^3.

§ 51. Мезоатомы

а) Спектр μ^--мезоатомов. Отрицательный мезон при прохождении сквозь вещество, теряя свою энергию, может быть захвачен на орбиту ядра [4]), образуя мезоатом, т. е. атом, в котором электрон замещен мезоном.

Мезоатомы были открыты в классических экспериментах Пиччони и др. [5]). В настоящее время известны как π^--мезоатомы [6]), так и μ^--мезоатомы [7]).

Остановимся более подробно на μ^--мезоатомах, которые исследованы [7]) фактически вдоль всей периодической системы (от $Z = 1$ до $Z = 93$).

---

[1]) M. Deutsh and S. Brown, Phys. Rev. **85**, 1047 (1952).

[2]) R. Karplus and A. Klein, Phys. Rev. **87**, 848 (1952).

[3]) T. Fulton and P. Martin, Phys. Rev. **93**, 903 (1954).

[4]) S. Tomonaga and G. Araki, Phys. Rev. **58**, 90 (1940); E. Fermi and E. Teller, Phys. Rev. **72**, 399 (1947); см. также обзор Д. Д. Иваненко и Г. Е. Пустовалов, УФН **61**, 27 (1957), в котором приведена обширная литература по мезоатомам.

[5]) M. Conversi, E. Pancini and O. Piccioni, Phys. Rev. **71**, 209 (1947).

[6]) M. Comak, A. McGuire, J. Platt and H. Schulte, Phys. Rev. **88**, 134 (1952).

[7]) V. Fitch and J. Rainwater, Phys. Rev. **92**, 789 (1953); русский перевод см. в. сб. «Проблемы современной физики» № 5, 85 (1956).

Время жизни μ^--мезоатома определяется двумя конкурирующими процессами, а именно, естественным распадом μ^--мезона на электрон, нейтрино и антинейтрино и ядерным захватом μ^--мезона. В легких мезоатомах ($Z<10$) вероятность первого процесса больше вероятности второго (напомним, что μ^--мезоны являются ядерно-неактивными частицами). В этом случае время жизни мезоатома будет определяться временем жизни покоящегося мезона ($\tau = 2{,}22 \cdot 10^{-6}$ *сек*). При $Z > 10$ начинает преобладать ядерный захват, так что время жизни тяжелых мезоатомов медленно уменьшается до величины, равной примерно $7 \cdot 10^{-8}$ *сек* ($Z = 82$). π^--мезоны являются ядерно-активными частицами, и поэтому время поглощения их с орбиты ядром имеет порядок 10^{-10} *сек*. Напомним, что время жизни свободного покоящегося π^--мезона, распадающегося на μ^--мезон и нейтрино, равно $2{,}6 \cdot 10^{-8}$ *сек*.

В теории μ^--мезоатомов основную роль играет обычное электромагнитное взаимодействие. Поэтому в первом приближении к μ^--мезоатомам можно применить теорию Бора водородоподобного атома.

Согласно этой теории в случае точечного ядра энергия и радиус μ^--мезоатома должны определяться соответственно выражениями:

$$\mathcal{E}_n = -\frac{\alpha^2}{2} m_\mu c^2 \frac{Z^2}{n^2}, \quad a_n = \frac{\hbar}{\alpha m_\mu c} \frac{n^2}{Z}, \tag{51,1}$$

где $m_\mu = 207 m_0$ — масса μ^--мезона.

Отсюда видно, что радиус μ^--мезонной орбиты меньше соответствующей электронной орбиты в $m_\mu/m_0 = 207$ раз. Энергия мезонов увеличивается во столько же раз. Поэтому электроны, движущиеся значительно дальше от ядра, не могут оказать существенного влияния на вращающийся вокруг ядра мезон, и фактически возникает водородоподобный мезоатом с большим Z. Благодаря этому энергия связи в мезоатоме по сравнению с обычным атомом водорода возрастает в $207\, Z^2$ раз.

Формулой (51,1) мы можем пользоваться только в том случае, когда радиус мезонной орбиты будет больше радиуса ядра, который имеет порядок

$$R_N \cong \frac{\hbar}{m_\mu c} A^{1/3} \cong \frac{\hbar}{m_\mu c} (2Z)^{1/3}. \tag{51,2}$$

Полагая в формуле (51,1) $n = 1$, мы найдем уравнения для определения критического значения $Z_{\text{кр}}$, при котором теория Бора перестает быть справедливой:

$$\frac{\hbar}{m_\mu c} \frac{1}{\alpha Z_{\text{кр}}} \cong \frac{\hbar}{m_\mu c} (2Z_{\text{кр}})^{1/3}. \tag{51,3}$$

Отсюда находим, что $Z_{\text{кр}} = 30$.

Предполагая, что электрический заряд равномерно распределен внутри атомного ядра радиуса R_N, мы найдем, что потенциальная энергия взаимодействия μ^--мезона с ядром (рис. 29)

$$U = -\frac{Ze^2}{R_N}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\frac{r^2}{R_N^2}\right) \quad \text{при} \quad r \leqslant R_N, \tag{51,4}$$

$$U = -\frac{Ze^2}{r} \quad \text{при} \quad r \geqslant R_N, \tag{51,4a}$$

где r — радиус-вектор.

При $a_n \gg R_N$ мы можем пользоваться боровской теорией. Учет размеров ядра дает лишь небольшие поправки. Энергия излучения γ-кванта согласно (51,1) в основном определяется обычной формулой серии Бальмера:

$$\hbar\omega = \mathcal{E}_n - \mathcal{E}_{n'} = \frac{\alpha^2}{2} m_\mu c^2 Z^2 \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2}\right), \tag{51,5}$$

где n — главное квантовое число, характеризующее начальное состояние, а n' соответствует конечному состоянию μ^--мезоатома. В частности, при переходе μ^--мезона с уровня $2p$ на уровень $1s$ мы будем иметь:

$$\mathcal{E}_{2p} - \mathcal{E}_{1s} = m_\mu c^2 \frac{3}{8} \alpha^2 Z^2. \tag{51,6}$$

Дополнительная энергия, связанная с учетом конечного значения радиуса R_N ядра, будет в этом случае определяться выражением

$$\Delta\mathcal{E} = Ze^2 \oint d\Omega \int_0^{R_N} |\psi|^2 \left[-\frac{1}{R_N}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\frac{r^2}{R_N^2}\right) + \frac{1}{r}\right] r^2\, dr. \tag{51,7}$$

В частности, для s-состояний волновая функция имеет вид

$$\psi = \frac{n^{3/2}}{\sqrt{\pi a_n^3}} e^{-nr/a_n}. \tag{51,7a}$$

Поскольку $R_N < a_n$, в формуле (51,7) мы можем положить $\psi \cong \sqrt{n^3/\pi a_n^3}$. Тогда

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{2}{5}\frac{Ze^2 n^3}{a_n^3} R_N^2.$$

Отсюда для энергии s-состояний мы найдем:

$$\mathcal{E}'_{n0} = \mathcal{E}_{n0}\left(1 - \frac{4n^3}{5}\left(\frac{R_N}{a_n}\right)^2\right), \tag{51,8}$$

где значение $\mathcal{E}_n$ определяется выражением (51,1). Принимая во внимание, что R_N/a_n пропорционально $Z^{4/3}$, мы найдем, что относительная величина сдвига уровня будет пропорциональна $Z^{8/3}$.

Для p- и т. д. состояний сдвиг уровня будет еще в $(R_N/a)^2$ и т. д. раз меньше, так что практически им можно пренебречь. Из (51,8) видно, что учет конечных размеров ядра сдвигает s-уровни вверх относительно p-уровней (см. рис. 30).

В другом крайнем случае ($a_u \gg R_N$) основная часть энергии будет определяться потенциалом (51,4). В этом случае мы будем иметь трехмерный гармонический осциллятор, описывающийся волновым уравнением

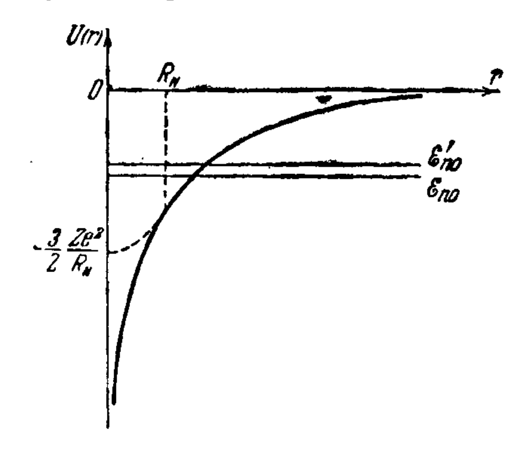


Рис. 29. Изменение потенциала в мезоатоме. Сплошная линия — потенциал точечного заряда. Пунктирная линия — учет конечных размеров ядра, сказывающихся при $r < R_N$, $\mathscr{E}_{n0}$ — уровень энергии мезоатома при наличии точечного взаимодействия, $\mathscr{E}'_{n0}$ — при учете конечных размеров ядра.

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} + \left[\frac{2m_\mu}{\hbar^2}\left(\mathscr{E}' - \frac{Ze^2}{2a^3}r^2\right) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]R = 0,$$

где R — радиальная часть волновой функции, l — орбитальное квантовое число, $\mathscr{E}$ — энергия мезона, а

$$\mathscr{E}' = \mathscr{E} + \frac{3}{2}\frac{Ze^2}{R_N}.$$

Как известно, энергия сферического осциллятора равна

$$\mathscr{E}_{nl} = -\frac{3}{2}\frac{Ze^2}{R_N} + 2\hbar\sqrt{\frac{Ze^2}{m_\mu R_N^3}} \times \left(n - \frac{l}{2} - \frac{1}{4}\right). \quad (51,9)$$

Последнее выражение справедливо в предположении, что потенциальная энергия меняется по закону (51,4) от нуля до бесконечности; это имеет место для очень больших Z. Учет конечных размеров ядра в формуле (51,9) дает дополнительную энергию, аналогичную дополнительной энергии (51,7):

$$\Delta\mathscr{E} = Ze^2 \oint d\Omega \int_{R_N}^{\infty} |\psi|^2 \left[-\frac{1}{r} + \frac{1}{R_N}\left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R_N^2}\right)\right] r^2\,dr. \quad (51,9\text{a})$$

Так как волновая функция ψ сферического осциллятора при $r \to \infty$ будет содержать экспоненциальный множитель, то поэтому при $a_n \ll R_N$ добавка (51,9а) будет вообще сравнительно мала. Поскольку мы не входим в детали теории, то ее в дальнейшем принимать во внимание не будем.

Между прочим, из (51,9) следует, что в мезоатоме уровень $2s$ ($n = 2$, $l = 0$) должен лежать выше уровня $2p$ ($n = 2$, $l = 1$).

При переходе с уровня $2p$ на уровень $1s$ найдем из (51,9) вместо (51,6) следующее выражение для энергии излучаемого γ-кванта:

$$\hbar\omega = \mathscr{E}_{2p} - \mathscr{E}_{1s} \cong \hbar \sqrt{\frac{Ze^2}{m_\mu R_N^3}}.$$

Учитывая в первом приближении соотношение (51,2), будем иметь:

$$\mathscr{E}_{2p} - \mathscr{E}_{1s} \cong m_\mu c^2 \left(\frac{Z}{A}\alpha\right)^{1/2}. \qquad (51,10)$$

Формулы (51,6) и (51,10) определяют два предельных значения энергии излучения γ-кванта при переходе мезоатома из состояния $2p$ в состояние $1s$.

В качестве примера применим наши формулы к мезоатому свинца ($Z=82$). В случае точечного ядра вычисление по формуле (51,6) для энергии перехода $2p$—$1s$ дает приблизительно значение 12 *Мэв* [1]). Когда же μ^--мезонная орбита находится внутри ядра, при этом переходе найдем по формуле (51,10) для энергии γ-кванта значение 5,5 *Мэв*. Экспериментальные данные Фитча и Рэйнуотера дают для этого перехода значение 6,02 *Мэв*. Таким образом, второй случай (51,10) ближе к истине, чем первый [см. (51,6)]. Это связано с тем обстоятельством, что вычисленный по формуле (51,1) радиус первой орбиты ($n=1$) мезоатома свинца $a_1 = 3{,}07 \cdot 10^{-13}$ *см* меньше радиуса ядра, а радиус второй орбиты ($n=2$) $a_2 = 1{,}23 \cdot 10^{-12}$ *см* — чуть больше радиуса ядра. Отсюда также видно, что тяжелые мезоатомы излучают γ-кванты с энергией в несколько *Мэв*. Более легкие мезоатомы излучают рентгеновские лучи.

Существенное влияние размеров ядра на спектры тяжелых мезоатомов дало возможность с помощью экспериментального изучения спектральных закономерностей определить размеры ядра. При этом оказалось, что в формуле для радиусов ядер [см. (51,2)]

$$R_N = R_0 A^{1/3} \text{ см}$$

следует положить $R_0 = 1{,}2 \cdot 10^{-13}$ *см* вместо обычно принятого $R_0 = 1{,}4 \cdot 10^{-13}$ *см*. Интересно отметить, что изучение рассеяния быстрых электронов ядрами также приводит [2]) к тому же значению R_0, в то

---

[1]) Учет дираковской тонкой структуры повышает эту цифру при переходе $2p_{3/2} - 1s_{1/2}$ до 16,41 *Мэв*. Существенная роль релятивистских и спиновых эффектов связана с тем обстоятельством, что разложение энергии идет по величине $Z\alpha$. Таким образом, тяжелые мезоатомы ($Z \gg 1$) по характеру взаимодействия приближаются к сильной связи (см. предисловие), подчиняясь в то же самое время в основном электромагнитному взаимодействию.

[2]) R. Pidd and C. Hammer, Phys. Rev. **99**, 1396 (1955), русский перевод см. в сб. «Проблемы современной физики», № 5, 26 (1956); B. Hahn, D. Ravenhall and R. Hofstadter, Phys. Rev. **101**, 1131 (1956).

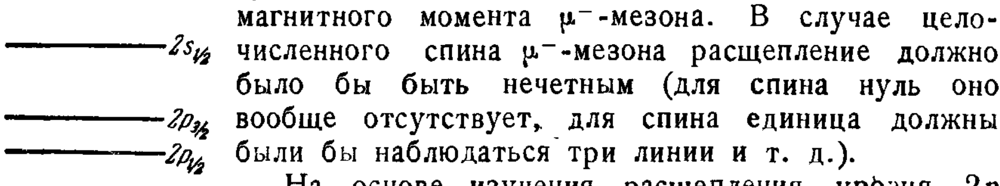
время как изучение рассеяния нейтронов с не очень большими энергиями дает для R_0 несколько бо́льшее значение $\left(R_0 = 1{,}4 \cdot 10^{-13}\ см\right)$.

Для объяснения этого неожиданного расхождения в значениях радиусов ядер было предложено несколько соображений.

Во-первых, можно предположить, что плотности распределения протонов и нейтронов в ядре различны. В частности, для объяснения этого расхождения следует считать, что протоны занимают меньший объем, что нейтроны, т. е. средняя плотность распределения протонов в ядрах выше средней плотности распределения нейтронов.

Во-вторых, можно предположить, что плотности распределения протонов и нейтронов одинаковы, но радиус действия ядерного потенциала превышает радиус истинной плотности распределения нуклонов [более подробно см. [1])].

Изучение мультиплетной структуры уровня $2p$ в мезоатомах является весьма существенным подспорьем для определения спина и магнитного момента μ^--мезона. В случае целочисленного спина μ^--мезона расщепление должно было бы быть нечетным (для спина нуль оно вообще отсутствует, для спина единица должны были бы наблюдаться три линии и т. д.).



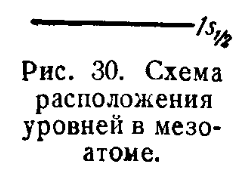


Рис. 30. Схема расположения уровней в мезоатоме.

На основе изучения расщепления уровня $2p$ было окончательно установлено, что спин μ^--мезона равен $^1/_2$, так как уровень $2p$ расщепляется на два: $2p_{1/2}$ и $2p_{3/2}$. В случае точечного ядра Pb ($Z = 82$) теоретическое расщепление должно было бы составлять 0,55 *Мэв*. При учете конечного радиуса ядра оно снижается до 0,2 *Мэв*, что находится в хорошем согласии с экспериментальными данными. Найденная по (51,9) схема распределения уровней в тяжелых мезоатомах представлена на рис. 30.

Как известно, множитель Ланде g при определении магнитного момента для частиц спина $^1/_2$ должен быть равен двум. Благодаря учету электрон-позитронного вакуума для электрона он становится несколько больше 2. Магнитные моменты нейтрона и протона сильно отличаются от значений, найденных из уравнений Дирака $\left(\mu_N = e\hbar/2Mc,\ M\right.$ — масса нуклона, μ_N — ядерный магнетон$\left.\right)$, на величину, равную нескольким ядерным магнетонам μ_N [2]) (заметим, что для нейтрона магнитный момент должен вообще быть равен нулю, так как $e_n = 0$). Это расхождение объясняется сильной связью нуклонов с π-мезонным полем. В противоположность нуклонам μ^--мезон не обладает такой сильной связью с другими полями, и

[1]) L. Cooper, Suppl. Nuovo Cim. 4, 1125 (1956).

[2]) Согласно экспериментальным данным магнитные моменты протона и нейтрона равны соответственно $\mu_p = 2{,}79\mu_N$, $\mu_n = -1{,}91\mu_N$.

поэтому его магнитный момент должен быть близок к соответствующему μ^--мезонному магнетону.

Наконец, следует заметить, что теория π^--мезоатомов не может быть построена на основе лишь электромагнитных взаимодействий. Существенная роль в теории этих атомов должна принадлежать также и мезодинамике, которая, как мы уже отмечали, еще далека от своего завершения.

В связи с этим экспериментальное изучение π^--мезоатомов и построение полуэмпирических теорий приобретают особое значение в создании будущей теории ядерных сил. Все эти вопросы выходят за рамки нашей монографии, и поэтому за подробностями, связанными с π^--мезоатомами, мы отсылаем читателя к соответствующим обзорным статьям [1]).

б) Влияние поляризации вакуума на сдвиг уровней в мезоатомах [2]). Как было показано в § 46, п. л), лэмбовский сдвиг энергетических уровней электронов в атоме в основном обязан взаимодействию электрона с флуктуациями электромагнитного поля, поляризация же вакуума дает приблизительно 0,04 значения этого сдвига.

В мезоатоме на энергетические уровни также должны оказывать влияние и флуктуационные члены, и поляризация μ^--мезонного вакуума. Соответствующая энергия, обратно пропорциональная квадрату массы мезона [см. (42,25)], в которую вместо массы электрона следует подставить массу мезона, дает сравнительно небольшую поправку к сдвигу уровней.

Значительно бóльшая поправка вызывается поляризацией электрон-позитронного вакуума, изменяющей электростатический потенциал ядра независимо от массы μ^--мезона. Согласно (45,24) энергия взаимодействия отрицательного заряда $e^- = -e$ с внешним потенциалом при учете электрон-позитронного вакуума должна определяться выражением

$$U = -e\left(\Phi - \frac{\alpha}{15\pi}\frac{\nabla^2}{k_0^2}\Phi\right), \qquad (51,11)$$

где $\hbar k_0/c = m_0$ — масса электрона.

В дополнительной энергии взаимодействия (51,11), с одной стороны, учтены лишь члены, пропорциональные α (это приближение пригодно также и для мезоатомов, так как заряд ядра в явном виде в (51,11) не фигурирует), а с другой стороны, она представляет собою первый член разложения по параметру $(\nabla/k_0)^2$.

Значение этого параметра имеет порядок $(1/a_n k_0)^2$, где a_n — радиус орбиты в атоме. В случае обычного атома $a_n k_0 \gg 1$, и поэтому мы

---

[1]) Д. Иваненко и Г. Пустовалов, УФН **61**, 27 (1957); S. De Benedetti, Suppl. Nuovo Cim. **4**, 1209 (1956).

[2]) А. Д. Галанин и И. Я. Померанчук, ДАН СССР **86**, 251 (1952); L. Foldy and E. Eriksen, Phys. Rev. **95**, 1048 (1954).

можем ограничиться лишь первым членом разложения. В мезоатомах же эта величина имеет в лучшем случае порядок единицы, а в ряде случаев становится даже больше единицы. Поэтому для них это приближение явно не годится, и мы должны прежде всего найти обобщение формулы (51,11) на случай произвольных значений произведения $a_n k_0$. Для этого воспользуемся методом, разработанным в [1]).

Уравнение Дирака для свободных частиц имеет вид:

$$D\psi_0 = 0. \tag{51,12}$$

При отсутствии электронов и позитронов мы должны считать состояния с отрицательной энергией занятыми, и поэтому волновая функция ψ_0 будет равна [см. (20,17) при $\varepsilon = -1$]:

$$\psi_0 = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{k,s} C(\boldsymbol{k}, s, -1)\, b(\boldsymbol{k}, s, -1)\, e^{icKt + i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}. \tag{51,13}$$

Амплитуды C будут удовлетворять квантовым соотношениям:

$$C^+(\boldsymbol{k}', s', -1)\, C(\boldsymbol{k}, s, -1) = \delta_{kk'}\delta_{ss'}. \tag{51,14}$$

При включении внешнего электростатического потенциала, который мы представим в виде разложения в ряд Фурье:

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{L^3} \sum_{\varkappa} \Phi(\boldsymbol{\varkappa})\, e^{i\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{r}}, \tag{51,15}$$

появится новая часть волновой функции ψ_1, пропорциональная Φ. Эта последняя может быть найдена из уравнения

$$D\psi_1 = -e\Phi\psi_0.$$

Используя правило деления на оператор (26,41), мы найдем:

$$\psi_1 = -D^{-1} e\Phi\psi_0 = -\frac{e}{c\hbar L^{9/2}} \sum_{k,\varkappa,s} \Phi(\boldsymbol{\varkappa}) \frac{2K - \alpha\varkappa}{\varkappa^2 + 2\boldsymbol{k}\boldsymbol{\varkappa}} \times$$
$$\times C(\boldsymbol{k}, s, -1)\, b(\boldsymbol{k}, s, -1)\, e^{icKt + i\boldsymbol{r}(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{\varkappa})}. \tag{51,16}$$

Отсюда для дополнительной плотности заряда, индуцированной внешним потенциалом Φ, имеем выражение:

$$\rho^{\text{вак}} = -e\left(\psi_1^+\psi_0 + \psi_0^+\psi_1\right) = \frac{\alpha}{L^6} \sum_{\varkappa,k} \Phi(\boldsymbol{\varkappa})\, e^{i\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{r}} \frac{4K^2 + 2(\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{k})}{K(\varkappa^2 + 2(\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{k}))} + \text{к.-с.}, \tag{51,17}$$

где под «к.-с.» мы понимаем комплексно-сопряженную величину.

---

[1]) Д. Д. Иваненко и А. А. Соколов, Sow. Phys. 11, 590 (1937).

При выводе последнего соотношения мы учли равенство (51,14), а также значение шпура:

$$\sum_{s} b^{+}(\boldsymbol{k}, s, -1)(2K-(\boldsymbol{\alpha\varkappa}))\, b(\boldsymbol{k}, s, -1) =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{Sp}(2K-(\boldsymbol{\alpha\varkappa}))\left(1-\frac{(\boldsymbol{\alpha k})+\rho_3 k_0}{K}\right)=\frac{4K^2+2(\boldsymbol{\varkappa k})}{K}. \qquad (51{,}18)$$

В выражении (51,17) при суммировании по вектору $\boldsymbol{k}$ сделаем замену $\boldsymbol{k}\to\boldsymbol{k}-\frac{\boldsymbol{\varkappa}}{2}$. Тогда, переходя к интегрированию по новой переменной $\boldsymbol{k}$, найдем[1]:

$$\rho^{\text{вак}} = \frac{a}{L^3}\sum_{\boldsymbol{\varkappa}} \Phi(\boldsymbol{\varkappa})\, e^{i\boldsymbol{\varkappa r}}\, I(\varkappa), \qquad (51{,}19)$$

где

$$I(\varkappa)=\frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\infty} k^2\,dk\left[\frac{1}{L_0}\left(2-\frac{\varkappa^2}{2L_0^2}\right)\int_0^1\frac{dx}{bx}\left[(1-bx)^{-1/2}-(1+bx)^{-1/2}\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{L_0}\int_0^1 dx\left[(1-bx)^{-1/2}+(1+bx)^{-1/2}\right]\right]. \qquad (51{,}20)$$

---

[1]) Не зависящий от времени внешний вектор-потенциал

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{L^3}\sum_{\boldsymbol{\varkappa}} A(\varkappa)\, e^{i\boldsymbol{\varkappa r}}$$

должен создавать вакуумный ток $j^{\text{вак}}$.

Аналогичные вычисления [см. также (45,19в)] приводят к следующему значению этого тока:

$$j^{\text{вак}}=\frac{a}{L^3}\sum_{\boldsymbol{\varkappa}} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\varkappa})\, e^{i\boldsymbol{\varkappa r}}\,(I_1(\varkappa)+I(\varkappa)),$$

где согласно (45,19в)

$$I_1(\varkappa)=f_{-2}I_{-2}+f_0 I_0',$$

а $I(\varkappa)$ определяется формулой (51,20). Здесь f_{-2} и f_0 — некоторые функции импульса и вектор-потенциала $\boldsymbol{A}$, а значения интегралов I_{-2} и I_0' определяются формулами (44,42а) и (44,42в), т. е. дают не только калибровочно-неинвариантное (так как в скалярном потенциале соответствующий член отсутствует), но и расходящееся выражение.

Используя регуляризацию Паули—Вилларса (44,44а) и (44,44в), мы обратим эти члены в нуль. Оставшаяся часть, пропорциональная $I(\varkappa)$, будет обладать необходимыми свойствами калибровочной инвариантности, и, как будет показано ниже, логарифмически расходится только первый член, а остальные члены разложения по $(\nabla/k_0)^2$ остаются конечными.

Здесь мы приняли во внимание, что для вещественного поля $\Phi^+(\varkappa) = \Phi(-\varkappa)$. Кроме того, мы ввели следующие обозначения:

$$L_0 = \sqrt{k^2 + k_0^2 + \frac{\varkappa^2}{4}}, \qquad b = \frac{k\varkappa}{L_0^2}. \tag{51,21}$$

При вычислении интеграла (51,20) подставим в него разложение:

$$(1 \mp \alpha)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \alpha^n (\pm 1)^n, \tag{51,22}$$

где

$$B_n = \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n+1)}{2 \cdot 4 \ldots 2n} \frac{1}{2n+1} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}. \tag{51,23}$$

Тогда после интегрирования по переменной $x = (k\varkappa)/k\varkappa = \cos\theta$ найдем:

$$I(\varkappa) = \sum_{\nu=0}^{\infty} I_\nu(\varkappa),$$

где

$$I_0(\varkappa) = -\frac{\varkappa^2}{4\pi^2}\left[\int_0^\infty \frac{k^2\,dk}{L_0^3} - \frac{1}{3}\int_0^\infty \frac{k^4}{L_0^5}\,dk\right], \tag{51,24}$$

$$I_\nu(\varkappa) = -\frac{\varkappa^{2\nu+2}}{2\pi^2} B_{2\nu+1}\left[\frac{1}{2\nu+1}\int_0^\infty \frac{k^{2\nu+2}}{L_0^{4\nu+3}}\,dk - \frac{4\nu+3}{(2\nu+3)^2}\int_0^\infty \frac{k^{2\nu+4}}{L_0^{4\nu+5}}\,dk\right]. \tag{51,25}$$

В этих равенствах коэффициент $I_0(\varkappa)$ мы выделили особо, так как он содержит логарифмически расходящийся член, связанный с полевой частью заряда. В самом деле, с помощью равенства (45,19) легко показать, что

$$I_0 = -\frac{\varkappa^2}{6\pi^2}\left(\int_0^\infty \frac{dk}{L_0} - \frac{5}{6}\right). \tag{51,26}$$

Как известно, полевая часть заряда не может быть найдена экспериментально и поэтому должна быть исключена с помощью перенормировки заряда. Согласно (45,21) соответствующая часть I_0^∞ будет равна:

$$I_0^\infty = -\frac{\varkappa^2}{6\pi^2}\left(\int_0^\infty \frac{dk}{K} - \frac{5}{6}\right).$$

Поэтому регуляризованная часть $I_0^{\text{рег}}$, которая, как мы только что отметили, будет удовлетворять калибровочному условию, равна:

$$I_0^{\text{рег}} = I_0 - I_0^\infty = \frac{\varkappa^2}{12\pi^2}\ln\left(1 + \frac{\varkappa^2}{4k_0^2}\right).$$

Для вычисления остальных значений I_ν ($\nu=1, 2, 3, \ldots$) воспользуемся соотношением

$$\int_0^\infty \frac{k^{2n}\,dk}{L_0^{2n+2s+3}}=\frac{1}{\left(k_0^2+\frac{\varkappa^2}{4}\right)^{s+1}}\frac{2^{-s}s!\,(2n)!\,(n+s)!}{n!\,(2n+2s+1)!}. \qquad (51,27)$$

Тогда легко показать, что:

$$I_\nu(\varkappa)=-\frac{1}{2\pi^2}\frac{\varkappa^{2\nu+2}}{\left(4k_0^2+\varkappa^2\right)^\nu}\frac{1}{2\nu(2\nu+1)(2\nu+3)}.$$

Поэтому окончательно выражение для $I^{\text{рег}}(\varkappa)$ мы можем записать в виде

$$I^{\text{рег}}(\varkappa)=\frac{\varkappa^4}{4\pi^2k_0^2}f\left(\frac{\varkappa^2}{4k_0^2}\right), \qquad (51,28)$$

где

$$f(\xi)=\frac{1}{12\xi}\ln(1+\xi)-\sum_{\nu=1}^\infty\frac{1}{4\nu(2\nu+1)(2\nu+3)}\frac{\xi^{\nu-1}}{(1+\xi)^\nu}. \qquad (51,29)$$

Разлагая функцию $f(\xi)$ в ряд по степеням ξ, можно показать (после элементарных, но довольно длинных вычислений), что[1])

$$f(\xi)=\sum_{\nu=0}^\infty(-1)^\nu\frac{\nu!\,(\nu+2)!\,2^{2\nu}}{(2\nu+3)!\,(2\nu+5)}\xi^\nu. \qquad (51,30)$$

С помощью (51,27) ряд (51,30) можно записать в виде

$$f(\xi)=\frac{1}{6}\sum_{\nu=0}^\infty(-1)^\nu\xi^\nu\int_0^\infty dx\left[\frac{x^2}{(x^2+1)^{\frac{2(\nu+1)+3}{2}}}+\frac{x^2}{2(x^2+1)^{\frac{2(\nu+2)+3}{2}}}\right]. \qquad (51,30\text{a})$$

Подставляя (51,30а) в (51,28), будем иметь:

$$I^{\text{рег}}(\varkappa)=\frac{\varkappa^4}{4\pi^2k_0^2}f(\xi)=\varkappa^4\frac{1}{6\pi^2}\frac{1}{4k_0^2}\sum_{\nu=0}^\infty(-1)^\nu\xi^\nu\int_1^\infty\frac{dy}{y^{4+2\nu}}\left(1+\frac{1}{2y^2}\right)\sqrt{y^2-1}. \qquad (51,31)$$

Последнее выражение легко может быть просуммировано по ν:

$$f(\xi)=\frac{2k_0^2}{3}\int_1^\infty\frac{1}{\varkappa^2+4k_0^2y^2}\left(1+\frac{1}{2y^2}\right)\frac{\sqrt{y^2-1}}{y^2}\,dy. \qquad (51,32)$$

---

[1]) В тождественности рядов (51,29) и (51,30) можно легко убедиться, если сравнить друг с другом несколько первых членов разложения.

Тогда для дополнительного потенциала, возникающего от поляризации вакуума, получаем после регуляризации следующее выражение:

$$\Phi^{\text{вак}} = -4\pi\nabla^{-2}\rho^{\text{вак}} = \frac{\alpha}{\pi k_0^2 L^3}\sum_{\varkappa}\Phi(\varkappa)\,\varkappa^2 e^{i\varkappa r} f, \tag{51,33}$$

или, принимая во внимание, что из соотношения (51,15) следует

$$\varkappa^2\Phi(\varkappa) = -\int e^{-i\varkappa r'}\nabla'^2\Phi(r')\,d^3x',$$

найдем:

$$\Phi^{\text{вак}} = -\frac{\alpha}{6\pi^2}\int K(r-r')\,\nabla'^2\Phi(r')\,d^3x', \tag{51,34}$$

где

$$K(r-r') = \frac{3}{4\pi^2 k_0^2}\int d^3\varkappa\, e^{i\varkappa(r-r')} f. \tag{51,35}$$

Подставляя в (51,35) разложение (51,32), получим после интегрирования по $\varkappa$ (см., например, [1]))

$$K(R) = \int_1^{\infty}\frac{e^{-2k_0 R y}}{R}\left(1+\frac{1}{2y^2}\right)\frac{\sqrt{y^2-1}}{y^2}\,dy. \tag{51,36}$$

Как видно из формулы (51,30), в первом приближении имеем:

$$f_0 = \frac{1}{15}, \tag{51,37}$$

т. е.

$$K_0(r-r') = \frac{2\pi}{5k_0^2}\,\delta(r-r'). \tag{51,38}$$

Для дополнительного потенциала в этом случае будем иметь старое приближенное выражение (45,22). Как уже было отмечено, это приближение пригодно только для обычных атомов, когда параметр разложения $\nabla^2/k_0^2 \sim 1/(a_n k_0)^2$ является малой величиной. Орбиты же мезоатомов не удовлетворяют этому условию, и поэтому для определения дополнительного потенциала мы должны пользоваться выражением (51,34).

При учете поляризации электрон-позитронного вакуума энергия взаимодействия орбитального μ-мезона заряда $e^- = -e$ с кулоновским полем точечного ядра $\Phi = Ze/r$ принимает вид

$$U = -\frac{Ze^2}{r}\left[1+\frac{2\alpha}{3\pi}\int_1^{\infty} e^{-2k_0 y r}\left(1+\frac{1}{2y^2}\right)\frac{\sqrt{y^2-1}}{y^2}\,dy\right]. \tag{51,39}$$

---

[1]) J. Schwinger, Phys. Rev. 75, 651 (1949); русский перевод см. в сб. «Новейшее развитие квантовой электродинамики», стр. 57, ИЛ, 1956.

Вакуумная поправка для уровней энергии мезоатома может быть найдена по формуле

$$\Delta\mathcal{E} = -\frac{2\alpha Ze^2}{3\pi}\int_1^\infty dy \int d^3x\psi^+\psi \frac{e^{-2k_0yr}}{r}\left(1+\frac{1}{2y^2}\right)\frac{\sqrt{y^2-1}}{y^2}. \qquad (51,40)$$

В частности, для s-состояний, подставляя сюда решение (51,7а), будем иметь:

$$\Delta\mathcal{E} = -\frac{2\alpha Ze^2}{3\pi}\frac{n^3}{a_n^3}\int_1^\infty dy \frac{1}{\left(\frac{n}{a_n}+yk_0\right)^2}\left(1+\frac{1}{2y^2}\right)\frac{\sqrt{y^2-1}}{y^2}. \qquad (51,40а)$$

При $k_0 \gg n/a_n$ мы получаем формулу для вакуумного сдвига уровней обычных атомов. В общем случае для мезоатомов этим приближением воспользоваться нельзя. Учет конечных размеров ядра может только уменьшить значение этой поправки.

Приведем таблицу, на основе которой легко произвести относительное сравнение различных поправок для энергетических уровней в мезоатомах [1]):

Поправки $\frac{\Delta\mathcal{E}_{2p_{3/2}} - \Delta\mathcal{E}_{1s_{1/2}}}{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1} 10^3$	Мезоатомы							
	H^1	He^4	Li^7	Be^9	B^{11}	C^{12}	N^{14}	O^{16}
Поляризация электрон-позитронного вакуума	1,00	2,22	3,17	3,88	4,49	5,01	5,48	5,88
Релятивистские эффекты	0,02	0,07	0,15	0,27	0,42	0,60	0,82	1,07
Конечные размеры ядра		—0,26	—0,88	—1,87	—3,34	—5,11	—7,72	—11,06
Суммарная поправка	1,02	2,03	2,44	2,28	1,57	0,50	—1,42	—4,11
$\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1$ (*кэв*)	1,898	8,216	18,71	33,37	52,26	75,32	102,66	134,22

Из этой таблицы видно, что с увеличением Z ($Z > 6$) влияние поляризационных поправок начинает уменьшаться относительно влияния поправок на учет конечных размеров ядра, а в тяжелых элементах поляризацией вакуума можно вообще пренебречь.

Влияние поляризации вакуума на сдвиг уровней мезоатома было открыто и экспериментально. Например, в [2]) было показано, что значение массы μ^--мезона, найденное при изучении переходов в μ^--мезоатомах: $2p \to 1s$ (углерод), $3d \to 2p$ (фосфор) и $4f \to 3d$ (крем-

[1]) L. Foldy and E. Eriksen, Phys. Rev. 95, 1048 (1954).

[2]) S. Koslow, V. Fitch and J. Rainwater, Phys. Rev. 95, 291 (1954).

ний), будет совпадать со значением, найденным из других экспериментальных данных, только в том случае, если учитывать поправку на поляризацию вакуума.

Учтем влияние поляризации электрон-позитронного вакуума на рассеяние μ^--мезонов кулоновским потенциалом. Как известно, эффективное сечение упругого рассеяния дираковских частиц неподвижным центром может быть записано в виде

$$d\sigma = \frac{m_\mu^2}{4\pi^2\hbar^4}\left(1 + \frac{p^2}{m_\mu^2 c^2}\cos^2\frac{\theta}{2}\right) U_\varkappa^2\, d\Omega, \qquad (51,41)$$

где m_μ — масса мезона, $p = \hbar k$ — ее импульс,

$$U_\varkappa = \int U(r)\, e^{i\varkappa r}\, d^3x \qquad (51,42)$$

является амплитудой Фурье потенциальной энергии, а $\varkappa = 2k\sin(\theta/2)$.

Подставляя сюда потенциальную энергию (51,39), мы найдем:

$$U_\varkappa = -\frac{4\pi Z e^2}{\varkappa^2}\left(1 + \frac{4\alpha}{\pi}\xi f(\xi)\right), \qquad (51,43)$$

где

$$\xi = \frac{\varkappa^2}{4k_0^2} = \frac{p^2 \sin^2\frac{\theta}{2}}{m_0^2 c^2},$$

m_0 — масса электрона, а $f(\xi)$ определяется из (51,32).

Тогда дифференциальное эффективное сечение будет равно

$$d\sigma = d\sigma_{\text{Рёз}}\left[1 + \frac{8\alpha}{\pi}\left(\frac{p}{m_0 c}\sin\frac{\theta}{2}\right)^2 f\left(\left(\frac{p}{m_0 c}\sin\frac{\theta}{2}\right)^2\right)\right], \qquad (51,44)$$

где

$$d\sigma_{\text{Рёз}} = \frac{Z^2 e^4 m_\mu^2}{4p^4 \sin^4\frac{\theta}{2}}\left(1 + \frac{p^2}{m_\mu^2 c^2}\cos^2\frac{\theta}{2}\right) d\Omega$$

представляет собою рёзерфордовское эффективное сечение для рассеяния μ^--мезонов, а величина, пропорциональная α — поправку на поляризацию электрон-позитронного вакуума.

Функция f определяется интегралом (51,32), который может быть вычислен точно:

$$f(\xi) = \frac{1}{12\xi}\left[\left(1 - \frac{1}{2\xi}\right)\sqrt{\frac{1+\xi}{\xi}}\ln\frac{\sqrt{1+\xi}+\sqrt{\xi}}{\sqrt{1+\xi}-\sqrt{\xi}} + \frac{1}{\xi} - \frac{5}{3}\right] \cong$$

$$\cong \begin{cases} \dfrac{1}{15} & \text{при } \xi \ll 1, \\[2mm] \dfrac{\ln 4\xi - \frac{5}{3}}{12\xi} & \text{при } \xi \gg 1. \end{cases}$$

Поэтому эффективное сечение (51,44) может быть представлено в виде

$$d\sigma \cong d\sigma_{\text{Pез}} \begin{cases} 1 + \dfrac{8\alpha}{15\pi}\left(\dfrac{p}{m_0 c}\sin\dfrac{\theta}{2}\right)^2 & \text{при} \quad p\sin\dfrac{\theta}{2} \ll m_0 c, \\ 1 + \dfrac{2\alpha}{3\pi}\left[\ln\left(\dfrac{2p}{m_0 c}\sin\dfrac{\theta}{2}\right)^2 - \dfrac{5}{3}\right] & \text{при} \quad p\sin\dfrac{\theta}{2} \gg m_0 c. \end{cases} \tag{51,45}$$

Отсюда видно, что при рассеянии μ^--мезонов важен второй случай $\left(p\sin\dfrac{\theta}{2} \gg m_0 c\right)$, когда в. потенциале, создаваемом поляризацией электрон-позитронного вакуума, следует учитывать не один член разложения по ∇^2/k_0^2, а весь ряд.

Формула (51,44) была найдена Юлингом[1]) для рассеяния заряженных частиц ядрами. В случае же рассеяния электронов следует оценить еще влияние обменной энергии, связанной с флуктуациями электромагнитного поля.

в) Катализ ядерных реакций μ^--мезонами. Как известно, электрон может связывать между собою два протона или протон и дейтрон, в результате чего образуется ионизированная молекула водорода H_2 или HD. Теория этой простейшей молекулы является основой при построении теории более сложных, так называемых гомополярных, молекул.

Простейшая теория ионизированной молекулы водорода показывает, что для волновой функции электрона при наличии двух кулоновских центров должны существовать симметричное (ψ_s) и антисимметричное (ψ_a) решения. Антисимметричное решение не дает минимума для энергии взаимодействия, поскольку последняя при сближении ядер монотонно возрастает. Таким образом, в этом случае молекула не должна образовываться. Симметричное же решение дает минимум энергии на расстоянии[2])

$$R_{\text{мол}} = 2{,}50 a_0 = 2{,}50 \frac{\hbar}{\alpha m_0 c}. \tag{51,46}$$

Заметим, что μ-мезоны также могут образовывать не только мезоатомы, но и мезомолекулы.

Франк, а также Зельдович предсказали[3]), что если образуется мезомолекула $(HD)_\mu$, то в такой молекуле протон и дейтрон будут находиться на расстоянии в 200 раз меньшем, чем в обычной молекуле (HD), поскольку молекулярный радиус, как видно из формулы (51,46),

---

[1]) E. A. Uehling, Phys. Rev. 48, 55 (1935).

[2]) Значение коэффициента, найденное на основе экспериментальных данных, несколько меньше 2,50. Более точные приближенные методы, нежели метод возмущений, дали значительно лучшее совпадение этого коэффициента с экспериментальными данными; см., например, П. Гомбаш, Проблема многих частиц в квантовой механике, стр. 98, ИЛ, 1952.

[3]) F. Frank, Nature, **160**, 525 (1947); Я. Зельдович, ДАН СССР 95, 493 (1954).

будет в $m_\mu/m_0 \approx 200$ раз меньше. Поэтому вероятность преодоления потенциального барьера в молекуле $(HD)_\mu$ при столкновении атомов H и D с образованием He^3 должна сильно увеличиться по сравнению с обычной молекулой HD, т. е. в мезомолекуле $(HD)_\mu$ может произойти холодная ядерная реакция.

В самом деле, при образовании стабильной молекулы $(HD)_\mu$ вероятность указанной ядерной реакции будет равна произведению частоты колебаний ядер в мезомолекуле ($\omega = 5 \cdot 10^{17}$ *сек*$^{-1}$) на проницаемость барьера $B \sim \exp\left\{-(2/\hbar)\int\limits_R^{R_{\text{мол}}} \sqrt{2M(E-E_0)}\,dr\right\}$, равную 10^{-5}, где M — приведенная масса, $R = 3 \cdot 10^{-13}$ *см* — расстояние, при котором начинаются ядерные реакции, а E_0 — энергия связи при $r = R_{\text{мол}}$.

Образование мезомолекулы $(HD)_\mu$ с последующим образованием ядра гелия He^3 наблюдалось экспериментально Альварецем и его сотрудниками [1]) с помощью так называемой пузырьковой камеры диаметром 25 *см*, наполненной жидким водородом и помещенной в магнитное поле напряженностью в 11 000 *эрст*. На 2500 случаев исчезновения μ-мезона они наблюдали примерно 18 случаев вторичного его появления с энергией около 5,4 *Мэв*. Мезон затем вновь исчезал после прохождения расстояния около 1,7 *см* и т. д.

На основе указанных теоретических соображений о возможности образования мезомолекулы наблюдавшееся Альварецем явление можно интерпретировать следующим образом. При прохождении μ^--мезона в пузырьковой камере он, теряя свою энергию, захватывается, главным образом, атомом дейтерия D, так как в мезоатоме дейтерия D_μ энергия связи μ-мезона на 150 *эв* больше, чем в мезоатоме водорода H_μ. Мезоатом дейтерия D_μ, сталкиваясь с ядром водорода H, образует μ^--мезомолекулу $(HD)_\mu$. При образовании ядра He^3 по реакции $H + D \to He$ выделенная энергия 5,4 *Мэв* уносится μ-мезоном, которой оказывается, таким образом, своеобразным «катализатором» ядерной реакции и может, как и наблюдал Альварец, вызвать ее еще раз.

Эффект, открытый экспериментально Альварецем, имеет большое значение, в частности, для определения природы новых открываемых частиц, так как реакция «катализа» может идти лишь на ядерно-неактивных частицах, каковыми являются, например, μ^--мезоны.

---

[1]) L. Alvarez, Phys. Rev. **105**, 1127 (1957); русский перевод см. в сб. «Проблемы современной физики» № 6, стр. 201, ИЛ, 1957.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

